

# Géométrie Différentielle

Patrick Bernard

21 mai 2015

Version préliminaire des notes de cours.

## Table des matières

<b>1 Étude locale des applications.</b>	<b>2</b>
1.1 Difféomorphismes . . . . .	2
1.2 Immersions, plongements . . . . .	2
1.3 Submersions . . . . .	4
1.4 Subimmersions . . . . .	4
<b>2 Sous variétés.</b>	<b>5</b>
2.1 Caractérisations des sous variétés. . . . .	5
2.2 Applications différentiables entre sous variétés . . . . .	6
<b>3 Exemples</b>	<b>11</b>
3.1 Sphères . . . . .	11
3.2 Tores . . . . .	12
3.3 Groupes de Matrices . . . . .	12
3.4 Matrices de rang fixé . . . . .	13
3.5 Grassmaniennes . . . . .	14
3.6 Fibré tangent, fibré vectoriel. . . . .	17
<b>4 Champ de vecteurs, fibrations</b>	<b>19</b>
4.1 Champ de vecteurs sur une sous variété . . . . .	19
4.2 Fibrations localement triviales . . . . .	23
4.3 Fibration de Hopf . . . . .	25
4.4 Oscillateur non résonant . . . . .	26
4.5 Orbites d'un champ de vecteurs . . . . .	27
<b>5 Distances sur une sous-variété</b>	<b>28</b>
5.1 La distance géométrique . . . . .	28
5.2 Géodésiques minimisantes. . . . .	31
5.3 Métriques Riemanniennes . . . . .	32
<b>6 Théorème de l'orbite</b>	<b>32</b>
6.1 Énoncé général . . . . .	32
6.2 Cas des feuilletages . . . . .	36
<b>7 Espaces métriques localement compacts</b>	<b>36</b>

<b>8 Variétés</b>	<b>40</b>
8.1 Première définition	40
8.2 Seconde définition	41
8.3 Plongement	41
8.4 Feuilles	43
8.5 Quotients	44
<b>9 Espace tangent et crochet de Lie</b>	<b>48</b>
9.1 Espaces tangents et champs de vecteurs.	48
9.2 Crochets de Lie	52
9.3 Formes de Pfaff	57
9.4 Complément : fibrés vectoriels	59
<b>10 Formes différentielles</b>	<b>60</b>
10.1 Formes multilinéaires alternées.	60
10.2 Formes différentielles	63
10.3 Intégration et formule de Stokes sur le cube.	65
10.4 Différentielle extérieure	66
10.5 Orientation et intégration	69
10.6 Domaines à bord et formule de Stokes	71

## 1 Étude locale des applications.

On notera  $\psi : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  pour désigner une application  $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  telle que  $\psi(x_0) = y_0$ . On utilisera la même notation même si  $\psi$  n'est définie que dans un voisinage de  $x_0$ .

### 1.1 Difféomorphismes

Étant donnés deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ , un difféomorphisme de  $\psi : U \longrightarrow V$  est une application inversible  $C^1$  d'inverse  $C^1$ . Si le difféomorphisme  $\psi$  est  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , alors son inverse est nécessairement  $C^r$ , comme on le montre par récurrence en utilisant la formule

$$d(\psi^{-1})(y) = (d\psi_{\psi^{-1}(y)})^{-1}.$$

On rappelle :

**Théorème 1.1** (Théorème d'inversion locale). *Soit  $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  une application  $C^1$  telle que  $d\psi_{x_0}$  est inversible. Alors,  $\psi$  est un difféomorphisme local au voisinage de  $x_0$ , c'est à dire qu'il existe des ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $x_0$  et  $\psi(x_0)$  tels que  $\psi|_U$  est un difféomorphisme sur  $V$ .*

### 1.2 Immersions, plongements

**Proposition 1.2** (Forme Normale des Immersions). *Soit  $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  une application  $C^r$ . Si  $df_{x_0}$  est injective, alors  $f$  est une immersion en  $x_0$ , c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme local*

$$\varphi : (\mathbb{R}^m, y_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}, (x_0, 0))$$

tel que  $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$  au voisinage de  $x_0$ .

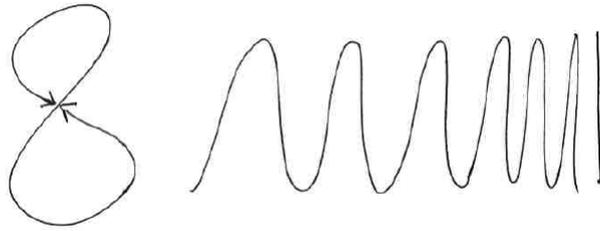


FIGURE 1 – immersions injectives

Plus précisément, l'énoncé s'écrit : Il existe des ouvert  $U, V, W$  de  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m-n}, \mathbb{R}^m$  contenant  $x_0, 0, y_0$ , et un difféomorphisme  $\varphi : (W, y_0) \longrightarrow (U \times V, (x_0, 0))$  tel que  $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$  sur  $U$ .  
 DÉMONSTRATION. Soit  $F$  un supplémentaire de l'image de  $df_{x_0}$  dans  $\mathbb{R}^m$ . L'application

$$\mathbb{R}^n \times F \ni (x, y) \longmapsto f(x) + y \in \mathbb{R}^m$$

est un difféomorphisme local. Notons  $\varphi : (\mathbb{R}^m, y_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n \times F, (x_0, 0))$  son inverse local. On voit que  $\varphi \circ f(x) = (x, 0)$ . □

Étant donné un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$  est une immersion si c'est une immersion en chaque point de  $U$ .

L'application  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$  est un plongement si c'est une immersion injective qui est un homéomorphisme sur son image (munie de la topologie induite).

Dans le cas  $m = n$ , les notions de plongement et de difféomorphisme sur son image sont équivalentes.

Les notions de plongement et d'immersion sont localement identiques au vu de la Proposition ci-dessus :

**Propriété 1.3.** *Si  $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  est une immersion en  $x_0$ , alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x_0$  tel que  $f|_V$  est un plongement.*

La première obstruction globale à ce qu'une immersion soit un plongement est l'injectivité. Les exemples dessinés ci-dessus montrent que même une immersion injective (de  $]0, 1[$  et de  $]0, 1[ \cup ]2, 3[$ , en l'occurrence) n'est pas nécessairement un plongement.

**Proposition 1.4.** *Une immersion injective et propre d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  est un plongement.*

On rappelle qu'une application est dite propre si la préimage de tout compact est compact. La proposition est une conséquence tautologique du lemme classique suivant.

**Lemme 1.5.** *Soit  $f : X \longrightarrow Y$  une application continue entre espaces métriques. Si  $f$  est propre, c'est un homéomorphisme sur son image.*

DÉMONSTRATION. Il faut montrer que  $f^{-1}$  est continue. On considère une suite  $y_n \longrightarrow y$  dans  $f(X)$ , et les préimages  $x_n$  de  $y_n$  et  $x$  de  $y$ . Comme l'ensemble  $\{y_n\} \cup \{y\}$  est compact, sa préimage  $Z$  est compacte. Comme  $x$  est la seule valeur d'adhérence possible de la suite  $x_n$ , on conclut que  $x_n \longrightarrow x$ . □

### 1.3 Submersions

**Proposition 1.6** (Forme Normale des Submersions). *Soit  $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  une application  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , telle que  $df_{x_0}$  est surjective. Alors  $f$  est une submersion en  $x_0$  c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme local*

$$\psi : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}, (y_0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_0)$$

tel que  $f \circ \psi(y, z) = y$  au voisinage de  $y_0$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\pi$  une projection linéaire d'image  $K := \ker df_{x_0}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . L'application

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto (f(x), \pi(x - x_0)) \in \mathbb{R}^m \times K$$

est un difféomorphisme local en  $x_0$ . On note  $\psi : (\mathbb{R}^m \times K, (y_0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_0)$  son inverse locale.

On a alors  $f \circ \psi(y, k) = y$ . □

### 1.4 Subimmersions

On dit en fait plutôt applications de rang constant. On ne les rencontre pas aussi souvent que les immersions et les submersions.

**Proposition 1.7** (Forme Normale des Subimmersions). *Soit  $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  une application  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , telle que  $df$  est de rang constant ( $k$ ) au voisinage de  $x_0$ . Alors  $f$  est une subimmersion en  $x_0$  c'est à dire qu'il existe des difféomorphisme locaux*

$$\psi : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_0) \quad , \quad \varphi : (\mathbb{R}^m, y_0) \rightarrow (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}, (0, 0))$$

tels que  $\varphi \circ f \circ \psi(y, z) = (y, 0)$  au voisinage de 0.

Dans le cas des immersions et submersions, le rang en  $x_0$  est maximal, ce qui implique qu'il est localement constant. C'est la raison pour laquelle on peut se contenter d'un hypothèse ponctuelle dans ces cas.

DÉMONSTRATION. On considère une projection linéaire  $\pi_K$  sur  $K := \ker df_{x_0}$  et une projection  $\pi_R$  sur l'image  $R$  de  $df_{x_0}$ . On définit alors  $\psi$  comme l'inverse du difféomorphisme local

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto (\pi_R(f(x) - y_0), \pi_K(x - x_0)) \in R \times K.$$

On a alors  $\pi_R \circ f \circ \psi(y, z) = y$ , L'application  $f \circ \psi$  est de la forme

$$R \times K \ni (y_R, z) \mapsto (y_R + g(y_R, z)) \in \mathbb{R}^m$$

où  $g : (R \times K, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  vérifie  $\pi_R \circ g(y_R, z) \equiv 0$ . Autrement dit, si l'on identifie  $\mathbb{R}^m$  au produit  $R \times \ker \pi_R$  et  $g$  (dont le premier facteur est nul) à son second facteur  $(I - \pi_R) \circ g$  :

$$f \circ \psi(y_R, z) = (y_R, g(y_R, z)).$$

On a alors

$$d(f \circ \psi)_{(y_R, z)}(u, v) = (u, \partial_y g(y, z)u + \partial_z g(y, z)v),$$

Comme le rang de cette application linéaire est égal à  $k = \dim R$ , on conclut que  $\partial_z g \equiv 0$ , et donc que  $g$  ne dépend pas de  $z$  :

$$f \circ \psi(y, z) = y + g(y).$$

On pose alors  $\varphi(y) = y - g \circ \pi_R(y)$  soit en coordonnées  $\varphi(y_R, y') = (y_R, y' - g(y_R))$ . □

La première étape de la preuve ci-dessus donne le résultat général suivant :

**Proposition 1.8** (Forme Normale des Applications). Soit  $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^m, y_0)$  une application  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Soit  $R$  l'image de  $df_{x_0}$  et  $F$  un supplémentaire de cette image. Alors il existe un difféomorphisme local

$$\psi : (R \times \mathbb{R}^{n-k}, (0, 0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, x_0),$$

et un application locale  $g : (R \times \mathbb{R}^{n-k}, 0) \longrightarrow (F, 0)$ , tels que  $f \circ \psi(\xi, z) = y_0 + \xi + g(\xi, z)$  au voisinage de 0. En identifiant  $\mathbb{R}^m$  au produit  $R \times F$ , ceci se réécrit

$$f \circ \psi(\xi, z) = y_0 + (\xi, g(\xi, z)).$$

## 2 Sous variétés.

### 2.1 Caractérisations des sous variétés.

Soit  $M$  une partie de  $\mathbb{R}^D$ ,  $x_0$  un point de  $M$ , et  $T$  un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^D$  (de dimension  $d$ ). On dit que  $M$  est une sous variété de classe  $C^r$  tangente à  $T$  en  $x_0$  si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaites :

**Graphe** : Il existe un supplémentaire  $E$  de  $T$  dans  $\mathbb{R}^D$  et une application  $g : (T, 0) \longrightarrow (E, 0)$  de classe  $C^r$  telle que  $dg_0 = 0$  et telle que  $M - x_0$  est localement le graphe de  $g$ . Plus précisément, il existe un voisinage ouvert  $V$  de 0 dans  $T$  tel que le graphe

$$\{x_0 + (x + g(x)), x \in V\},$$

est un ouvert de  $M$ .

**Équation** : Il existe une submersion  $\psi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$  telle que le noyau de  $d\psi(x_0)$  est  $T$  et telle que, localement,  $M = \psi^{-1}(0)$ . Plus précisément, il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  et une submersion  $\psi : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{D-d}, 0)$  de classe  $C^r$  telle que  $M \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}$  et  $\ker d\psi_{x_0} = T$ .

**Redressement** : Il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^D$ , un voisinage ouvert  $V$  de 0 dans  $\mathbb{R}^d$  et un plongement  $C^r$

$$\varphi : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (0, 0))$$

tel que  $\varphi(U \cap M) = V \times \{0\}$  et  $d\varphi_{x_0}(T) = \mathbb{R}^d \times \{0\}$ .

**Paramétrisation** : Il existe un voisinage ouvert  $V$  de 0 dans  $\mathbb{R}^d$  et un plongement  $C^r$

$$\phi : (V, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^D, x_0)$$

dont l'image  $\phi(V)$  est un ouvert de  $M$  (muni de la topologie induite).

**Graphe fort** : Pour tout supplémentaire  $E$  de  $T$  et tout supplémentaire  $F$  de  $E$ , il existe une application  $g : (F, 0) \longrightarrow (E, 0)$  de classe  $C^r$  telle que  $M - x_0$  est localement le graphe de  $g$ , et telle que  $T$  est le graphe de  $dg_0$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\pi$  une projection linéaire sur  $T$ .

Si  $M$  est localement le graphe de  $g : T \longrightarrow E$ , on note  $\pi_T$  et  $\pi_E$  les projections linéaires associées à la décomposition  $\mathbb{R}^D = T \oplus E$ , et on définit  $\psi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow (F, 0)$  par  $\psi(x) = \pi_E(x - x_0) - g \circ \pi_T(x - x_0)$ . On constate que  $d\psi_{x_0} = \pi_E$ , donc  $\psi$  est une submersion en  $x_0$  et  $\ker d\psi_{x_0} = T$ .

Si  $M = \{\psi = 0\}$ , on pose  $\varphi(x) = (\pi_T(x), \psi(x))$ , où  $\pi_T$  est une projection sur  $T$ .

Si  $\varphi(M) = T$ , on pose  $\phi = \varphi|_M^{-1} : T \longrightarrow M$ .

Si  $M = \phi(T)$ , et si  $E$  et  $F$  sont donnés, on remarque que  $\pi_F \circ (\phi - x_0) : (T, 0) \longrightarrow (F, 0)$  est un difféomorphisme local de  $T$  et on pose  $g = \pi_E \circ (\pi_F \circ (\phi - x_0))^{-1}$ .  $\square$

On déduit même de la forme normale des immersions que, si  $\phi$  est une paramétrisation locale de  $M$ , alors il existe un redressement  $\varphi : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (0, 0))$  tel que  $\phi = \varphi|_{\mathbb{R}^d \times \{0\}}$  au voisinage de 0.

