Géométrie Différentielle, TD 9 du 19 avril 2013

1. Surfaces à g trous

Soient $g, k \geqslant 0$ des entiers. Soit T_g l'unique surface connexe compacte orientable « à g trous ». On note $T_{g,k}$ la variété obtenue en enlevant k points distincts à T_g.

1– Montrer que $\dim H^0(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 1$ et $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$.

2– Calculer $\dim H^1(T_{0,k}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{0,k}, \mathbb{R})$ pour $k \geqslant 0$.

3– Calculer $\dim H^1(T_1, \mathbb{R})$.

4– Calculer $\dim H^1(T_{1,1}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{1,1}, \mathbb{R})$.

5– Soit $k \geqslant 2$. Calculer $\dim H^1(T_{1,k}, \mathbb{R})$, $\dim H^2(T_{1,k}, \mathbb{R})$, et montrer que si $\mathbb{S}^1 \subset T_{1,k}$ est un petit cercle tracé autour de l'un des points qu'on a enlevé, l'application induite $H^1(T_{1,k}) \to H^1(\mathbb{S}^1)$ est non nulle.

6– Calculer $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R})$ pour $g, k \geqslant 0$.

7– En déduire que si $g \neq g'$, T_g et $T_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

8– Montrer que si $(g, k) \neq (g', k')$, $T_{g,k}$ et $T_{g',k'}$ ne sont pas homéomorphes.

2. Cohomologie des tores

On note $M_n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n. L'espace $\Omega^p(M_n)$ s'identifie aux p-formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$ invariantes par translation par $\mathbb{Z}^n$. On note Ω^p_{const} le sous-espace constitué des formes invariantes par toutes les translations.

1– Soit $\alpha \in \Omega^p_{const}$. Montrer que α est une forme fermée. En déduire une application linéaire $u : \Omega^p_{const} \to H^p(M_n, \mathbb{R})$.

2– Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note τ_x la translation par x. Soit $\alpha \in \Omega^p(M_n)$ une forme fermée. Montrer que $\tau_x^*\alpha - \alpha$ est exacte.

3– Soit $\alpha \in \Omega^p(M_n)$ une forme fermée. Montrer que $\int_{[0,1]^n} \tau_x^*\alpha dx - \alpha$ est exacte.

4– En déduire que u est surjective.

5– Montrer que u est injective.

6– Calculer $\dim H^p(M_n, \mathbb{R})$.

3. Cohomologie de l'espace projectif complexe

Pour tout $k \in \{0, \ldots, N\}$, soit $j_k : \mathbb{C}^N \to \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ définie par $j_k(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_N) = [x_0 : \ldots : x_{k-1} : 1 : x_{k+1} : \ldots : x_N]$, et notons $U_k = j_k(\mathbb{C}^N)$.

1– Soit $k \in \{1, \ldots, N\}$. Quelle est la cohomologie de de Rham de l'ouvert $U_0 \cap (U_1 \cup \cdots \cup U_k)$?

2– Soit I une partie non vide de $\{0, \ldots, N\}$. Quelle est la cohomologie de de Rham de $V_I := \bigcup_{k \in I} U_k$?

3– Quelle est la cohomologie de de Rham de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$? Que vaut sa caractéristique d'Euler-Poincaré ?

4– Quand $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est-il homéomorphe à $\mathbb{S}^{2N}$?

4. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ et $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ ne sont pas homéomorphes.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Dans cet exercice, les formes différentielles sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1– Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^4$ et $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$.

2– On note $[z_0 : \ldots : z_n]$ les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Pour $0 \leqslant p \leqslant n$, on note U_p l'ouvert des $[z_0 : \ldots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ tels que z_p est non nul.

   1– Pour tous p, j dans $\{0, \ldots, n\}$, on note $u_{p,j} : U_p \to \mathbb{C}$ l'application $[z_0 : \ldots : z_n] \mapsto z_j/z_p$, et $\varphi_p : U_p \to \mathbb{C}$ l'application $[z_0 : \ldots : z_n] \mapsto \sum_{j=o}^{n} |z_j/z_p|^2$. Montrer que ces applications sont de classe C^∞.

   2– Soit
   $$\omega_p = \frac{i}{\varphi_p} \sum_{j=0}^{n} du_{p,j} \wedge d\overline{u_{p,j}} - \frac{i}{\varphi_p^2} \sum_{j,k=0}^{n} u_{p,j}\overline{u_{p,k}} du_{p,k} \wedge d\overline{u_{p,j}} \ .$$
   Montrer qu'il existe une 2-forme différentielle ω de classe C^∞ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ telle que $\omega_{|U_p} = \omega_p$ pour tout $0 \leqslant p \leqslant n$.

   3– Montrer que ω est fermée.

   4– On définit $\omega^1 = \omega$, et par récurrence, $\omega^m = \omega^{m-1} \wedge \omega$ pour tout entier $m \geqslant 2$. Montrer que ω^n est une forme volume sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

   5– Montrer que ω n'est pas exacte, et que sa classe de cohomologie dans $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ engendre (en tant qu'algèbre réelle) $H^*(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$.

6– En déduire que les variétés $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ et $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ ne sont pas homéomorphes.