Géométrie Différentielle, TD 8 du 5 avril 2013

1. Redressement des champs de vecteurs

Si $1 \leqslant i \leqslant n$, on note ∂_i le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ constant de valeur le i-ème vecteur e_i de la base canonique.

1– Soit X un champ de vecteurs C^∞ défini sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $X(0) = e_1$. Notons φ_t le flot local de X. Montrer que l'application $F(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)$ est un difféomorphisme local au voisinage de l'origine.

2– Soit G un inverse local de F au voisinage de l'origine. Calculer $G_* X$.

3– Soit M une variété C^∞, X un champ de vecteurs C^∞ sur M, et $x \in M$ tel que $X(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme ψ entre un voisinage U de x dans M et un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\psi_* X|_U = \partial_1|_V$.

Solution :

1– On calcule sa différentielle en l'origine : c'est l'identité. Elle est donc inversible, et le théorème d'inversion locale assure que F est un difféomorphisme local.

2– Calculons $F_* \partial_1$. On a $d_{(x_1,\dots,x_n)} F(\partial_1) = X(F(x_1, \dots, x_n))$, de sorte que $F_* \partial_1 = X$. Comme G est un inverse local de F, $G_* X = \partial_1$.

3– Comme le problème est local, on peut supposer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et que x en est l'origine. Comme $X(x)$ est non nul, on peut, quitte à faire un changement de coordonnées linéaire, supposer que $X(x) = e_1$. Quitte à restreindre notre ouvert, l'application $\psi = G$ considérée à la seconde question est bien définie et convient.

2. Transitivité des difféomorphismes

1– Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $||x||, ||y|| < r$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(x) = y$ et $\varphi(z) = z$ si $||z|| > r$. On pourra utiliser le flot d'un champ de vecteurs adéquat.

2– Soit M une variété C^∞ et $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x tel que, si $y \in V$, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x) = y$.

3– Soit M une variété C^∞ connexe. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M.

4– Soit M une variété C^∞ connexe de dimension $\geqslant 2$, et soit $k \geqslant 1$. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit k-transitivement sur M : si $x_1, \dots, x_k \in M$ sont distincts et si $y_1, \dots, y_k \in M$ sont distincts, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x_i) = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$.

Solution :

1– Considérons le champ de vecteurs X constant égal à $y - x$. Soit ρ tel que $||x||, ||y|| < \rho < r$ et notons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction plateau égale à 1 sur $B(0, \rho)$ et égale à 0 hors de $B(0, r)$. Posons $Y = fX$. Le flot de Y est défini pour tout temps, par le théorème des bouts. En effet, hors de $B(0, r)$, il est constant, de sorte qu'il ne peut sortir de tout compact.

Notons φ le flot de Y au temps 1. Il vérifie les propriétés voulues.

2– On choisit un voisinage U de x difféomorphe à $\mathbb{R}^n$; on l'identifie à $\mathbb{R}^n$ de sorte que x en soit l'origine. On pose V la boule unité ouverte dans U. Montrons que V convient.

Soit $y \in V$. Par la question précédente, on trouve un difféomorphisme φ de U envoyant x sur y, et qui peut se prolonger en un difféomorphisme de M en posant $\varphi(z) = z$ pour $z \notin U$.

3– La question précédente montre que les orbites de l'action du groupe des difféomorphismes sont ouvertes. Comme M est connexe, et partitionnée en orbites, il ne peut y avoir qu'une orbite, égale à M tout entier.

4– On raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 1$, c'est le résultat ci-dessus. Si c'est vrai pour $k - 1$, on considère un difféomorphisme ψ envoyant x_i sur y_i pour $1 \leqslant i \leqslant k - 1$. Posons $x = \psi(x_k)$. On va construire un difféomorphisme ψ' tel que $\psi'(y_i) = y_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k - 1$ et $\psi'(x) = y_k$. On pourra alors poser $\varphi = \psi' \circ \psi$.

On considère pour cela l'action sur M du groupe des difféomorphismes fixant $y_1, \dots, y_{k-1}$. En raisonnant comme dans les questions précédentes (et en particulier en exploitant la connexité de $M \setminus \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$, vraie car $\dim(M) \geqslant 2$), on montre qu'il agit transitivement sur $M \setminus \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$, ce qui conclut.