On dit que  $M$  est une sous-variété de dimension  $d$  en  $x_0$  si il existe un sous espace  $T$  de dimension  $d$  tel que  $M$  est une sous variété tangente à  $T$  en  $x_0$ . On dit alors que  $T$  est l'espace tangent à  $M$  en  $x_0$ . L'espace tangent  $T$  (et donc la dimension  $d$ ) sont bien déterminés, on le note  $T_{x_0}M$ .

Si  $M$  est à la fois une sous variété tangente à  $T$  est une sous variété tangente à  $\tilde{T}$ , alors  $T = \tilde{T}$ . En effet, si  $T$  et  $\tilde{T}$  sont deux espaces tangents à  $M$  en  $x_0$ , il existe deux redressements  $\varphi : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (0, 0))$  et  $\tilde{\varphi} : (U, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \mathbb{R}^{D-\tilde{d}}, (0, 0))$  de  $M$  tels que  $d\varphi_0(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = T$  et  $d\tilde{\varphi}_0(\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}) = \tilde{T}$ . Comme  $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$  est un difféomorphisme local envoie (localement)  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$  sur  $\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}$ ,  $d\tilde{\varphi}_0 \circ (d\varphi_0)^{-1}$  est un isomorphisme linéaire qui envoie  $\mathbb{R}^d \times \{0\}$  sur  $\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}$ . On en conclut que  $d = \tilde{d}$  et que

$$\tilde{T} = d\tilde{\varphi}_0(\mathbb{R}^{\tilde{d}} \times \{0\}) = d\varphi_0(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = T.$$

On dit que  $M \subset \mathbb{R}^D$  est une sous variété si c'est une sous variété en chacun de ses points. La dimension est alors localement constante. On considérera en général des variétés de dimension constante.

La propriété suivante est évidente, mais bien utile :

**Propriété 2.1.** *Si  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^{D_M}$  et  $N$  une sous variété de  $\mathbb{R}^{D_N}$ , alors  $M \times N$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^{D_M+D_N}$ . De plus,*

$$T_{(x,y)}M \times N = T_xM \times T_yM$$

pour tout  $(x, y) \in N \times M$ .

## 2.2 Applications différentiables entre sous variétés

On notera  $f : (M, x_0) \longrightarrow (N, y_0)$  une application de  $M$  dans  $N$  telle que  $f(x_0) = y_0$ . On utilisera aussi cette notation lorsque  $f$  n'est définie que dans un voisinage de  $x_0$ .

Soit  $M$  une sous variété de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  de  $\mathbb{R}^D$ .

L'application  $f : (M, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$  est dite différentiable (resp. de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq r$ ) en  $x_0$  si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

1. Il existe une paramétrisation locale  $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (M, x_0)$  telle que  $f \circ \phi$  est différentiable (resp.  $C^k$ ).
2. Il existe une fonction différentiable (resp.  $C^k$ )  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f = \tilde{f}|_M$  au voisinage de  $x_0$ .
3. Pour toute paramétrisation locale  $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (M, x_0)$ , la composée  $f \circ \phi$  est différentiable (resp.  $C^k$ ).

DÉMONSTRATION. Montrons que 1.  $\Rightarrow$  2., les autres implications sont claires. On utilise le théorème de forme normale des immersions, qui donne l'existence d'un difféomorphisme local  $\varphi : (\mathbb{R}^D, x_0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}, (x_0, 0))$  tel que  $\varphi \circ \phi(x) = (x, 0)$  ( $\varphi$  est donc un redressement local de  $M$ ). On étend alors  $f$  par  $\tilde{f} := f \circ \pi \circ \varphi^{-1}$ , où  $\pi$  est la projection sur le premier facteur dans  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{D-d}$ .  $\square$

Pour comprendre directement l'équivalence entre 1. et 3. lorsque  $k \leq r$ , il est utile de souligner :

**Propriété 2.2.** *Si  $\tilde{\phi}$  et  $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^D, x_0)$  sont deux paramétrisations locales de  $M$  en  $x_0$ , alors l'application*

$$\phi^{-1} \circ \tilde{\phi} : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, 0).$$

*est un difféomorphisme local de classe  $C^r$ .*

DÉMONSTRATION. On redresse chacune de ces applications injectives (et donc la sous variété  $M$ ) par des difféomorphismes locaux  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  tels que  $\varphi \circ \phi(x) = (x, 0) = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\phi}(x)$ . On a donc  $(\phi^{-1}, 0) = \varphi|_M$  et  $\tilde{\phi}(x) = (\tilde{\varphi}|_{\mathbb{R}^d \times \{0\}})^{-1}(x, 0)$ . Finalement, pour  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$(\phi^{-1} \circ \tilde{\phi}, 0)(x) = \varphi|_M \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, 0) = (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})(x, 0)$$

donc  $\phi^{-1} \circ \tilde{\phi}$ , qui est la première composante de  $(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})|_{\mathbb{R}^d \times \{0\}}$ , est un difféomorphisme local.  $\square$

Une application  $f : (M, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite différentiable (resp.  $C^k$ ) si chacune de ses coordonnées est différentiable.

Si  $N$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{D_N}$ , l'application  $f : (M, x_0) \rightarrow N$  est dite différentiable (resp.  $C^k$ ) si elle l'est en tant qu'application à valeurs dans  $\mathbb{R}^{D_N}$ .

L'application  $f : (M, x_0) \rightarrow (N, y_0)$  est différentiable en  $x_0$  si et seulement si  $\phi^{-1} \circ f$  est différentiable pour toute paramétrisation locale  $\phi$  de  $N$ .

En effet, si  $\phi$  est une paramétrisation locale de  $N$  en  $y_0$ , il existe un redressement  $\varphi$  tel que  $\phi^{-1} = \varphi|_M$ , et donc  $\varphi \circ f = \phi^{-1} \circ f$ . Comme  $\varphi$  est un difféomorphisme,  $f$  est différentiable si et seulement si  $\varphi \circ f$  l'est, et donc si et seulement si  $\phi^{-1} \circ f$  l'est.

**Définition 2.3.** Soit  $f : (M, x_0) \rightarrow N$  une application différentiable en  $x_0$ . Il existe alors une application linéaire  $L : T_{x_0}M \rightarrow \mathbb{R}^{D_N}$  qui est la restriction à  $T_{x_0}M$  de  $d\tilde{f}_{x_0}$  pour n'importe quel prolongement différentiable  $\tilde{f} : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^{D_N}$ . Cette application prend ses valeurs dans  $T_{f(x_0)}N$ . C'est la différentielle de  $f$  en  $x_0$ , on la note

$$df_{x_0} \in \mathcal{L}(T_{x_0}M, T_{f(x_0)}N).$$

Elle est aussi caractérisée par la propriété

$$df_{x_0} \circ d\phi_0 = d(f \circ \phi)_0$$

pour toute paramétrisation locale  $\phi : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \rightarrow (M, x_0)$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\tilde{f}$  un prolongement de  $f$  et  $\phi$  une paramétrisation locale de  $M$ . On a alors  $d\tilde{f}_{x_0} \circ d\phi_0 = d(\tilde{f} \circ \phi)_0 = d(f \circ \phi)_0$ . Comme  $d\phi_0$  est un isomorphisme linéaire entre  $\mathbb{R}^{d_M}$  et  $T_{x_0}M$ , on obtient

$$d\tilde{f}_{x_0}|_{T_{x_0}M} = d(f \circ \phi)_0 \circ (d\phi_0)^{-1}.$$

Cette application linéaire ne dépend donc pas du prolongement  $\tilde{f}$ . Pour montrer qu'elle prend ses valeurs dans  $T_{f(x_0)}N$ , on considère une équation locale  $\psi : (N, f(x_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^{D_N - d_N}, 0)$ . On a alors  $\psi \circ f = 0$  au voisinage de  $x_0$ , donc  $\psi \circ f \circ \phi = 0$  au voisinage de 0, donc  $d\psi_{f(x_0)} \circ d(f \circ \phi)_0 = 0$ . L'application linéaire  $d(f \circ \phi)_0$  prend donc ses valeurs dans  $\ker d\psi_{f(x_0)} = T_{f(x_0)}N$ , il en est donc de même de  $d\tilde{f}_{x_0}|_{T_{x_0}M} = d(f \circ \phi)_0 \circ (d\phi_0)^{-1}$ .  $\square$

La définition par prolongement local implique directement la règle de composition :

**Propriété 2.4.** Si  $f : (M, x_0) \rightarrow (N, y_0)$  et  $g : (N, y_0) \rightarrow (N', z_0)$  sont différentiables (resp.  $C^k$ ) en  $x_0$  et  $y_0$ , alors  $g \circ f$  est différentiable (resp.  $C^k$ ) en  $x_0$  et

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{y_0} \circ df_{x_0}.$$

Si  $\phi : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \rightarrow (M, x_0)$  est une paramétrisation locale de  $M$ , alors son inverse locale  $\phi^{-1} : (M, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{d_M}, 0)$  est différentiable (puisque  $\phi^{-1} \circ \phi = Id$  est différentiable). La paramétrisation  $\phi$  peut donc être vue comme un difféomorphisme local de  $(\mathbb{R}^{d_M}, 0)$  dans  $(M, x_0)$ , c'est à dire une application différentiable admettant une inverse différentiable. On appellera carte de  $M$  en  $x_0$  l'inverse d'une paramétrisation, c'est à dire un difféomorphisme local de  $(M, x_0)$  dans  $(\mathbb{R}^d, 0)$ .

**Propriété 2.5** (Théorème d'inversion local entre variétés). *L'application  $f : (M, x_0) \rightarrow (N, y_0)$  est un difféomorphisme local si et seulement si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

- La différentielle  $df_{x_0}$  est un isomorphisme de  $T_{x_0}M$  dans  $T_{y_0}N$ .
- Pour toutes paramétrisations locales  $\phi_M : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (M, x_0)$  et  $\phi_N : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (N, y_0)$ , la composée  $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  est un difféomorphisme local.

DÉMONSTRATION. La règle de composition implique que  $df_{x_0}$  est un isomorphisme si et seulement si  $d(\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M)_0$  en est un. Au vu du théorème d'inversion locale dans  $\mathbb{R}^d$  les deux propriétés sont donc équivalentes. Il est clair aussi que la seconde propriété est satisfaite si et seulement si  $f$  est un difféomorphisme local.  $\square$

On étend naturellement les notions d'immersions et submersions (et subimmersions) aux sous variétés :

**Définition 2.6** (Immersion). *On dit que l'application  $f : (M, x_0) \rightarrow (N, y_0)$  est une immersion si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

- La différentielle  $df_{x_0}$  est injective de  $T_{x_0}M$  dans  $T_{y_0}N$ .
- Pour toutes paramétrisations locales  $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \rightarrow (M, x_0)$  et  $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \rightarrow (N, y_0)$ , la composée  $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$  est une immersion.
- Il existe des paramétrisations locales  $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \rightarrow (M, x_0)$  et  $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \rightarrow (N, y_0)$  telles que la composée  $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$  est localement une injection linéaire (que l'on peut mettre sous la forme  $x \mapsto (x, 0)$ ).

**Définition 2.7** (Submersion). *On dit que l'application  $f : (M, x_0) \rightarrow (N, y_0)$  est une submersion si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

- La différentielle  $df_{x_0}$  est surjective de  $T_{x_0}M$  dans  $T_{y_0}N$ .
- Pour toutes paramétrisations locales  $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \rightarrow (M, x_0)$  et  $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \rightarrow (N, y_0)$ , la composée  $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$  est une submersion.
- Il existe des paramétrisations locales  $\phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \rightarrow (M, x_0)$  et  $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \rightarrow (N, y_0)$  telles que la composée  $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_M : (\mathbb{R}^{d_M}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{d_N}, 0)$  est localement une surjection linéaire (que l'on peut mettre sous la forme  $(x, y) \mapsto x$ ).

**Propriété 2.8.** *Soit  $M$  une sous variété de  $\mathbb{R}^{D_M}$  de dimension  $d_M$  et  $\psi : (M, x_0) \rightarrow (N, y_0)$  une submersion locale. Alors il existe une submersion locale*

$$\Psi : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \rightarrow N \times \mathbb{R}^{D_M - d_M}$$

telle que  $\Psi(x) = (\psi(x), 0)$  si  $x \in M$ .

DÉMONSTRATION. On considère une extension locale  $\tilde{\psi} : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \rightarrow (N, y_0)$ , une submersion locale  $\varphi : (\mathbb{R}^{D_M}, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{D_M - d_M}, 0)$  donnant une équation locale de  $M$ , et on pose  $\Psi = (\tilde{\psi}, \varphi)$ .  $\square$

**Définition 2.9** (Sous variétés d'une sous variété). *Soit  $M$  une sous variété de  $\mathbb{R}^D$ ,  $N$  une partie de  $M$ , et  $x_0$  un point de  $N$ . on dit que  $N$  est une sous variété de  $M$  en  $x_0$  si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :*

- $N$  est un sous variété de  $\mathbb{R}^D$  en  $x_0$ .
- Il existe une carte de  $M$  en  $x_0$  dont la restriction à  $N$  est un difféomorphisme local à valeurs dans un sous espace vectoriel de  $\mathbb{R}^D$ .
- Il existe un difféomorphisme local

$$\varphi : (\mathbb{R}^D, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^{d_N} \times \mathbb{R}^{d_M - d_N} \times \mathbb{R}^{D - d_M}$$

qui envoie  $N$  sur  $\mathbb{R}^{d_N} \times \{(0, 0)\}$  et  $M$  sur  $\mathbb{R}^{d_N} \times \mathbb{R}^{d_M - d_N} \times \{0\}$ .

DÉMONSTRATION. Le premier point implique le second. Soit  $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^D, x_0)$  une paramétrisation locale de  $N$ . Alors  $\phi_N$ , vue comme application à valeurs dans  $M$ , est aussi une immersion. Il existe donc une carte  $\phi_M : (M, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{d_M}, 0)$  tel que  $\phi_M \circ \phi_N$  prend localement la forme  $x \rightarrow (x, 0)$ , l'image d'un petit voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^{d_N}$  est donc un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^{d_M} \times \{0\}$ .

Le second point implique le troisième. La carte  $\phi_M : M \rightarrow \mathbb{R}^{d_M}$  se prolonge en un redressement  $\varphi_M : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^{d_M} \times \mathbb{R}^{D-d_M}$ . En effet,  $\phi_M^{-1}$  est une immersion à valeurs dans  $\mathbb{R}^D$ , et le théorème de forme normale des immersions donne un difféomorphisme local  $\varphi_M : (\mathbb{R}^D, 0) \rightarrow \mathbb{R}^{d_M} \times \mathbb{R}^{D-d_M}$  tel que  $\varphi_M \circ \phi_M^{-1}(x) = (x, 0)$ , ce qui signifie que  $\phi_M = \varphi_M|_M$ .  $\square$

Lorsque  $N$  est une sous variété de  $M$  en  $x_0$  on a naturellement  $T_{x_0}N \subset T_{x_0}M$ .

