

Géométrie Différentielle, TD 8 du 5 avril 2013

1. Redressement des champs de vecteurs

Si $1 \leq i \leq n$, on note ∂_i le champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n constant de valeur le i -ème vecteur e_i de la base canonique.

- 1- Soit X un champ de vecteurs C^∞ défini sur un voisinage de l'origine de \mathbb{R}^n . On suppose que $X(0) = e_1$. Notons φ_t le flot local de X . Montrer que l'application $F(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{x_1}(0, x_2, \dots, x_n)$ est un difféomorphisme local au voisinage de l'origine.
- 2- Soit G un inverse local de F au voisinage de l'origine. Calculer G_*X .
- 3- Soit M une variété C^∞ , X un champ de vecteurs C^∞ sur M , et $x \in M$ tel que $X(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme ψ entre un voisinage U de x dans M et un voisinage V de 0 dans \mathbb{R}^n tel que $\psi_*X|_U = \partial_1|_V$.

2. Transitivité des difféomorphismes

- 1- Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\|, \|y\| < r$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme φ de \mathbb{R}^n tel que $\varphi(x) = y$ et $\varphi(z) = z$ si $\|z\| > r$. On pourra utiliser le flot d'un champ de vecteurs adéquat.
- 2- Soit M une variété C^∞ et $x \in M$. Montrer qu'il existe un voisinage V de x tel que, si $y \in V$, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x) = y$.
- 3- Soit M une variété C^∞ connexe. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur M .
- 4- Soit M une variété C^∞ connexe de dimension ≥ 2 , et soit $k \geq 1$. Montrer que le groupe des difféomorphismes de M agit k -transitivement sur M : si $x_1, \dots, x_k \in M$ sont distincts et si $y_1, \dots, y_k \in M$ sont distincts, il existe un difféomorphisme φ de M tel que $\varphi(x_i) = y_i$ pour $1 \leq i \leq k$.

3. Classification des variétés de dimension 1

Soit M une variété connexe C^∞ de dimension 1. On va montrer que M est difféomorphe à \mathbb{R} ou à \mathbb{S}^1 .

- 1- Supposons dans un premier temps que M est orientable. Montrer qu'il existe sur M un champ de vecteurs ξ ne s'annulant pas.
- 2- Soit $x_0 \in M$ et notons φ_t le flot de ξ . On note $f : t \mapsto \varphi_t(x_0)$ définie sur un intervalle ouvert maximal I . Montrer que f est une immersion surjective.
- 3- Si f est injective, montrer que f est un difféomorphisme entre I et M .

- 4– Si f n'est pas injective, montrer que $I = \mathbb{R}$ et que $f^{-1}(x_0)$ est de la forme $r\mathbb{Z}$ pour un certain $r > 0$. En déduire que f induit un difféomorphisme entre $\mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ et M .
- 5– Supposons à présent que M n'est pas orientable. Montrer que M est le quotient par une action sans point fixe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'une variété \widetilde{M} connexe et orientable.
- 6– Obtenir une contradiction.

4. Flots de champs de vecteurs colinéaires

Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur une variété M .

- 1– Soit f une fonction C^∞ sur M . Décrire le flot local de fX en un point x_0 de M en fonction du flot local de X en ce point. Obtenir en particulier une estimation sur le temps pour lequel le flot local de fX est défini.
- 2– Montrer qu'il existe une application f C^∞ partout strictement positive telle que fX est complet.

5. Théorème de fibration d'Ehresmann

Soit $f : M \rightarrow N$ une submersion surjective entre variétés C^∞ de dimensions respectives m et n .

- 1– Montrer que pour tout champ de vecteurs C^∞ Y sur N , il existe un champ de vecteurs C^∞ X sur M tel que

$$\forall x \in M, T_x f(X(x)) = Y(f(x)).$$

Notons $\varphi_{X,t}$ et $\varphi_{Y,t}$ les flots locaux de X et Y . En déduire que pour tout $x_0 \in X$, si (x, t) est assez proche de $(x_0, 0)$,

$$f \circ \varphi_{X,t}(x) = \varphi_{Y,t} \circ f(x).$$

- 2– Soit $y_0 \in N$ et (e_1, \dots, e_n) une base de $T_{y_0}N$. Montrer qu'il existe des champs de vecteurs C^∞ Y_1, \dots, Y_n sur N tels que $Y_i(y_0) = e_i$. Si $\varphi_{Y_i,t}$ est le flot local de Y_i , montrer que l'application

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \varphi_{Y_1,t_1} \circ \dots \circ \varphi_{Y_n,t_n}(y_0)$$

est un C^∞ -difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n sur un voisinage de y_0 dans N .

- 3– Supposons f propre. Soit $y_0 \in N$ et notons $F = f^{-1}(y_0)$. Montrer qu'il existe un voisinage U de y_0 dans N et un C^∞ -difféomorphisme $\psi : U \times F \rightarrow f^{-1}(U)$ tel que $f \circ \psi(y, x) = y$ pour $(y, x) \in U \times F$.

On dit alors que f est une *fibration*.