3. Classification des variétés de dimension 1

Soit M une variété connexe C^∞ de dimension 1. On va montrer que M est difféomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{S}^1$.

1– Supposons dans un premier temps que M est orientable. Montrer qu'il existe sur M un champ de vecteurs ξ ne s'annulant pas.

2– Soit $x_0 \in M$ et notons φ_t le flot de ξ. On note $f : t \mapsto \varphi_t(x_0)$ définie sur un intervalle ouvert maximal I. Montrer que f est une immersion surjective.

3– Si f est injective, montrer que f est un difféomorphisme entre I et M.

4– Si f n'est pas injective, montrer que $I = \mathbb{R}$ et que $f^{-1}(x_0)$ est de la forme $r\mathbb{Z}$ pour un certain $r > 0$. En déduire que f induit un difféomorphisme entre $\mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ et M.

5– Supposons à présent que M n'est pas orientable. Montrer que M est le quotient par une action sans point fixe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'une variété $\widetilde{M}$ connexe et orientable.

6– Obtenir une contradiction.

Solution :

1– Fixons une orientation de M. Écrivons M comme réunion localement finie d'ouverts de cartes connexes U_i : ce sont des intervalles. Soit (φ_i) une partition de l'unité adaptée aux U_i et ξ_i un champ de vecteurs sur U_i proportionnel à l'orientation et ne s'annulant pas. Alors $\xi = \sum_i \varphi_i \xi_i$ convient.

2– La différentielle de f est donnée par $T_t f(\frac{\partial}{\partial t}) = X(f(t)) \neq 0$. Ainsi, f est immersive, donc un difféomorphisme local, et son image est ouverte. Montrons qu'elle est également fermée. Soit $y \in \overline{f(I)}$. L'application $g : t \mapsto \varphi_t(y)$ est définie sur un voisinage $]-\varepsilon; \varepsilon[$ de 0 dans $\mathbb{R}$. Son image $g(]-\varepsilon; \varepsilon[)$ est donc un voisinage de y et rencontre ainsi $f(I)$. Il existe alors $s \in]-\varepsilon; \varepsilon[$ et $t \in I$ tels que $\varphi_s(y) = \varphi_t(x_0)$. Alors $y = \varphi_{t-s}(x_0)$ appartient à I.

Par connexité de M, f est donc surjective.

3– Si f est injective, c'est un difféomorphisme local bijectif, donc un difféomorphisme entre I et M.

4– Supposons qu'il existe deux points t et $t+s$ dans I avec $s > 0$ tels que $f(t) = f(t+s)$. Alors les propriétés de transitivité du flot montrent que $I = I + s$, ce qui implique $I = \mathbb{R}$. De plus $\{s \in \mathbb{R} | \varphi_s(x_0) = x_0\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ non nul et non égal à $\mathbb{R}$ (car f est un difféomorphisme local en x_0). Par conséquent, il est de la forme $r\mathbb{Z}$ avec $r > 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t+r) = f(t)$, de sorte que f induit $\widetilde{f} : \mathbb{R}/r\mathbb{Z} \to M$. Comme f est une immersion, $\widetilde{f}$ est une immersion. Par définition de r, elle est injective. Comme elle est également surjective, $\widetilde{f}$ est un difféomorphisme.

5– Soit $\widetilde{M}$ l'ensemble des couples (x, o) où $x \in M$ et o est une orientation de $T_x M$. On vérifie aisément que $\widetilde{M}$ est munie d'une structure naturelle de variété C^∞, et que M est le quotient de $\widetilde{M}$ par l'actionde $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par $(x, o) \mapsto (x, -o)$. La variété $\widetilde{M}$ est orientable : son espace tangent en (x, o) s'identifie naturellement à $T_x M$ et peut être muni de l'orientation o.

6– La variété $\widetilde{M}$ est connexe orientable de dimension 1, donc isomorphe, par les questions précédentes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1$. De plus, l'action de $1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une involution sans point fixe de $\widetilde{M}$ qui renverse l'orientation. Or le théorème des valeurs intermédiaires montre que ni $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{S}^1$ ne possèdent un tel automorphisme. C'est absurde.

4. Flots de champs de vecteurs colinéaires

Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur une variété M.

1– Soit f une fonction C^∞ sur M. Décrire le flot local de fX en un point x_0 de M en fonction du flot local de X en ce point. Obtenir en particulier une estimation sur le temps pour lequel le flot local de fX est défini.