Si  $N$  est une sous variété de  $M$ , alors l'inclusion de  $N$  dans  $M$  est un plongement (sa différentielle est l'inclusion de  $T_{x_0}N$  dans  $T_{x_0}M$ ). Réciproquement :

**Propriété 2.10.** *L'image  $J(N)$  d'un plongement  $J : N \rightarrow M$  est une sous variété de  $M$ .*

DÉMONSTRATION. Pour tout  $x_0 \in N$  et  $y_0 = J(x_0)$ , il existe une carte locale  $\phi_M : (M, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{d_M} \times \mathbb{R}^{d_M-d_N}, 0)$  et une paramétrisation locale  $\phi_N : (\mathbb{R}^{d_N}, 0) \rightarrow (N, x_0)$  telle que  $\phi_M \circ J \circ \phi_N^{-1}(x) = (x, 0)$ . Soit  $\Omega$  le domaine de  $\phi_N$ , qui est un ouvert contenant 0. Son image  $\phi_N(\Omega)$  est alors un voisinage ouvert de  $x_0$  dans  $N$ . Comme  $J$  est un homéomorphisme sur son image,  $U := J(\phi_N(\Omega))$  est un voisinage de  $y_0$  dans  $J(N)$ . Il existe donc un voisinage  $V$  de  $y_0$  dans  $M$ , contenu dans le domaine de la carte  $\phi_M$ , et tel que  $J(N) \cap V = U$ . On a donc

$$\phi_M(U) = \phi_M \circ J \circ \phi_N(\Omega) = \Omega \times \{0\}.$$

$\square$

Il est facile de vérifier que la proposition 1.4 reste vraie dans un contexte plus général :

**Proposition 2.11.** *Si  $J : N \rightarrow M$  est une immersion injective et propre, alors c'est un plongement et son image  $J(N)$  est une sous variété de  $M$ .*

La propriété n'est pas une condition nécessaire. En fait, on a :

**Proposition 2.12.** *L'image  $J(N)$  du plongement  $J : N \rightarrow M$  est fermée si et seulement si  $J$  est propre.*

DÉMONSTRATION. Si  $J(N)$  est fermée, alors pour tout compact  $K$  de  $M$ , l'intersection  $K \cap J(N)$  est compacte. Comme  $J$  est un homéomorphisme sur son image,  $J^{-1}(K) = J^{-1}(K \cap J(N))$  est alors compacte, c'est à dire que  $J$  est propre.

Si  $J$  est propre, considérons une suite  $y_n = J(x_n)$  dans  $M$ , qui converge vers une limite  $y$ . La propriété de  $J$  implique que la suite  $x_n$  admet une valeur d'adhérence  $x$ . On a alors  $J(x) = y$  et donc  $y \in J(N)$ .  $\square$

Si  $\psi : M \rightarrow N$  est une submersion en chaque point, alors pour tout  $y_0 \in N$  la préimage  $\psi^{-1}(y_0)$  est une sous variété de  $M$ , de dimension  $d_M - d_N$ . En fait, il suffit pour ceci que  $\psi$  soit une submersion en chaque point de  $\psi^{-1}(y_0)$ . On dit alors que  $y_0$  est une valeur régulière de  $\psi$ .

**Définition 2.13.** *On dit que  $x_0 \in M$  est un point critique de  $\psi : M \rightarrow N$  si  $d\psi_{x_0}$  n'est pas surjective. On dit que  $y_0 \in N$  est une valeur critique de  $\psi$  si il existe un point critique  $x_0 \in M$  tel que  $\psi(x_0) = y_0$ . Les points de  $N$  qui ne sont pas des valeurs critiques sont dits valeurs régulières.*

En particulier, les points qui n'appartiennent pas à l'image  $\psi(M)$  sont des valeurs régulières.

Soit  $N$  une sous variété de dimension  $d_N$  et  $B$  la boule ouverte de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^{d_N}$ . On dit qu'une partie  $A \subset N$  d'une sous variété  $N$  est de mesure nulle si, pour tout plongement  $\varphi$  de  $B$  dans  $N$ , la préimage  $\varphi^{-1}(A)$  est de mesure nulle dans  $\mathbb{R}^{d_N}$ .

**Théorème 2.14** (Sard). *Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable. Si  $f$  est  $C^\infty$ , alors l'ensemble des valeurs singulières de  $f$  est de mesure nulle dans  $N$ . Le résultat est vrai si  $f$  est de classe  $C^r$  avec  $r \geq 1$  et  $r \geq 1 + d_M - d_N$ .*

DÉMONSTRATION. La preuve est assez difficile. On se limite ici au cas facile  $d_M \leq d_N$ . Au vu des définitions, il suffit de montrer le résultat lorsque  $N = \mathbb{R}^{d_N}$ . On note  $\Sigma$  l'ensemble des points critiques de  $f$ .

On dit que  $K \subset M$  est un cube plongé si il existe une carte  $\phi$ , définie au voisinage de  $\bar{\Omega}$ , telle que  $\phi(K) = [0, 1]^{d_M}$ . On va montrer que  $f(\Sigma \cap K)$  est de mesure nulle pour tout cube plongé  $K$ . Comme les intérieurs des cubes plongés recouvrent  $M$ , le Lemme 2.17 implique que  $M$  est recouvert par une famille dénombrable de cubes plongés. On conclut que  $f(\Sigma)$  est une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, et donc qu'il est de mesure nulle.

**Cas  $d_M < d_N$ .** On a alors  $\Sigma = M$ .

**Lemme 2.15.** *Il existe une constante  $C > 0$  ayant la propriété suivante : Tout cube  $X$  de coté  $1/k$  contenu dans  $[0, 1]^{d_M}$  vérifie*

$$\text{Vol}(f \circ \phi^{-1}(X)) \leq Ck^{-(1+d_M)},$$

où  $\text{Vol}$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^{d_N}$ .

DÉMONSTRATION. Comme  $df$  est borné sur  $[0, 1]^{d_M}$ , l'image du cube est contenu dans une boule de  $\mathbb{R}^{d_N}$  de rayon au plus  $C/k$ . Ceci implique que son volume est majoré par  $Ck^{-d_N} \leq Ck^{-(1+d_M)}$ .

□

Comme on peut recouvrir le cube  $K$  par  $k^{d_M}$  cubes de coté  $1/k$ , on conclut du Lemme que

$$\text{Vol}(f(K)) = \text{Vol}(f \circ \phi^{-1}([0, 1]^{d_M})) \leq k^{d_M} Ck^{-(1+d_M)} = C/k.$$

Comme ceci est vrai pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $\text{Vol}(f(K)) = 0$ , ce qui termine la preuve dans le cas  $d_M < d_N$ .

**Cas  $d_M = d_N$ .** On remarque que les points critiques de  $f \circ \phi^{-1}$  sont les points de  $\phi(\Sigma)$ .

**Lemme 2.16.** *Il existe un module de continuité  $\epsilon$  ayant la propriété suivante : Tout cube  $X$  de coté  $1/k$  contenu dans  $[0, 1]^{d_M}$  et contenant un point critique de  $f \circ \phi^{-1}$  vérifie :*

$$\text{Vol}(f \circ \phi^{-1}(X)) \leq k^{-d_M} \epsilon(1/k).$$

Ce Lemme permet de conclure dans le cas  $d_M = d_N$  exactement comme ci-dessus. On recouvre  $\phi(\Sigma \cap K)$  par au plus  $k^{d_M}$  cubes de coté  $1/k$  intersectant  $\phi(\Sigma)$ . L'image par  $f \circ \phi^{-1}$  de l'union de ces cubes, qui contient  $f(K \cap \Sigma)$ , a donc un volume majoré par  $\epsilon(1/k)$ . Le volume de  $f(K \cap \Sigma)$  est donc majoré par  $\epsilon(1/k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il est donc nul.

DÉMONSTRATION. Soit  $x_0 \in X$  un point critique de  $f \circ \phi^{-1}$ . Soit  $R$  l'image de l'application linéaire  $L := d(f \circ \phi^{-1})_{x_0}$ , c'est un sous espace vectoriel strict de  $\mathbb{R}^{d_N}$ . Soit  $\rho$  un module de continuité de  $d(f \circ \phi^{-1})$  sur  $[0, 1]^{d_M}$ . Pour tout  $x \in X$ , on a

$$f \circ \phi^{-1}(x) - f \circ \phi^{-1}(x_0) - L(x - x_0) = \int_0^1 (d(f \circ \phi^{-1})_{x_0+t(x-x_0)} - L) \cdot (x - x_0) dt$$

donc

$$|f \circ \phi^{-1}(x) - f \circ \phi^{-1}(x_0) - L(x - x_0)| \leq |x - x_0| \rho(|x - x_0|).$$

Comme le diamètre de  $X$  est  $\sqrt{n}/k$ , on conclut que  $f \circ \phi^{-1}(X)$  est contenu dans une bande de largeur  $\sqrt{d_M}/k \rho(\sqrt{d_M}/k)$  autour de l'espace affine  $x_0 + R$ . Comme  $d(f \circ \phi^{-1})$  est borné sur  $[0, 1]^{d_M}$ , cette image  $f \circ \phi^{-1}(X)$  est aussi contenue dans une boule de rayon  $C/k$  autour de  $x_0$ . Son volume est donc majoré par  $Ck^{-d_M} \rho(\sqrt{d_M}/k)$ . Ceci conclut la preuve du Lemme et du théorème 2.14.  $\square$

**Lemme 2.17.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique séparable. Tout recouvrement ouvert de  $X$  admet un sous-recouvrement dénombrable (on dit que  $X$  a la propriété de Lindelöf).*

DÉMONSTRATION. Considérons une partie dénombrable dense de  $Y \subset X$ , et appelons boule rationnelle toute boule ouverte de  $X$  centrée sur  $Y$  et de rayon rationnel. L'ensemble des boules rationnelles est donc dénombrable. Si  $\mathcal{U}$  est un recouvrement ouvert de  $X$ , alors l'ensemble  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$  des boules rationnelles contenues dans des ouverts de  $\mathcal{U}$  est un recouvrement ouvert dénombrable de  $X$ . A chaque boule  $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ , on peut associer un ouvert  $U_B \in \mathcal{U}$  qui la contient. L'ensemble  $\{U_B, B \in \mathcal{B}_{\mathcal{U}}\}$  est un sous-recouvrement dénombrable de  $\mathcal{U}$ .  $\square$

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable, et soit  $Z$  une sous variété de  $N$ . Si chaque point de  $N$  est une valeur régulière de  $f$ , alors  $f^{-1}(Z)$  est une sous variété de  $M$ . La restriction de  $f$  à  $f^{-1}(Z)$  est de plus une submersion en chaque point.

La propriété que  $f^{-1}(Z)$  est une sous variété de  $M$  reste vraie sous la condition plus générale que  $f$  est transverse à  $Z$  :

**Définition 2.18.** *L'application différentiable  $f : M \rightarrow N$  est dite transverse à la sous variété  $Z \subset N$  si, pour tout point  $x \in f^{-1}(Z)$ , on a l'égalité*

$$T_{f(x)}N = T_{f(x)}Z + df_x(T_xM).$$

**Proposition 2.19.** *Si  $f : M \rightarrow N$  est transverse à  $Z$ , alors  $f^{-1}(Z)$  est une sous variété de  $M$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $x$  un point de  $f^{-1}(Z)$ . Considérons une submersion  $g : N \rightarrow \mathbb{R}^d$ , définie au voisinage de  $f(x)$ , et telle que  $Z$  est localement défini par l'équation  $g = 0$ . L'application  $g \circ f$  est alors une submersion en  $x$ , qui donne localement l'équation de  $f^{-1}(Z)$ . Vérifions que  $g \circ f$  est une submersion en  $x$ , c'est à dire que  $dg_{f(x)} \circ df_x$ . La transversalité de  $f$  en  $x$  se réécrit  $df_x(T_xM) + \ker dg_{f(x)} = T_{f(x)}N$ . L'image de  $dg_{f(x)} \circ df_x$  est donc la même que celle de  $dg_{f(x)}$ .  $\square$

**Exercice 2.1.** *Soit  $M$  et  $N$  deux sous variétés de  $X$  en  $x_0$ . Supposons que  $M$  et  $N$  sont transverses en  $x_0$ , au sens que  $T_{x_0}M + T_{x_0}N = T_{x_0}X$ . Alors  $M \cap N$  est une sous variété en  $x_0$ , tangente à  $T_{x_0}M \cap T_{x_0}N$ .*

## 3 Exemples

### 3.1 Sphères

Toutes les valeurs non nulles de l'application  $x \rightarrow |x|^2$  sont régulières. La sphère unité

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|^2 = 1\}$$

est donc une sous variété de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Son espace tangent au point  $\theta$  est l'orthogonal de  $\theta$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ , puisque la fonction  $x \mapsto |x|^2$  a pour différentielle en  $\theta$  la forme  $x \mapsto 2\langle \theta, x \rangle$ .

L'application  $(r, \theta) \mapsto r\theta$  est un difféomorphisme entre  $]0, \infty[ \times S^1$  et  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  (c'est une version des coordonnées polaires). Son inverse est donnée explicitement par  $x \mapsto (|x|, x/|x|)$ .

### 3.2 Tores

Le produit  $M \times N$  de deux sous-variétés (de  $\mathbb{R}^{D_M}$  et  $\mathbb{R}^{D_N}$ ) est une sous variété de  $\mathbb{R}^{D_N+D_M}$ , et on a l'identification

$$T_{(x,y)}N \times M = T_x N \times T_y M.$$

Par exemple, le produit  $S^1 \times S^1$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^4$ , le tore de dimension 2. Plus généralement, le tore  $\mathbb{T}^n$  est défini comme le produit de  $n$  facteurs  $S^1$ . C'est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

On peut aussi plonger le tore  $\mathbb{T}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ , en formant l'image classique de "chambre à air". On écrit pour ceci  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , on se souvient que  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ , et, pour un point  $\theta \in S^1$ , on note  $(\theta_1, \theta_2)$  ses coordonnées en tant qu'élément de  $\mathbb{R}^2$ . Fixant  $a \in ]0, 1[$ , on plonge  $S^1 \times S^1$  par l'application

$$J(\theta, \varphi) = ((1 + a\varphi_1)\theta, a\varphi_2).$$

La différentielle de  $J$ , vue comme une application de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$ , en un point  $(\theta, \varphi) \in S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  est donc l'application linéaire

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y_1, y_2) \mapsto ((1 + a\varphi_1)x + a\theta y_1, ay_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}.$$

Son noyau est la droite de  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dirigée par le vecteur  $V(\theta, \varphi) = (-a\theta, 1 + a\varphi_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Pour vérifier que  $J$  est une immersion sur  $S^1 \times S^1$ , il suffit de vérifier que le vecteur  $V(\theta, \varphi)$  n'est jamais tangent à  $S^1 \times S^1$  en  $(\theta, \varphi) \in S^1 \times S^1$ , puisque  $-a\theta$  n'est pas orthogonal à  $S^1$  (rappelons que  $\theta$ , qui appartient à  $S^1$ , est non nul).

Comme  $S^1 \times S^1$  est compact, il suffit de vérifier que l'immersion  $J$  est injective pour conclure que c'est un plongement (dont l'image est donc une sous variété de  $\mathbb{R}^3$  difféomorphe à  $S^1 \times S^1$ ). Si  $J(\theta, \varphi) = J(\theta', \varphi')$ , alors  $\varphi_2 = \varphi'_2$ , et de plus

$$1 + a\varphi_1 = |(1 + a\varphi_1)\theta| = |(1 + a\varphi'_1)\theta'| = 1 + a\varphi'_1$$

donc  $\varphi = \varphi'$ . On voit alors que  $\theta = \theta'$ .

Il y a une autre façon de procéder. On remarque que l'application  $F : (x_1, x_2) \mapsto (e^{ix_1}, e^{ix_2})$  est un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{T}^2$ . En conséquence, l'application  $J : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une immersion différentiable si et seulement si  $J \circ F$  est une immersion différentiable. On écrit alors

$$J \circ F(x_1, x_2) = ((1 + a \cos x_2) \cos x_1, (1 + a \cos x_2) \sin x_1, a \sin x_2)$$

et on calcule la matrice de la différentielle de  $J \circ F$

$$\begin{bmatrix} -(1 + a \cos x_2) \sin x_1 & -a \sin x_2 \cos x_1 \\ (1 + a \cos x_2) \cos x_1 & -a \sin x_2 \sin x_1 \\ 0 & a \cos x_2 \end{bmatrix}.$$

Comme le coefficient  $(1 + \cos x_2)$  est non nul, cette matrice est de rang 2 en tout point où  $\cos x_2 \neq 0$ . Si  $\cos x_2 = 0$ , alors  $\sin x_2 = \pm 1$ , et le de bloc supérieur est inversible, puisque

$$\det \begin{bmatrix} -\sin x_1 & -a \sin x_2 \cos x_1 \\ \cos x_1 & -a \sin x_2 \sin x_1 \end{bmatrix} = \sin x_2 \neq 0.$$

### 3.3 Groupes de Matrices

Notons  $M_n(\mathbb{R})$  (ou  $M_n$ ) l'ensemble des matrices réelles carrées de taille  $n$ , que l'on identifie à  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Le groupe  $Gl_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $M_n(\mathbb{R})$  donc une sous variété de dimension maximale  $n^2$ . Les opérations de groupes  $(M, N) \mapsto MN$  et  $M \mapsto M^{-1}$  sont différentiables. Concernant l'inversion, on rappelle le calcul classique  $(M + N)^{-1} = (M(I + M^{-1}N)^{-1}) = (I + M^{-1}N)^{-1}M^{-1} = (I - M^{-1}N + o(N))M^{-1} = I - M^{-1}NM^{-1} + o(N)$  dont on déduit que l'application  $M \mapsto M^{-1}$  est différentiable, et que sa différentielle en  $M$  est l'application linéaire  $N \mapsto M^{-1}NM^{-1}$ .

Notons  $M_n^s(\mathbb{R})$  et  $M_n^a(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques. Ce sont des espaces vectoriels que l'on identifie à  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  et  $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ .

Le groupe  $O_n(\mathbb{R})$  des matrices orthogonales est une sous-variété de  $M_n(\mathbb{R})$ , son espace tangent en l'identité est  $M_n^a(\mathbb{R})$ . Les opérations de groupe, qui sont les restrictions de celles de  $Gl_n(\mathbb{R})$ , sont donc différentiables. Pour montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  est une sous variété, il suffit de montrer que l'identité est une valeur régulière de l'application  $M_n(\mathbb{R}) \ni M \mapsto {}^tMM \in M_n^s(\mathbb{R})$ . La différentielle en  $M$  de cette application est

$$d : N \mapsto {}^tMN + {}^tNM.$$

En  $M = Id$ , c'est donc  $N \mapsto N + {}^tN$ , qui est surjective sur  $M_n^s(\mathbb{R})$ , et de noyau  $M_n^a(\mathbb{R})$ . Le groupe  $O_n(\mathbb{R})$  est donc une sous variété au voisinage de l'identité, tangente à  $M_n^a(\mathbb{R})$ . En un autre point  $M$  de  $O_n(\mathbb{R})$ , on constate que le noyau de  $d$  est  $M \cdot M_n^a(\mathbb{R})$  (produit à gauche par la matrice  $M$ ). Ceci implique que  $d$  est surjective, et donc que  $O_n(\mathbb{R})$  est une sous variété en  $M$  tangente à  $M \cdot M_n^a(\mathbb{R})$ . On aurait aussi pu conclure ceci directement en constatant que la multiplication par  $M$  est un difféomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$  qui préserve  $O_n(\mathbb{R})$  et qui envoie  $I$  sur  $M$ .

Le groupe  $SO_n(\mathbb{R})$  des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 est aussi une sous variété. En fait, c'est la composante connexe de l'identité dans  $O_n(\mathbb{R})$ .

Remarquons pour terminer que  $SO_2(\mathbb{R})$  est difféomorphe à  $S^1$ . On constate en effet que le groupe  $SO_2(\mathbb{R})$  des rotations du plan préserve le cercle  $S^1$ . On considère alors l'application différentiable

$$SO_2(\mathbb{R}) \ni R \rightarrow R(1, 0) \in S^1.$$

Cette application est bijective, donc, puisque  $SO_2(\mathbb{R})$  est compact, c'est un difféomorphisme. Ce difféomorphisme permet de munir le cercle  $S^1$  d'une structure de groupe commutatif ( $SO_2(\mathbb{R})$  l'est). L'application

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & \sin 2\pi\theta \\ -\sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix}$$

est une paramétrisation globale (un difféomorphisme local surjectif) de  $SO_2$ , qui est aussi un morphisme de groupe. Il en est de même de l'application  $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) \in S^1$ . Ces applications permettent d'identifier  $SO_2$  et  $S^1$  à  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  en tant que groupe. On verra plus tard que l'on peut aussi munir intrinsèquement  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  d'une structure de variété, difféomorphe à  $SO_2$  et à  $S^1$ .

**Exercice 3.1.** Montrer que l'application  $\mathbb{T}^2 \ni (\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_2 - \theta_1 \in S^1$  est une submersion.

### 3.4 Matrices de rang fixé

Soit  $k \leq \min(n, m)$  et soit  $N_k(n, m) \subset M_{n,m}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices de rang  $k$ . Alors  $N_k(n, m)$  est une sous variété de  $M_{n,m}(\mathbb{R})$ , de dimension  $k(n + m - k)$  (Il faut prendre garde toutefois au fait que la fermeture  $\bar{N}_k(n, m)$ , constituée des matrices de rang inférieur à  $k$ , n'est pas une sous variété. En particulier, le complémentaire de  $Gl_n(\mathbb{R})$  n'est pas une sous variété, mais c'est une union finie de sous-variétés.)

Comme les permutations de lignes ou de colonnes sont des isomorphismes de  $M_{n,m}(\mathbb{R})$  qui préservent  $N_k(n, m)$ , il suffit de démontrer que  $N_k(n, m)$  est une sous variété au voisinage d'une matrice qui s'écrit par blocs

$$X_0 = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix}$$

où  $A_0$  est un bloc  $k \times k$  inversible. Toute matrice  $X$  proche de  $X_0$  s'écrit alors  $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$  avec un bloc  $A$  inversible. En multipliant à gauche la matrice  $X$  par la matrice inversible  $O = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}$ , on obtient

$$OX = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B. \end{bmatrix}$$

La matrice  $A$  est donc de rang  $k$  si et seulement si  $D = CA^{-1}B$ . L'ensemble  $N_k(n, m)$  est donc localement un graphe de codimension  $(n-k)(m-k)$ , c'est à dire de dimension  $nm - (n-k)(m-k) = k(n+m-k)$ . En supposant par exemple que  $m < n$ , la sous variété  $N_{m-1}(m, n)$  est donc de codimension  $n - m + 1$ .

On peut traiter de manière similaire le cas des matrices symétriques. Soit  $N_k^s(n)$  le sous ensemble de  $S_n(\mathbb{R})$  (les matrices symétriques  $n \times n$ ) constitué des matrices de rang  $k$ . Toute matrice  $X_0$  de  $N_k^s(n)$  se diagonalise dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice orthonormée  $O$  telle que  $O^t X_0 O$  s'écrit par blocs  $Y_0 = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  avec un bloc  $A_0$  de taille  $k \times k$  inversible.

Comme l'application  $X \mapsto O^t X O$  est un isomorphisme de  $S_n(\mathbb{R})$  qui préserve  $N_k^s(n)$ , il suffit de montrer que  $N_k^s$  est une sous variété au voisinage de  $Y_0$ . On montre exactement comme ci-dessus qu'un matrice symétrique  $\begin{bmatrix} A & B \\ B^t & D \end{bmatrix}$  proche de  $Y_0$  est de rang  $k$  si et seulement si  $D = B^t A^{-1} B$ .

L'ensemble  $N_k^s(n)$  est donc localement un graphe de codimension  $k(k+1)/2$ .

Pour se représenter un peu plus concrètement les choses, on peut considérer l'ensemble  $S_2(\mathbb{R})$  des matrices symétriques  $2 \times 2$ . On l'identifie à  $\mathbb{R}^3$  en écrivant ses éléments sous la forme  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ . Les matrices non inversibles sont celles qui satisfont l'équation  $b^2 = ac$ , qui est l'équation d'un cône dans  $\mathbb{R}^3$ . Ce cône est une sous variété sauf au point  $(0, 0, 0)$ , qui en est une singularité. Le complémentaire de cette singularité correspond exactement aux matrices de rang 1.

### 3.5 Grassmaniennes

Soit  $G(k, n)$  l'ensemble des sous-espaces de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ . Pour écrire  $G(k, n)$  comme une sous-variété, on identifie chaque sous-espace à la projection orthogonale dont il est l'image. On a donc  $G(k, n) \subset M_n^s(\mathbb{R})$ . Les projections orthogonales, dans  $M_n^s(\mathbb{R})$  sont les matrices vérifiant l'équation  $M^2 = M$ .

L'entier  $k$  étant fixé, on considère la décomposition  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ , et on décompose les matrices de  $M_n(\mathbb{R})$  (et donc de  $G(k, n)$ ) par blocs suivant cette décomposition. La matrice

$$I_k := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est un élément de  $G(k, n)$ . L'ensemble  $H(k, n)$  des éléments de  $G(k, n)$  qui s'écrivent  $M = \begin{bmatrix} A & B^t \\ B & C \end{bmatrix}$  avec un bloc  $A$  inversible constitue un voisinage ouvert de  $I_k$  dans  $G(k, n)$ . On remarque que, comme le rang est  $k$ , on a nécessairement  $C = BA^{-1}B^t$  dans la matrice ci-dessus et que l'image de  $M$  est celle de la matrice  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ . Autrement dit,  $M$  est la projection orthogonale sur le graphe de  $L := BA^{-1} \in M_{n-k, k}(\mathbb{R})$ .

Réciproquement, pour  $L \in M_{n-k, k}(\mathbb{R})$ , on peut chercher une expression pour la projection orthogonale sur le graphe de  $L$  de la forme  $\Pi_L = \begin{bmatrix} A & AL^t \\ LA & LAL^t \end{bmatrix}$ , avec une matrice symétrique  $A$ .

L'équation  $\Pi_L \circ \Pi_L$  implique que  $A(I + L^t L)A = A$ . Cette équation est satisfaite pour  $A = (I + L^t L)^{-1}$ , (la matrice  $(I + L^t L)$  est définie positive donc inversible) et on vérifie effectivement que

$$\Pi_L := \begin{bmatrix} (I + L^t L)^{-1} & (I + L^t L)^{-1} L^t \\ L(I + L^t L)^{-1} & L(I + L^t L)^{-1} L^t \end{bmatrix},$$

vérifie  $\Pi_L^2 = \Pi_L$ , et donc est la matrice de la projection orthogonale sur le graphe de  $L$ .

L'application  $\Pi : L \mapsto \Pi_L$  est une application  $C^\infty$  de  $M_{n-k,k}(\mathbb{R})$  dans  $M_n^s(\mathbb{R})$ , à valeurs dans  $H(k, n)$ . En notant  $\Gamma$  l'application  $\begin{bmatrix} A & B^t \\ B & C \end{bmatrix} \mapsto BA^{-1}$  (définie sur l'ouvert de  $M_n^s(\mathbb{R})$  des matrices dont le bloc  $A$  est inversible), on constate que  $\Gamma \circ \Pi(L) = L$ , ce qui implique que  $\Pi$  est un plongement de  $M_{n-k,k}(\mathbb{R})$  dans  $M_n^s(\mathbb{R})$ , dont l'image est égale à  $H(k, n)$ . En conséquence,  $H(k, n)$  est un sous variété, c'est à dire que  $G(k, n)$  est une sous variété en chaque point de  $H(k, n)$ . L'espace tangent à  $G(k, n)$  au point  $I_k$  est l'image de l'application linéaire

$$M_{n-k,k} \ni \ell \mapsto d\Pi_{I_k} \cdot \ell = \begin{bmatrix} 0 & \ell^t \\ \ell & 0 \end{bmatrix}.$$

Comme tout point  $M_0$  de  $G(k, n)$  peut s'écrire sous la forme  $M_0 = OI_k O^{-1}$  pour une matrice  $O \in O_n(\mathbb{R})$ , et que l'application  $L \mapsto OLO^{-1}$  est un isomorphisme de  $M_n^s(\mathbb{R})$  qui préserve  $G(k, n)$ , on conclut que  $G(k, n)$  est une sous variété en  $M_0$ . On a donc montré que  $G(k, n)$  est une sous-variété de  $M_n^s(\mathbb{R})$ .

On peut représenter les éléments de  $G(k, n)$  comme images de matrices  $n \times k$  de rang  $k$ . Nous avons vu que l'ensemble  $N_k(n, k)$  de ces matrices est un ouvert de  $M_{n,k}(\mathbb{R})$ . L'application qui, à une matrice  $M \in N_k(n, k)$ , associe la projection orthogonale sur son image est une submersion surjective de  $N_k(n, k)$  dans  $G(k, n)$ . En effet, sur l'ouvert des matrices qui s'écrivent  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  avec un bloc  $A$  inversible, cette application s'écrit

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \mapsto BA^{-1}$$

dans la carte  $H(k, n)$ , on vérifie facilement que c'est une submersion sur cet ouvert dont l'image est  $H(k, n)$ .

Étant donnée une matrice quelconque  $M_0 \in N_k(n, k)$ , on peut écrire  $M_0 = O \begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \end{bmatrix}$  avec un bloc  $A$  inversible. Comme  $F(OM) = OF(M)O^{-1}$ , ceci implique que  $F$  est une submersion au voisinage de  $M_0$ .

La donnée  $E(x)$  d'un élément de  $G(k, n)$  pour chaque  $x \in \mathbb{R}^d$  est donc une application de classe  $C^r$  au voisinage de 0 si et seulement si il existe des applications  $V_1(x), \dots, V_k(x) : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^r$ , telles que  $E(x)$  est l'espace engendré par les vecteurs  $V_i(x)$  pour tout  $x$  dans un voisinage de 0.