2– Montrer qu'il existe une application f C^∞ partout strictement positive telle que fX est complet.

Solution :

1– Soit $\varepsilon > 0$ et U un voisinage de x_0 dans M tels que le flot local $\varphi_t(x)$ de X au voisinage de x_0 soit défini pour $(t, x) \in [-\varepsilon; \varepsilon] \times U$. Quitte à rétrécir U et à diminuer ε, on peut supposer que $\varphi_t(x)$ prend ses valeurs dans un compact. La fonction $|f|$ y est bornée par une constante C.

L'idée est de chercher le flot local de fX sous la forme $\varphi_{\gamma(t,x)}(x)$. L'équation que doit vérifier γ est

$$\frac{d}{dt}|_{t=s}\gamma(t, x) = f(\varphi_{\gamma(s,x)}(x))$$
$$\gamma(0, x) = 0$$

Pour tout $x \in U$, cette équation a une solution (par Cauchy-Lipschitz) définie sur $[-\varepsilon/C; \varepsilon/C]$ (on voit cela à l'aide du théorème des bouts). Par dépendance en les paramètres des solutions d'une équation différentielle, on obtient une solution C^∞ $\gamma(t, x)$ définie sur $[-\varepsilon/C; \varepsilon/C] \times U$. C'est alors un calcul immédiat de vérifier que $\psi_t(x) = \varphi_{\gamma(t,x)}(x)$, définie sur $[-\varepsilon/C; \varepsilon/C] \times U$ est le flot de fX au voisinage de x_0.

2– Soit U_n une suite croissante d'ouverts d'adhérence compacte telle que $\overline{U_n}$ soit inclus dans de U_{n+1} et $\bigcup U_n = M$. Comme $\overline{U_n}$ est compact, le flot de X est défini sur un temps $\varepsilon_n > 0$ sur U_n. Quitte à réduire ε_n, on peut même imposer que les orbites partant de U_n restent dans U_{n+1} pendant un temps au moins ε_n.

Si $f \leqslant \varepsilon_n$ sur U_{n+1}, on déduit du calcul de la question précédente que les orbites de fX partant d'un point de U_n sont définies pour un temps au moins 1, et restent dans U_{n+1} pendant ce temps. Il suffit donc de choisir une fonction f telle que, pour tout n, $f \leqslant \varepsilon_n$ sur chaque $U_{n+1} \setminus U_n$ pour conclure.

Pour cela, soit $V_n = U_{n+1} \setminus \overline{U_{n-1}}$. C'est un recouvrement ouvert de M ; on note φ_n une partition de l'unité adaptée. On peut alors prendre $f = \sum_n \varphi_n \min(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1})$.

5. Théorème de fibration d'Ehresmann

Soit $f : M \to N$ une submersion surjective entre variétés C^∞ de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que pour tout champ de vecteurs C^∞ Y sur N, il existe un champ de vecteurs C^∞ X sur M tel que

$$\forall x \in M, T_x f(X(x)) = Y(f(x)).$$

Notons $\varphi_{X,t}$ et $\varphi_{Y,t}$ les flots locaux de X et Y. En déduire que pour tout $x_0 \in X$, si (x, t) est assez proche de $(x_0, 0)$,

$$f \circ \varphi_{X,t}(x) = \varphi_{Y,t} \circ f(x).$$

2– Soit $y_0 \in N$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $T_{y_0}N$. Montrer qu'il existe des champs de vecteurs C^∞ $Y_1, \dots, Y_n$ sur N tels que $Y_i(y_0) = e_i$. Si $\varphi_{Y_i,t}$ est le flot local de Y_i, montrer que l'application

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \varphi_{Y_1,t_1} \circ \dots \circ \varphi_{Y_n,t_n}(y_0)$$

est un C^∞-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage de y_0 dans N.

3– Supposons f propre. Soit $y_0 \in N$ et notons $F = f^{-1}(y_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage U de y_0 dans N et un C^∞-difféomorphisme $\psi : U \times F \to f^{-1}(U)$ tel que $f \circ \psi(y, x) = y$ pour $(y, x) \in U \times F$.

On dit alors que f est une *fibration*.

Solution :

Voir la correction de l'exercice 88 dans le polycopié de F. Paulin.