En particulier, si  $M$  est une sous variété de classe  $C^r$  de  $\mathbb{R}^D$ , alors l'application

$$M \ni x \mapsto T_x M \in G(d, D)$$

est de classe  $C^{r-1}$ .

Il y a une autre façon naturelle de représenter la Grassmannienne  $G(k, n)$ . On considère pour ceci l'espace  $N_{n-k}(n-k, n)$  des matrices  $n-k \times k$  de rang maximal, qui est un ouvert de  $M_{n-k,n}(\mathbb{R})$ . Le noyau d'une matrice  $M \in N_{n-k}(n-k, n)$  est un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ , que l'on identifie donc à un élément de  $G(k, n)$ . L'application  $K$  qui à une matrice associe son noyau est une submersion surjective de  $N_{n-k}(n-k, n)$  dans  $G(k, n)$ . On se ramène en fait à la paramétrisation

précédente en remarquant que, en tant que sous espaces,  $K(M) = R(M^t)^\perp$  donc, en tant que projecteur,

$$K(M) = I - R(M^t).$$

La donnée  $E(x)$  d'un élément de  $G(k, n)$  pour  $x \in \mathbb{R}^d$  et donc une application de classe  $C^r$  au voisinage de 0 si et seulement si il existe des applications  $P_1(x), \dots, P_{n-k}(x) : (\mathbb{R}^d, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ , de classe  $C^r$ , telles que  $E(x)$  est déterminé par les équations

$$E(x) = \{v \in \mathbb{R}^n : P_1(x) \cdot v = P_2(x) \cdot v = \dots = P_{n-k}(x) \cdot v = 0\}$$

pour  $x$  proche de 0.

**Propriété 3.1.** Si  $E_0$  et  $F_0$  sont des éléments de  $G(k, n)$  et  $G(l, n)$  tels que  $E_0 \cap F_0 = \{0\}$ , alors l'application

$$G(k, n) \times G(l, n) \ni (E, F) \longmapsto E + F \in G(k + l, n)$$

est  $C^\infty$  au voisinage de  $(E_0, F_0)$ .

Pour le montrer, on considère des applications locales  $V_1(E), \dots, V_k(E) : G(k, n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$  telles que  $E$  est engendré par les  $V_i(E)$  si  $E$  est proche de  $E_0$ , et des applications locales  $W_1(F), \dots, W_l(F) : G(l, n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$  telles que les vecteurs  $W_i(F)$  engendrent  $F$  si  $F$  est proche de  $F_0$ . L'espace  $E + F$  est alors engendré par les vecteurs

$$V_1(E), \dots, V_k(E), W_1(F), \dots, W_l(F)$$

c'est donc une fonctions  $C^\infty$  de  $E$  et  $F$ . De la même façon :

**Propriété 3.2.** Si  $E_0$  et  $F_0$  sont des éléments de  $G(k, n)$  et  $G(l, n)$  tels que  $E_0 + F_0 = \mathbb{R}^n$  (on dit que  $E_0$  et  $F_0$  sont transverses), alors l'application

$$G(k, n) \times G(l, n) \ni (E, F) \longmapsto E \cap F \in G(k + l - n, n)$$

est  $C^\infty$  au voisinage de  $(E_0, F_0)$ .

La preuve est identique à la précédente en remplaçant les vecteurs  $V_i(E)$  engendrant les espaces par des équations  $P_i(E)$  déterminant les espaces.

**Exercice 3.2.** Soit  $E_0 \in G(k, n)$  et  $L_0 \in M_{k,n}(\mathbb{R})$ . Supposons que  $L_0|_{E_0}$  est un isomorphisme. Alors, pour  $E$  proche de  $E_0$  et  $L$  proche de  $L_0$  l'application  $L_E$  est un isomorphisme, et il existe une (unique) application locale

$$S(L, \pi) : M_{k,n}(\mathbb{R}) \times G(k, n) \longrightarrow M_{n,k}(\mathbb{R}),$$

de classe  $C^\infty$  telle que  $L \cdot S(L, \pi) = Id$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $G(\pi)$  une équation locale de  $\pi$  au voisinage de  $\pi_0$ , c'est à dire une application  $C^\infty$  locale

$$G : G(k, n) \longrightarrow M_{n,n-k}(\mathbb{R})$$

telle que  $\pi$  est le noyau de  $G(\pi)$ . L'application linéaire  $(L_0 \circ \pi_0, G(\pi_0))$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ . Il en est donc de même de  $(L \circ \pi, G(\pi))$ , qui envoie  $\pi$  sur  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ , et l'inverse

$$R(L, \pi) := (L \circ \pi, G(\pi))^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}^n)$$

est une application  $C^\infty$  de  $\pi$  et  $L$  au voisinage de  $(L_0, \pi_0)$ . La restriction  $S(L, \pi)$  de  $R(L, \pi)$  à  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$  a pour image  $\pi$ , et elle vérifie

$$L \circ S(L, \pi)(x) = L \circ \pi \circ R(L, \pi)(x, 0) = x.$$

□

L'ensemble  $G(1, n)$  est appelé espace projectif de dimension  $n-1$ , noté aussi  $\mathbb{R}P^{n-1}$ . Nous l'avons défini comme une sous variété de  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ . On a une submersion surjective  $\pi$  de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  dans  $\mathbb{R}P^n$  qui, à tout vecteur non nul  $(v_1, \dots, v_{n+1})$  associe la droite dirigée par ce vecteur. L'application  $f : \mathbb{R}P^n \rightarrow N$  est différentiable si et seulement si la composée  $f \circ \pi$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ . C'est un cas particulier de la propriété suivante :

**Propriété 3.3.** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application, et soit  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  une submersion surjective de classe  $C^r$ . Alors  $f \circ \pi$  est  $C^r$  si et seulement si  $f$  l'est.

DÉMONSTRATION. Supposons que  $f \circ \pi$  est  $C^r$ , fixons un point  $x_0$  de  $M$  et un point  $y_0$  tel que  $\pi(y_0) = x_0$ . Il existe alors une section locale de  $\pi$ , c'est à dire une application  $s : (M, x_0) \rightarrow (\tilde{M}, y_0)$  de classe  $C^r$  telle que  $\pi \circ s = Id$ . L'existence d'une telle section locale est une conséquence directe du théorème de forme normale des submersions. Localement,  $f = (f \circ \pi) \circ s$  est donc  $C^r$ . □

L'espace  $\mathbb{R}P^1$  est difféomorphe à  $S^1$ . Attention toutefois, l'application naïve associant à tout point de  $S^1$  la droite vectorielle qu'il engendre n'est pas une bijection (chaque droite à deux préimages). On définit plutôt l'application qui, au point  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in S^1$  (vu comme sous variété de  $\mathbb{R}^2$ ), associe la (projection orthogonale sur la) droite dirigée par  $\theta + (1, 0)$  si  $\theta \neq (-1, 0)$ , et par  $(0, 1)$  si  $\theta = (1, 0)$ . Cette application est une bijection de  $S^1$  sur  $\mathbb{R}P^1$ . Il est facile de vérifier qu'elle est  $C^1$ , et même  $C^\infty$ . Pour montrer que sa réciproque est aussi  $C^\infty$ , on calcule que le point d'intersection du cercle unité avec la droite affine passant par  $(-1, 0)$  et dirigée par le vecteur non-nul  $(v_1, v_2)$  est

$$\theta(v_1, v_2) = \left( \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}, \frac{2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2} \right).$$

L'espace  $\mathbb{R}P^2$ , qui est de dimension 2, est défini ci-dessus comme une sous variété de  $\mathbb{R}^6$ . Nous verrons qu'il se plonge dans  $\mathbb{R}^5$ , (il se plonge aussi dans  $\mathbb{R}^4$ , mais pas dans  $\mathbb{R}^3$ ).

### 3.6 Fibré tangent, fibré vectoriel.

Soit  $M$  une sous variété  $C^r$ ,  $r \geq 2$  de  $\mathbb{R}^D$ . L'ensemble  $TM := \{(x, v) \in \mathbb{R}^{2D}, x \in M, v \in T_x M\}$  est une sous variété  $C^{r-1}$  de  $\mathbb{R}^{2D}$  appelée le fibré tangent de  $M$ . Si  $\psi : U \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  est une équation locale de  $M$ , où  $U$  est un voisinage de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^D$ , alors

$$T\psi : U \times \mathbb{R}^D \ni (x, v) \mapsto (\psi(x), d\psi_x \cdot v) \in \mathbb{R}^{2D}$$

est un submersion. Sa différentielle s'écrit en effet

$$dT\psi_{(x,v)} \cdot (y, w) = (d\psi_x \cdot y, d\psi_x \cdot w + d^2\psi_x \cdot (v, y))$$

et elle est surjective car  $d\psi_x$  l'est. L'application  $T\psi$  est donc une équation de  $TM \cap (U \times \mathbb{R}^D)$ . Cette variété est munie d'une projection canonique  $\pi : TM \rightarrow M$  qui est la restriction de la projection sur le premier facteur.

**Exercice 3.3.** Soit  $M$  une hypersurface de  $\mathbb{R}^D$  (une sous variété de codimension 1). Montrer que l'application  $x \mapsto T_x M$  est surjective de  $M$  dans  $G(D-1, D)$ . On pourra, pour chaque  $E \in G(D-1, D)$  considérer une forme linéaire  $l$  sur  $\mathbb{R}^D$  dont  $E$  est le noyau, et montrer que l'application  $l|_M$  admet un point critique.

Un champ de vecteurs de classe  $C^k, k \leq r-1$  sur  $M$  s'identifie à une section  $S : M \rightarrow TM$ , c'est à dire à une application  $S : M \rightarrow TM$  telle que  $\pi \circ S = Id$ . Si  $X$  est un champ de vecteurs vu comme application à valeurs dans  $\mathbb{R}^D$ , la section qui lui est associée est  $S(x) = (x, X(x))$ .

De manière générale, on appelle fibré vectoriel (de type fini, de rang  $k$ ) au dessus de  $M$  la donnée d'une application différentiable  $E(x)$  de  $M$  dans une Grassmannienne  $G(k, n)$ . L'ensemble  $N := \{(x, v), v \in E(x)\} \subset M \times \mathbb{R}^n$  est appelé espace total du fibré vectoriel. C'est une sous variété de  $M \times \mathbb{R}^n$ , elle est munie d'une projection  $\pi : N \rightarrow M$  qui est une submersion. Pour tout  $x_0 \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  dans  $M$  et un difféomorphisme  $\theta : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times E(x_0)$ , qui préserve les fibres (c'est à dire que  $\pi \circ \theta(x, v) = x$ ) et dont la restriction  $\theta_x$  à chaque fibre  $\pi^{-1}(x)$  est un isomorphisme linéaire. On peut prendre pour  $\theta_x$  la restriction à  $E(x)$  de la projection orthogonale sur  $E(x_0)$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Un morphisme de fibrés vectoriel entre  $\pi : N \rightarrow M$  et  $\tilde{\pi} : \tilde{N} \rightarrow \tilde{M}$  est une application différentiable  $G : N \rightarrow \tilde{N}$  entre les espaces totaux qui envoie chaque fibre  $F(x) = \pi^{-1}(x)$  linéairement sur une fibre  $\tilde{F}(\tilde{x}) = \tilde{\pi}^{-1}(\tilde{x})$ . Il existe donc une application différentiable  $g : M \rightarrow \tilde{M}$  telle que  $\tilde{\pi} \circ G = g \circ \pi$ . On dit que  $G$  est un morphisme au dessus de  $g$ .

Si les fibrés sont donnés par des applications  $F$  et  $\tilde{F}$  de  $M$  et  $\tilde{M}$  dans les grassmanniennes  $G(k, n)$  et  $G(\tilde{k}, \tilde{n})$ , alors un morphisme de fibré est de la forme  $G(x, v) = (g(x), L(x) \cdot v)$  où  $L : M \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{\tilde{n}})$  est une application différentiable telle que  $L(x)$  envoie  $F(x)$  dans  $\tilde{F}(g(x))$  pour tout  $x \in M$ .

Le fibré  $\pi : N \rightarrow M$  est dit trivial si il est isomorphe au fibré produit  $M \times \mathbb{R}^k$ . C'est équivalent à l'existence d'une application différentiable  $L : M \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$  dont la restriction à  $F(x)$  est un isomorphisme pour tout  $x$ .

Si cette application existe, alors l'application  $(x, v) \rightarrow (x, L(x) \cdot v)$  est un isomorphisme de fibrés vectoriels (au dessus de l'identité) entre  $N$  et  $M \times \mathbb{R}^k$ . Réciproquement, tout isomorphisme de fibrés vectoriels entre ces fibré est de la forme  $(x, v) \mapsto (g(x), L(x) \cdot v)$  où  $L(x)$  est un isomorphisme de  $F(x)$  dans  $\mathbb{R}^k$  pour tout  $x$ .

Si  $M$  et  $N$  sont des variétés difféomorphes, alors les fibrés tangents  $T_x M$  et  $T_x N$  sont isomorphes. De plus, à tout difféomorphisme  $\phi : M \rightarrow N$  est associé l'isomorphisme canonique de fibrés

$$T\phi : (x, v) \mapsto (\phi(x), d\phi_x \cdot v).$$

On remarque la propriété fonctorialité

$$T(\phi \circ \psi) = T\phi \circ T\psi.$$

À titre d'exemple, considérons le fibré au dessus de la variété  $M = G(1, n)$  donné par l'application identité de  $M$  dans  $G(1, n)$ . C'est un fibré en droites dont l'espace total est  $E_n = \{(x, v), x \in G(1, n), v \in x\} \subset G(1, n) \times \mathbb{R}^n$ . En identifiant  $G(1, 2)$  à  $S^1$ , on peut visualiser l'espace total  $E_2$  comme un ruban de Moebius dans  $S^1 \times \mathbb{R}^2$ .

Soit  $\pi$  la projection sur le second facteur  $\pi : G(1, n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Notons  $\mathring{E}_n$  le complémentaire de la section nulle dans  $E_n$ , c'est à dire l'ensemble  $\mathring{E}_n = \{(x, v), x \in G(1, n), v \in x - \{0\}\}$ . La restriction de  $\pi$  à  $\mathring{E}_n$  est un difféomorphisme sur  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , dont le difféomorphisme inverse est  $v \mapsto (\mathbb{R}v, v)$ .

Pour  $n \geq 2$ , on conclut que  $\mathring{E}_n$  est connexe, et donc que  $E_n$  n'est pas trivial (dans le fibré trivial  $M \times \mathbb{R}$ , le complémentaire de la section nulle n'est pas connexe).

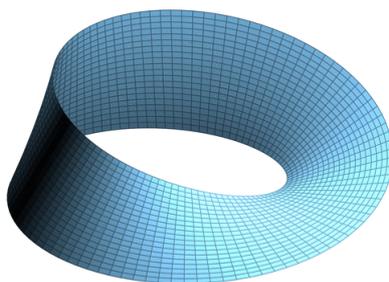


FIGURE 2 – Ruban de Moebius

## 4 Champ de vecteurs, fibrations

Commençons par rappeler l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz, sous une forme locale :

Soit  $X(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  une application  $C^r$ ,  $r \geq 1$  définie dans un voisinage de  $(t_0, x_0)$ . On considère l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ .

Il existe alors un intervalle ouvert  $I$  contenant  $t_0$ , un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  et une application  $\varphi : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , de classe  $C^r$ , ayant les propriétés suivantes :

- $\varphi(t_0, x) = x$  pour tout  $x \in U$ , et  $\varphi$
- La courbe  $t \mapsto \varphi(t, x)$  est une solution de l'équation différentielle pour tout  $x \in U$ . Autrement dit, on a la relation

$$\partial_t \varphi(t, x) = X(t, \varphi(t, x)).$$

- Toute solution  $x(t)$  de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert  $J$  contenant  $t_0$  et telle que  $x(t_0) \in U$  vérifie  $x(t) = \varphi(t, x(t_0))$  sur  $I \cap J$ .

### 4.1 Champ de vecteurs sur une sous variété

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^D$ . Un champ de vecteurs  $C^r$  sur  $M$ , est la donnée, pour tout  $x \in M$ , d'un vecteur  $X(x) \in T_x M$  qui est de classe  $C^r$  en tant qu'application de  $M$  dans  $\mathbb{R}^D$ . Ceci est équivalent à dire que, pour toute carte  $\phi : M \supset U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ de vecteurs  $(\phi_* X)(y) := d\phi_{\phi^{-1}(y)} \cdot X(\phi^{-1}(y))$  est  $C^r$  sur  $\phi(U)$ .

On considèrera aussi des champs de vecteurs non autonomes  $X(t, x)$  qui sont des applications  $C^r$  de  $\mathbb{R} \times M$  dans  $\mathbb{R}^D$  telles que  $X(t, x) \in T_x M$  pour tout  $(t, x)$ . On associe souvent à un tel champ non-autonome le champ autonome  $(1, X(t, x))$  sur  $\mathbb{R} \times M$ , ceci permet de déduire un certain nombre de propriétés des champs non-autonome à partir de l'étude des champs autonomes.

Si  $x(t)$  est une courbe  $C^1$  à valeurs dans la sous variété  $M$  de  $\mathbb{R}^D$ , alors pour chaque  $t$ , la dérivée  $\dot{x}(t)$ , vue comme un élément de  $\mathbb{R}^D$ , appartient à  $T_{x(t)} M$ . C'est le vecteur  $\dot{x}(t) = dx_t \cdot 1$ .

Étant donné un champ de vecteurs (non autonome)  $X(t, x)$  sur  $M$ , on dit que la courbe  $x$  satisfait l'équation  $\dot{x} = X(t, x)$  si  $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$  dans  $T_{x(t)} M$  pour tout  $t$ . Si la courbe  $x(t)$  sur  $M$  résout l'équation  $\dot{x}(t) = X(t, x(t))$ , alors la courbe  $(t, x(t))$  sur  $\mathbb{R} \times M$  résout l'équation autonome  $\dot{y} = (1, X(y))$ .

Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$  et  $\psi : M \rightarrow N$  un difféomorphisme. On note alors  $\psi_* X$  le champ de vecteur suivant sur  $N$  :

$$\psi_* X(y) = d\psi_{\psi^{-1}(y)} \cdot X(\psi^{-1}(y)).$$

Ce champ image n'est pas défini en général si  $\psi$  n'est pas un difféomorphisme. On utilisera toutefois

la notation  $\psi_*X$  chaque fois qu'elle a un sens. La relation  $Y = \psi_*X$  signifie donc que

$$Y(\psi(x)) = d\psi_x \cdot X(x)$$

pour tout  $x \in M$ . La relation

$$(\varphi\psi)_*X = \varphi_*(\psi_*X)$$

est satisfaite lorsque ses termes sont bien définis.

**Propriété 4.1.** Si  $Y = \psi_*X$  et si  $x(t)$  résout l'équation  $\dot{x} = X(t, x)$ , alors  $y(t)$  résout l'équation  $\dot{y} = Y(t, y)$ .

Fixons maintenant un champ de vecteurs non-autonome  $X(t, x)$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ .

**Théorème 4.2** (Flot local). Pour tout  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$ , Il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant  $t_0$ , un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$ , et un flot local  $\varphi : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^r$ , c'est à dire une application ayant les propriétés suivantes :

- $\varphi(t_0, x) = x$  pour tout  $x \in U$ .
- La courbe  $t \mapsto \varphi(t, x)$  est une solution de l'équation différentielle pour tout  $x \in U$ . Autrement dit, on a la relation

$$\partial_t \varphi(t, x) = X(t, \varphi(t, x)).$$

- Toute solution  $x(t)$  de l'équation différentielle définie sur un intervalle ouvert  $J$  contenant  $t_0$  et telle que  $x(t_0) \in U$  vérifie  $x(t) = \varphi(t, x(t_0))$  sur  $I \cap J$ .

DÉMONSTRATION. Le théorème se déduit de sa version dans  $\mathbb{R}^d$  en considérant une carte  $\phi : (M, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ . On considère le champ image  $Y = \phi_*X$ , et on lui applique le théorème de Cauchy-Lipschitz. On obtient un flot  $\psi(t, y) : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, (t_0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ , et on pose  $\varphi(t, x) = \phi^{-1}(\psi(t, \phi(x)))$ . □

**Corollaire 4.3** (Unicité). Soit  $\gamma(t)$  et  $\tilde{\gamma}(t)$  deux solutions de l'équation différentielle définie sur le même intervalle  $I$ . L'ensemble  $\{\tilde{\gamma} = \gamma\}$  est soit vide soit égal à  $I$ .

DÉMONSTRATION. l'ensemble  $J := \{t : x(t) = \gamma(t)\}$ , est un fermé de  $I$  puisque  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  sont continues. Pour tout  $s \in J$ , il existe un flot local  $\varphi_s$  associé au point  $(s, \gamma(s))$ . On a alors  $\gamma(t) = \varphi_s(t, x(s)) = \tilde{\gamma}(t)$  dans un voisinage de  $s$ . L'ensemble  $J$  est donc ouvert. On conclut par connexité. □

**Proposition 4.4** (Solution maximale). Pour tout  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times M$ , il existe un intervalle  $]T^-, T^+[$  et une (unique) solution  $x(t)$  de l'équation différentielle telle que  $x(t_0) = x_0$  et qui a de plus la propriété suivante :

Pour tout intervalle ouvert  $I$  contenant  $t_0$  et toute solution  $\gamma(t) : I \rightarrow M$  de l'équation différentielle vérifiant  $\gamma(t_0) = x_0$ , on a  $I \subset ]T^-, T^+[$  et  $\gamma = x|_I$ .

La donnée de l'équation différentielle et d'une condition initiale du type  $x(t_0) = x_0$  est appelé problème de Cauchy. La solution donnée par la propriété est la solution maximale du problème de Cauchy.

DÉMONSTRATION. L'existence d'un flot local implique celle d'une solution locale du problème de Cauchy  $\gamma(t) : ]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[ \rightarrow M$  (donnée par  $\gamma(t) = \varphi(t, x_0)$ ).

Définissons maintenant le temps d'existence  $T^+$  comme le suprémum des temps  $T > t_0$  tels que la solution  $\gamma(t)$  ci-dessus peut être prolongée en une solution sur l'intervalle  $]t_0 - \epsilon, T[$ .

Pour tout  $T \in ]t_0, T^+[$ , il existe une solution du problème de Cauchy sur  $]t_0 - \epsilon, T[$ , et celle-ci est unique au vu du corollaire ci-dessus. Ces solutions se recollent donc en une solution sur  $]t_0 - \epsilon, T^+[$ , qui est unique par le corollaire.

On définit le temps d'existence  $T^-$  comme l'infimum des temps  $T < t_0$  tels que la solution  $\gamma(t)$  ci-dessus peut être prolongée en une solution sur l'intervalle  $]T^-, T^+[$ . Comme ci-dessus, on montre que le problème de Cauchy admet une unique solution sur l'intervalle  $]T^-, T^+[$ . C'est la solution maximale du problème de Cauchy.  $\square$

**Théorème 4.5** (Flot global). *Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Il existe un ouvert  $W$  de  $\mathbb{R} \times M$  contenant  $\{t_0\} \times M$  et une (unique) application  $\varphi : W \rightarrow M$ , de classe  $C^r$ , ayant la propriété suivante :*

*Pour tout  $x \in M$ , l'ensemble  $W \cap (\mathbb{R} \times \{x\})$  est un intervalle ouvert  $]T_x^-, T_x^+[$  et la courbe*

$$]T_x^-, T_x^+[ \ni t \mapsto \varphi(t, x)$$

*est l'unique solution du problème de Cauchy donné par la condition initiale  $x(t_0) = x$ .*

DÉMONSTRATION. Pour tout  $x \in M$ , on considère la solution maximale

$$\varphi_x(t) : ]T_x^-, T_x^+[ \rightarrow M$$

du problème de Cauchy donné par la condition initial  $x(t_0) = x$ . On considère alors l'application  $\varphi(t, x) := \varphi_x(t)$ , définie sur l'ensemble  $W := \{(t, x) : t \in ]T_x^-, T_x^+[ \}$ .

Nous devons montrer que  $W$  est ouvert et que  $\varphi$  est  $C^r$  sur  $W$ .

On considère pour ceci un point  $(s_0, x_0)$  de  $W$ , la solution  $x(t) := \varphi(t, x_0)$ , et un intervalle compact  $[S, T] \subset ]T_{x_0}^-, T_{x_0}^+[$  contenant  $t_0$  et  $s_0$ . Pour tout  $s \in [S, T]$ , il existe un intervalle ouvert  $J$  contenant  $s$  et un flot local  $\psi_s : (J \times U, (s, x(s))) \rightarrow (M, x(s))$ , qui vérifie donc  $\psi_s(t, x(s)) = x(t)$  pour tout  $t \in J$ . On peut de plus demander en restreignant  $J$  que l'application  $\psi_s^t : x \mapsto \psi_s(t, x)$  soit un difféomorphisme local en  $x(s)$  pour tout  $t \in J$  (car  $\psi_s^s = Id$ ). On peut recouvrir l'intervalle compact  $[S, T]$  par un nombre fini de tels intervalles  $J_1, \dots, J_k$ , correspondant à des temps initiaux  $s_1, \dots, s_k$  sur chacun desquels est défini un flot

$$\psi_{s_i} : J_i \times U_i \rightarrow M$$

tel que  $\psi_{s_i}(t, x(s_i)) = x(t)$ . On suppose que les intervalles  $J_i$  sont rangés par ordre croissant de leur extrémité gauche.

L'intersection  $J_1 \cap J_2$  est alors un intervalle ouvert non-vidé dans lequel on choisit un point  $\tau_2$ . L'application  $\psi_{s_2}^{\tau_2} : x \mapsto \psi_{s_2}(t, x)$  est un difféomorphisme local en  $x(\tau_2)$ . On note  $\psi_{\tau_2}^{s_2}$  le difféomorphisme local (en  $x(\tau_2)$ ) inverse. On peut alors étendre  $\psi_{s_1}$  à  $J_2 \times W_2$ , où  $W_2$  est un voisinage ouvert de  $x(s_1)$ , par la formule

$$\tilde{\psi}_{s_1}(t, x) = \psi_{s_2}(t, \psi_{\tau_2}^{s_2} \circ \psi_{s_1}^{\tau_2}(x)).$$

On vérifie que  $\partial_t \tilde{\varphi}_{s_1}(t, x) = X(t, \tilde{\varphi}_{s_1}(t, x))$  sur  $J_2 \times W_2$ , et que  $\tilde{\varphi}_{s_1}^{\tau_2} = \varphi_{s_1}^{\tau_2}$ . Le corollaire sur l'unicité implique donc que  $\psi_{s_1} = \tilde{\psi}_{s_1}$  sur  $(J_1 \cap J_2) \times W_2$ . L'application donnée par  $\psi_{s_1}$  sur  $J_1 \times W_2$  et par  $\tilde{\psi}_{s_1}$  sur  $J_2 \times W_2$  est alors un flot de classe  $C^r$  sur  $(J_1 \cup J_2) \times W_2$ , que l'on note encore  $\psi_{s_1}$ . On a  $\psi_{s_1}(t, x(s_1)) = x(t)$  pour tout  $t \in J_1 \cup J_2$ , et  $\psi_{s_1}^t$  est un difféomorphisme local en  $x(s_1)$ .

On choisit alors  $\tau_3 \in (J_1 \cup J_2) \cap J_3$ , et on prolonge  $\psi_{s_1}$  à  $J_3 \times W_3$  par la formule

$$\tilde{\psi}_{s_1}(t, x) = \psi_{s_3}(t, \psi_{\tau_3}^{s_3} \circ \psi_{s_1}^{\tau_3}(x)).$$

On remarque que  $\tilde{\psi}_{s_1}^t$  est un difféomorphisme local en  $x(s_1)$  pour tout  $t \in J_3$ . On construit ainsi itérativement un flot  $\psi : (J_1 \cup \dots \cup J_k) \times W_k \rightarrow M$ , où  $W_k$  est un voisinage de  $x(s_1)$ , et tel que  $\psi_{s_1}(t, x(s_1)) = x(t)$ . De plus,  $\psi_{s_1}^t$  est un difféomorphisme local en  $x(s_1)$  pour tout  $t \in I := (J_1 \cup \dots \cup J_k)$ .

On considère l'inverse locale  $\psi_{t_0}^{s_1}$  du difféomorphisme local  $\psi_{s_1}^{t_0} : (M, x(s_1)) \longrightarrow (M, x(s_0))$ , et on pose

$$\psi_{t_0}(t, x) := \psi_{s_1}(t, \psi_{t_0}^{s_1}(x))$$

pour tout  $t \in I$ . C'est une application  $C^r$  définie sur  $I \times V$ , pour un voisinage  $V$  de  $x_0$ . Comme chaque courbe  $I \ni t \mapsto \psi_{t_0}(t, x), x \in V$  est une solution de l'équation satisfaisant  $\psi_{t_0}(t_0, x) = x$ , on conclut que  $I \times V$  est contenu dans le domaine  $W$  de  $\varphi$ , et que  $\varphi(t, x) = \psi_{t_0}(t, x)$  est  $C^r$  sur  $I \times V$ .  $\square$

**Proposition 4.6.** *Si le temps d'existence  $T_x^+$  de la solution maximale  $x(t)$  d'un problème de Cauchy vérifie  $T_x^+ < \infty$  (resp.  $T_x^- > -\infty$ ), alors l'orbite  $x([0, T_x^+])$  (resp.  $x([0, T_x^+])$ ) n'est contenue dans aucun compact de  $M$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $T_x^+ < \infty$  et que l'orbite  $\varphi_x([0, T_x^+])$  est contenue dans un compact  $K$  de  $M$ . Le champ de vecteurs  $X$  est borné sur  $[0, T_x^+] \times K$  (en tant que champ à valeurs dans  $\mathbb{R}^D$ ) donc la courbe  $x(t)$  est Lipschitz. Elle admet donc une limite  $x^+$  en  $T_x^+$ . Soit  $\varphi(t, x) : ]T_x^+ - \epsilon, T_x^+ + \epsilon[ \times U \longrightarrow M$  un flot local en  $(T_x^+, x^+)$ . La courbe  $\gamma(t) : ]T_x^-, T_x^+ + \epsilon[$  définie par  $\gamma = x$  sur  $]T_x^-, T_x^+[$  et  $\gamma(t) = \varphi(t, x^+)$  sur  $]T_x^+, T_x^+ + \epsilon[$  est en effet une solution du problème de Cauchy, ce qui contredit la définition de  $T_x^+$ . Pour vérifier la différentiabilité de  $\gamma$  en  $T_x^+$ , on remarque que  $\psi : (t, x) \mapsto (t, \varphi(t, x))$  est un difféomorphisme local, tel que  $\psi_*(1, 0) = (1, X)$ . En conséquence, la courbe  $\psi^{-1}(t, x(t))$  est la courbe  $(t, x^+)$ , c'est à dire que  $x(t) = \varphi(t, x^+)$  pour  $t \in ]T_x^+ - \epsilon, T_x^+[$ .  $\square$

On s'intéressera le plus souvent dans la suite à des champs de vecteurs autonomes et complets.

**Proposition 4.7.** *Tout champ de vecteurs à support compact est complet.*

DÉMONSTRATION. Soit  $X$  un champ de vecteurs nul en dehors du compact  $K$ . Pour toute  $x \notin K$ , l'orbite maximale issue de  $x$  est la courbe constante  $x(t) \equiv x$ , définie sur  $\mathbb{R}$ . En conséquence, toute orbite maximale  $x(t)$  issue d'un point de  $K$  reste dans  $K$ , et donc s'étend à  $\mathbb{R}$ .  $\square$

Dans le cas des champs de vecteurs complets autonomes, on a un flot  $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  tel que  $\varphi(0, x) = x$ . En notant  $\varphi^t : M \longrightarrow M$  l'application  $x \mapsto \varphi(t, x)$  on a

$$\varphi^0 = Id \quad , \quad \varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$$

pour tous  $t$  et  $s$ . Pour vérifier la seconde égalité, il suffit de constater que chacune des courbes  $t \mapsto \varphi^{t+s}(x)$  et  $t \mapsto \varphi^t \circ \varphi^s(x)$  est une solution de l'équation, qui vaut  $\varphi^s(x)$  au temps  $t = 0$ . On rappelle l'égalité

$$\partial_t \varphi(x) = X(\varphi^t(x)).$$

Finalement, on note la formule

$$\varphi_Y^t \circ \psi = \psi \circ \varphi_X^t$$

si  $Y = \psi^* X$ . Explicitons pour terminer l'utile lemme de forme normale suivant :

**Proposition 4.8.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^r$ , et  $x_0$  un point régulier, c'est à dire que  $X(x_0) \neq 0$ . Il existe alors une carte locale  $\phi : (M, x_0) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$  telle que  $\phi_* X$  est le champ constant  $(1, 0)$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $\psi : (\mathbb{R}^{d-1}, 0) \longrightarrow (M, x_0)$  une immersion locale telle que  $X(x_0) \notin d\psi_0(\mathbb{R}^{d-1})$ . Soit  $\varphi^t$  le flot de  $X$ . Alors l'application  $F : (t, y) \mapsto \varphi^t \circ \psi(y)$  est une paramétrisation locale de  $M$

telle que  $\partial_t F = X \circ F$ , c'est à dire  $F_*(1, 0) = X$ .  $\square$

Soit  $G$  un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  qui en est aussi une sous-variété. On note  $\mathfrak{g}$  son espace tangent au point identité, qui est donc un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$ .

**Proposition 4.9.** *La restriction à  $\mathfrak{g}$  de l'application exponentielle prend ses valeurs dans  $G$ .*

DÉMONSTRATION. Pour tout  $A \in G$ , l'application  $B \mapsto BA$  est un isomorphisme de  $M_n(\mathbb{R})$  qui préserve  $G$ . En conséquence, l'espace tangent à  $G$  au point  $A$  est l'espace  $\mathfrak{g}A$  constitué des matrices  $hA, h \in \mathfrak{g}$ . Pour tout  $h \in \mathfrak{g}$ , l'application  $A \mapsto hA$  est un champ de vecteurs sur  $GL_n(\mathbb{R})$  qui est tangent à  $G$ , et qui engendre donc (par restriction) un champ de vecteurs sur  $G$  (on parle de champ de vecteurs invariant à droite). L'équation différentielle associée  $A'(t) = hA(t)$  a une unique solution telle que  $A(0) = I$ , c'est  $A(t) = \exp(th)$ , qui est donc dans  $G$ .  $\square$

## 4.2 Fibrations localement triviales

**Théorème 4.10** (Ehresmann). *Soit  $f : M \rightarrow N$  une submersion de classe  $C^{r+1}$ ,  $r \geq 1$ . Si  $M$  est compacte (ou, plus généralement, si  $f$  est propre), alors  $f$  est une fibration localement triviale, c'est à dire que, pour tout  $x_0 \in N$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  dans  $N$  et un plongement  $\varphi : F \times U \rightarrow M$ , de classe  $C^r$ , où  $F$  est la sous variété  $f^{-1}(x_0)$ , vérifiant*

$$f \circ \varphi(y, x) = x$$

pour tout  $y \in F$  et  $x \in U$ .

Ceci implique en particulier, si  $M$  est connexe, que toutes les fibres  $f^{-1}(x)$  sont difféomorphes. Le terme *localement triviale* impose une mise en garde. Toute submersion est localement triviale au sens où elle s'écrit  $(x, y) \mapsto x$  dans un voisinage d'un point de sa source  $M$ . Ici, on obtient un résultat local au voisinage d'une fibre entière, autrement dit un résultat local du coté de l'image, ce qui est plus fort.

Remarquons qu'un fibré vectoriel est aussi une fibration localement triviale.

DÉMONSTRATION. On considère un plongement  $\psi$  de  $] - 2, 2[^{d_N}$  dans  $N$  qui envoie l'origine sur  $x_0$ . Posons  $Z = f^{-1}(\psi(] - 2, 2[^{d_N}))$  et

$$g = \psi^{-1} \circ f : X \rightarrow ] - 2, 2[^{d_N}.$$

Soient  $e_i$  les vecteurs coordonnées de  $\mathbb{R}^{d_N}$ , et soient  $v_i(x)$  les champs de vecteurs

$$v_i(x) = g(x_1)g(x_2) \cdots g(x_{d_N})e_i,$$

où  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  est une fonction régulière qui vaut 1 sur  $[-1, 1]$  et dont le support est contenu dans  $] - 2, 2[$ .

On construit des champs de vecteurs  $V_i$  sur la variété  $X$  tels que  $g_*V_i = v_i$ . Pour ceci, on considère l'orthogonal  $H'(z)$  du sous-espace  $K(z) := \ker dg_z$  dans  $\mathbb{R}^{D_M}$ , et son intersection  $H(z)$  avec  $T_z Z (= T_z M)$ . Ce sous-espace est un supplémentaire de  $K(z) = \ker dg_z$  dans  $T_z M$ . Comme  $dg_z$  est surjective, sa restriction à l'espace horizontal  $H(z)$  est un isomorphisme, et on pose

$$V_i(z) = (dg_z|_{H(z)})^{-1}(v_i(g(z))).$$

Comme  $f$  est propre, le support de  $V_i$  est compact.

Montrons que les champs  $V_i(z)$  sont  $C^r$ . On fixe un point  $z_0 \in Z$  et on étudie ces champs au voisinage de  $z_0$ . On étend localement la submersion  $g$  en une submersion

$$G : (\mathbb{R}^{D_M}, z_0) \longrightarrow ]-2, 2[^{d_N} \times \mathbb{R}^{D_M - d_M}, (g(z_0), 0))$$

telle que  $G(z) = (g(z), 0)$  pour  $z \in M$ . L'espace  $K(z)$ , vu comme sous espace de  $\mathbb{R}^{D_M}$  est le noyau de  $dG_z$ . L'application  $z \mapsto G(z)$  à valeurs dans la Grassmannienne  $G(d_F, D_M)$  est donc  $C^r$ . On en déduit en se référant à l'étude des Grassmanniennes plus haut que l'application

$$z \mapsto H(z) = (K(z)^\perp \cap T_z M) \in G(d_N, D_M)$$

est  $C^r$ . Comme l'application  $dG_z|_{H(z)}$  est un isomorphisme. Son inverse  $S(z)$ , vu comme application linéaire à valeurs dans  $\mathbb{R}^D$  dont l'image est  $H(z)$ , est une fonction  $C^r$  de  $z$  au vu de l'exercice 3.2. Les champs  $V_i(z) = S(z) \cdot v_i(g(z))$  sont donc  $C^r$ .

Soit  $\phi_i^t$  le flot de  $V_i$ . Comme  $g_* V_i = v_i$ , on a

$$g \circ \phi_i^t(x) = x + te_i$$

tant que  $x$  et  $x + te_i$  sont dans  $[-1, 1]^{d_N}$ . En notant  $F$  la sous variété  $g^{-1}(0)$ , on définit l'application  $\tilde{\varphi} : F \times ]-1, 1[^{d_N} \longrightarrow X$  par

$$\tilde{\varphi}(y, x) = \varphi(y, x_1, \dots, x_{d_N}) = \phi_{d_N}^{x_{d_N}} \circ \dots \circ \phi_1^{x_1}(y).$$

On remarque que  $g \circ \varphi(y, x) = x$ . La différentielle

$$d\tilde{\varphi}_{(y, 0, \dots, 0)} \cdot (\zeta, t_1, \dots, t_{d_N}) = \zeta + t_1 V_1(y) + \dots + t_{d_N} V_{d_N}(x)$$

est inversible, donc  $\varphi$  est un difféomorphisme local en  $(y, 0)$  pour tout  $y \in F$ . Au vu du Lemme ci-dessous, il existe  $\delta > 0$  tel que  $\tilde{\varphi}$  engendre un plongement de  $F \times ]-\delta, \delta[^{d_N}$  dans  $X$ . On revient à l'énoncé en posant  $U = \psi(]-\delta, \delta[^{d_N})$  et  $\varphi(y, x) = \tilde{\varphi}(y, \psi(x))$ .  $\square$

**Lemme 4.11.** Soient  $M$  et  $N$  des sous variétés, soit  $F$  une sous variété compacte de  $M$ , et soit  $J : M \longrightarrow N$  une application différentiable dont la restriction à  $F$  est un plongement et qui est un difféomorphisme local en chaque point de  $F$ . Alors il existe un voisinage  $U$  de  $F$  dans  $M$  tel que la restriction de  $J$  à  $U$  est un plongement.

La compacité de  $F$  n'est en fait pas nécessaire.

DÉMONSTRATION. Comme  $M$  est localement compacte, le compact  $F$  admet un voisinage compact  $W$ . On recouvre  $F$  par un nombre fini d'ouverts  $U_i$  contenus dans  $W$  sur chacun desquels  $J$  est un difféomorphisme sur son image. L'ensemble  $X$  des couples  $(x, x')$  de  $W \times W$  tels que  $J(x) = J(x')$  est compact. Il contient la diagonale  $\Delta_W$  de  $W \times W$ . De plus la réunion  $\mathcal{U} := \cup_i U_i \times U_i$  est un ouvert de  $W \times W$  tel que  $X \cap \mathcal{U} \subset \Delta_W$ . le compact  $X - \mathcal{U}$  est disjoint de  $\Delta_F$ , donc de  $F \times F$  (puisque  $X \cap (F \times F) = \Delta_F$ ). Il existe donc un voisinage  $V$  de  $F$  dans  $W$  tel que  $(V \times V) \cap X \subset \Delta_V$  et donc tel que  $J$  est injective sur  $V$ . Quitte à restreindre  $V$ , on peut supposer que les ouverts  $U_i$  recouvrent  $V$ . La restriction de  $J$  à  $V$  est alors un difféomorphisme sur son image, c'est à dire un plongement. En effet, pour tout  $x \in V$ , il existe  $i$  tel que  $x \in U_i$  et l'inverse de  $J$  au voisinage de  $J(x)$  est égale au difféomorphisme  $J|_{U_i}^{-1}$ .  $\square$

### 4.3 Fibration de Hopf

On considère le champ de vecteurs linéaire  $V(x, p)$  sur  $\mathbb{R}^4$

$$\dot{x}_1 = p_1, \quad \dot{p}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = p_2, \quad \dot{p}_2 = -x_2.$$

Il décrit l'évolution d'un couple d'oscillateurs harmoniques dont  $x_1$  et  $x_2$  sont les positions, et  $p_1$  et  $p_2$  les vitesses. En notation complexe  $z_i = x_i + ip_i$ , les solutions de l'équation sont

$$z_1(t) = z_1(0)e^{it}, \quad z_2(t) = z_2(0)e^{it},$$

elles sont toutes périodiques de période  $2\pi$  (sauf la solution identiquement nulle). On obtient ainsi une partition de  $\mathbb{R}^4$  en un point et des cercles plongés. Au voisinage de n'importe quel point non nul de  $\mathbb{R}^4$ , cette partition peut être redressée par un difféomorphisme local en une collection de droites parallèles.

L'énergie de ce système physique est

$$E(x, p) = \frac{1}{2}|x|^2 + \frac{1}{2}|p|^2.$$

On calcule facilement que  $dE \cdot V = 0$ . On conclut que l'énergie est constante le long des trajectoire, c'est à dire que  $E(x(t), p(t)) = E(x(0), p(0)) \forall t$  si  $(x(t), p(t))$  est une trajectoire de l'équation différentielle. Ceci est aussi évident directement sur l'expression des solutions.

Le champ de vecteur  $V$  engendre donc (par restriction) un champ de vecteurs (toujours noté  $V$ ) sur la sous-variété  $\{E = 1/2\}$ , qui n'est autre que  $S^3$ . Les trajectoires du système différentiel  $\dot{x} = V$ , qui sont toutes des images plongées de  $S^1$ , forment donc une partition de la sphère  $S^3$ . Localement, cette partition se redresse en une collection de droites parallèles.

La formule suivante va nous permettre de faire mieux. On pose

$$h(z_1, z_2) = (2z_1\bar{z}_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3.$$

Le calcul suivant

$$|h(z_1, z_2)|^2 = 4z_1\bar{z}_2\bar{z}_1z_2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 + (|z_1|^2 - |z_2|^2)^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^2$$

montre que  $h(S^3) \subset S^2$ , et même que  $h^{-1}(S^2) = S^3$ . On constate encore une fois que  $h$  est constante le long des orbites, et même que les ensembles  $h = cte$  sont exactement les orbites. En effet, si  $h(z_1, z_2) = h(z'_1, z'_2)$ , alors

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |h(z_1, z_2)| = |h(z'_1, z'_2)| = |z'_1|^2 + |z'_2|^2$$

donc  $|z_j|^2 = |z'_j|^2$ . On écrit alors  $z'_j = z_j e^{it_j}$  pour des réels  $t_1$  et  $t_2$ . Comme  $z_1\bar{z}_2 = z'_1\bar{z}'_2$ , on conclut que  $e^{i(t_1-t_2)} = 1$ , et donc que les points  $(z_1, z_2)$  et  $(z'_1, z'_2)$  sont sur la même orbite.

L'application  $h : S^3 \rightarrow S^2$  est une submersion (nous le vérifierons ci-dessous), donc une fibration localement triviale. Toutes les fibres de cette fibration sont difféomorphes à  $S^1$ , en particulier,  $h$  est surjective. Les fibres de  $h$  sont exactement les orbites du système différentiel  $\dot{x} = V$  sur  $S^3$ .

On montrera plus tard que  $S^3$  n'est pas difféomorphe à  $S^2 \times S^1$ , la fibration de Hopf n'est donc pas globalement triviale.

Montrons maintenant que  $h$  est une submersion en tout point différent de  $(0, 0)$ . En un point où  $z_1$  et  $z_2$  sont non-nuls, on écrit l'application  $h$  en coordonnées polaires

$$(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) \mapsto (2r_1r_2, \theta_1 - \theta_2, r_1^2 - r_2^2).$$

On vérifie par un calcul direct que l'application  $(r_1, r_2) \mapsto (2r_1r_2, r_1^2 - r_2^2)$  est un difféomorphisme de  $]0, \infty)^2$  dans  $]0, \infty) \times \mathbb{R}$ . L'autre facteur  $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_2 - \theta_1$  est une submersion de  $T^2$  dans  $S^1$ , donc  $h$  est une submersion sur l'ouvert  $\{z_1 \neq 0\} \cap \{z_2 \neq 0\}$ .

En écrivant en coordonnées cartésiennes la matrice

$$dh_{(x_1, p_1, x_2, p_2)} = 2 \begin{pmatrix} x_2 & p_2 & x_1 & p_1 \\ -p_2 & x_2 & p_1 & -x_1 \\ x_1 & p_1 & -x_2 & -p_2 \end{pmatrix}$$

on voit que cette différentielle est surjective aux points tels que  $z_1 = 0, z_2 \neq 0$  ou  $z_2 = 0, z_1 \neq 0$ .

#### 4.4 Oscillateur non résonant

On considère le champ de vecteurs linéaire  $V(x, p)$  sur  $\mathbb{R}^4$

$$\dot{x}_1 = p_1, \quad \dot{p}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = ap_2, \quad \dot{p}_2 = -ax_2,$$

avec un paramètre  $a$  irrationnel. Il décrit l'évolution d'un couple d'oscillateurs harmoniques dont les fréquences d'oscillations sont différentes et incommensurables. L'énergie de ce système physique est

$$E(x, p) = \frac{1}{2}(x_1^2 + p_1^2 + ax_2^2 + ap_2^2) = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + a|z_2|^2).$$

La sous variété  $\mathcal{E} := \{E = 1/2\}$  est difféomorphe à  $S^3$ . Les solutions de l'équation sont

$$z_1(t) = z_1(0)e^{it}, \quad z_2(t) = z_2(0)e^{iat}.$$

Contrairement au cas  $a = 1$ , la plupart des trajectoires sont injectives (toutes celles de l'ouvert  $\Omega := \{z_1 \neq 0\} \cap \{z_2 \neq 0\}$ ). Les trajectoires  $(z_1(t) \equiv 0, z_2(t) = z_2(0)e^{iat})$ , et  $(z_1(t) = z_1(0)e^{it}, z_2(t) \equiv 0)$  sont périodiques, et la trajectoire  $z(t) \equiv 0$  est fixe.

On vérifie facilement que les quantités  $|z_1|, |z_2|$  (et donc  $E$ ) sont constantes le long des trajectoires. Pour chaque  $r_1 > 0, r_2 > 0$ , la sous variété  $T(r_1, r_2)$  d'équation  $|z_1| = r_1, |z_2| = r_2$  est invariante. Chacune de ces sous variétés est difféomorphe au tore  $T^2$  (presque tautologiquement).

L'application  $R : (z_1, z_2) \rightarrow (|z_1|^2, |z_2|^2)$  est une submersion et un fibration localement triviale (dont les fibres sont difféomorphes à  $T^2$ ) de  $\Omega$  sur  $]0, \infty)^2$ . On peut aussi la restreindre à une fibration localement triviale de l'ouvert  $\Omega \cap \mathcal{E}$  de la surface d'énergie, sur l'intervalle  $](1, 0), (0, 1)[$  de  $\mathbb{R}^2$ . Toutefois, elle ne s'étend pas en une fibration localement triviale de toute la surface d'énergie, les fibres  $R^{-1}(0, 1)$  et  $R^{-1}(1, 0)$  sont des cercles, et non des tores. Ce sont des fibres singulières, sur lesquelles  $R$  n'est pas une submersion.

Le champ de vecteurs  $V$  engendre un champ de vecteurs sur chacun des tores  $T(r_1, r_2)$ . Les champs de vecteurs sur  $T(r_1, r_2)$  et  $T(r'_1, r'_2)$  sont conjugués par le difféomorphisme

$$(z_1, z_2) \mapsto (r'_1 z_1 / r_1, r'_2 z_2 / r_2)$$

(donc en un sens, leurs dynamiques sont identiques). Pour décrire les orbites, on considère la paramétrisation de  $T(r_1, r_2)$  par le difféomorphisme local non injectif

$$\pi : \mathbb{R}^2 \ni (\theta_1, \theta_2) \mapsto (r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}) \in T(r_1, r_2).$$

La préimage du champ de vecteurs  $V$  est le champ de vecteur constant  $(1, a)$ , c'est à dire que  $\pi_*(1, a) = V$ . L'orbite du point  $\pi(\theta_1^0, \theta_2^0)$  se représente donc dans ces coordonnées par la droite d'équation  $(\theta_2 - \theta_2^0) = a(\theta_1 - \theta_1^0)$ . Toutefois, en raison la non injectivité de  $\pi$ , la préimage de l'orbite

contient toutes les droites translattées d'équation  $(\theta_2 - \theta_2^0 - n) = a(\theta_1 - \theta_1^0 - m)$ ,  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ . Notons que l'ensemble  $Z$  des réels de la forme  $m - n/a$ ,  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$  est une partie dense de  $\mathbb{R}$ . La préimage de l'orbite est l'ensemble des droites d'équation

$$(\theta_2 - \theta_2^0) = a(\theta_1 - \theta_1^0 - z), z \in Z.$$

C'est donc une famille "transversalement dense" de droites parallèles. Comme cette famille est dense dans  $\mathbb{R}^2$ , son image par  $\pi$  qui est l'orbite de  $\pi(\theta_1^0, \theta_2^0)$  est dense dans  $T(r_1, r_2)$ . Localement, au voisinage de chacun de ses points, cette orbite se redresse en le produit d'un intervalle par un ensemble dénombrable dense.

## 4.5 Orbites d'un champ de vecteurs

Soit  $V(x)$  un champ de vecteurs sur la sous-variété  $M$ , et soit  $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow M$  une solution de l'équation  $\dot{x}(t) = V(x(t))$  (ou plus généralement  $x(t) : I \rightarrow M$  une orbite maximale).

**Proposition 4.12.** *Il y a trois possibilités pour la solution  $x(t)$  :*

- La solutions  $x(t)$  est constante,  $x(t) \equiv x_0$ , où  $x_0$  est une singularité de  $V$ , c'est à dire que  $V(x_0) = 0$ .
- La solution  $x(t)$  est périodique, c'est à dire qu'il existe  $T > 0$  tel que  $x(t+T) = x(t)$  pour tout  $t$ . Dans ce cas, l'image de la courbe  $x$  est une sous-variété de  $M$  difféomorphe à  $S^1$ .
- La courbe  $t \mapsto x(t)$  est une immersion injective.

**DÉMONSTRATION.** Si  $x_0$  est une singularité de  $V$ , alors la courbe constant  $x \equiv x_0$  est une solution de l'équation différentielle. La partie unicité du théorème de Cauchy Lipschitz implique donc qu'aucune autre solution ne passe par  $x_0$ . En effet, si une solution  $\gamma(t)$  vérifie que  $\gamma(s) = x_0$  pour un certain réel  $s$ , alors la courbe constante  $x_0$  et la courbe  $\gamma(t)$  sont deux solution du problème de Cauchy avec la condition initial  $x(s) = x_0$ , et elles sont donc égales.

Supposons maintenant que la solution  $x(t)$  n'est pas constante, et donc que  $V(x(t)) \neq 0$  pour tout  $t$ , c'est à dire que l'application  $t \mapsto x(t)$  est une immersion.

Supposons que cette immersion n'est pas injective. Alors il existe des temps  $s$  et  $S > 0$  tels que  $x(s) = x(s+S)$ . On remarque que les courbes  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto x(t+S)$  sont solutions du même problème de Cauchy, et donc égales. Autrement dit, l'égalité  $x(t) = x(t+S)$  a lieu pour tout  $t$ . Considérons maintenant l'ensemble  $P$  des périodes de  $x$ , c'est à dire l'ensemble des réels  $S$  tels que  $x(t+S) = x(t)$  pour tout  $t$ . On voit que  $P$  est un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}$ . Il existe donc un réel  $T > 0$  (que l'on appelle la période de  $x$ ) tel que  $P = T\mathbb{Z}$ .

Considérons l'application  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$  donnée par  $\theta(t) = e^{it2\pi/T}$ . Cette application est un difféomorphisme local surjectif. On constate de plus que si  $x(t) = x(s)$ , alors  $\theta(t) = \theta(s)$ . La courbe  $x$  se factorise donc en  $x = g \circ \theta$ , en posant  $g(\theta) = x(t)$  où  $t$  vérifie  $\theta(t) = \theta$ . On vérifie immédiatement que l'application  $g$  est bijective. Nous allons montrer que c'est une immersion, et donc, puisque  $S^1$  est compacte, un plongement (et donc un difféomorphisme sur son image).

Fixons  $\theta_0 \in S^1$ , et  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\theta(t_0) = \theta_0$ . On choisit un petit intervalle ouvert  $I$  centré en  $t_0$ , de sorte que  $\theta|_I$  est un difféomorphisme sur son image. Cette image  $\theta(I)$  est un voisinage de  $\theta_0$  dans  $S^1$ . Sur  $\theta(I)$ , on a

$$g = x \circ (\theta|_I)^{-1}.$$

C'est donc une immersion comme composée d'une immersion et d'un difféomorphisme. □

Soit  $V$  un champ de vecteurs complet sur  $M$ , sous variété de dimension  $d$ . Considérons une orbite  $X$ , c'est à dire l'image  $x(\mathbb{R})$  d'une solution de l'équation  $\dot{x} = V$ . Nous avons vu que  $X$  est soit un point, soit une sous-variété compacte plongée difféomorphe à  $S^1$ , soit l'image d'une immersion injective.

**Propriété 4.13.** *Pour tout  $x \in X$ , Il existe une carte  $\phi : I \times B \rightarrow M$ , où  $I$  est un intervalle contenant 0 et où  $B$  est une petite boule ouverte de  $\mathbb{R}^{d-1}$  centrée en 0, ayant les propriétés suivantes :*

- $\phi(0, 0) = x$ ,
- $\phi^{-1}(X) = I \times Z$

où  $Z$  est une partie dénombrable de  $B^l$ .

Cette propriété est satisfaite par les orbites maximales non périodiques des champs de vecteurs, pas, en général, par les images d'immersions injectives (penser au huit)!

Si  $X$  était une sous variété plongée de  $M$ , on pourrait prendre  $Z = \{0\}$  dans le résultat ci-dessus. Mais en général, la "structure transverse"  $Z$  est plus complexe, comme nous l'avons illustré avec les oscillateurs non résonnants dans 4.4.

DÉMONSTRATION. Comme  $V(x) \neq 0$ , on peut redresser le champ  $V$  au voisinage de  $x$ , c'est à dire qu'il existe un plongement  $\phi : I \times B \rightarrow M$  tel que  $\phi_*(1, 0) = V$ , où  $(1, 0)$  est vu comme un champ de vecteurs constant sur  $I \times B$ . L'ensemble  $\phi^{-1}(X)$  est alors une réunion de segments verticaux de la forme  $I \times \{z\}$ . Notons  $Z$  la projection de  $\phi^{-1}(X)$  sur  $B$ , de sorte que  $X \cap \phi(I \times B) = \phi(I \times Z)$ . Notons alors  $\tau$  l'ensemble des temps  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $\phi^{-1} \circ x(t) \in \{0\} \times Z$ . L'application  $P = \pi \circ \phi^{-1} \circ x$ , où  $\pi$  est la projection sur le second facteur, induit une bijection entre  $\tau$  et  $Z$  (rappelons que la courbe  $x$  est injective). Pour chaque  $T \in \tau$ , l'application  $\phi^{-1} \circ x$  envoie l'intervalle  $T + I$  sur le segment vertical  $I \times \{P(T)\}$ . Ces segments verticaux sont disjoints, donc leur préimages le sont aussi. Les intervalle  $T + I, T \in \tau$  sont donc disjoints, ce qui implique que  $\tau$  est dénombrable, donc  $Z$  aussi.  $\square$

L'espace  $Z$  est alors totalement discontinu (c'est à dire que ses composantes connexes sont des points) au vu du lemme ci-dessous. Les composantes connexes de l'ensemble  $X \cap U$  sont donc les couches  $\phi^{-1}(I \times \{z\})$ . L'ensemble  $X$  n'est pas localement connexe si ce n'est pas une sous variété.

**Lemme 4.14.** *Tout espace métrique dénombrable est totalement discontinu.*

DÉMONSTRATION. Fixons en effet un point  $x_0$  et considérons la fonction  $x \mapsto d(x_0, x)$ . L'image de la composante connexe de  $x_0$  est un intervalle dénombrable, et donc un point.  $\square$

## 5 Distances sur une sous-variété

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^D$ . On peut munir  $M$  de la distance induite par celle de  $\mathbb{R}^D$ , mais on va construire une autre distance plus géométrique.

### 5.1 La distance géométrique

**Propriété 5.1.** *Une sous variété connexe  $M$  est connexe par arcs  $C^1$  (et même  $C^\infty$ ).*

DÉMONSTRATION. On considère la relation *il existe une courbe  $C^1$  de  $M$  connectant  $x$  à  $y$ .*

Tout point  $x \in M$  admet un voisinage  $V$  tel que tout point  $y \in V$  est relié à  $x$ . On peut prendre comme voisinage  $V$  l'image d'une boule ouverte  $B$  par un plongement  $\varphi : B \rightarrow M$  qui envoie 0 (le centre de  $B$ ) sur  $x$ . La courbe  $[0, 1] \ni t \mapsto \varphi(t\varphi^{-1}(y))$  relie alors  $x$  à  $y$ .

La relation est une relation d'équivalence. Prouvons la transitivité. Soit  $\gamma_1 : [0, T_1] \rightarrow M$  une courbe reliant  $x$  à  $y$  et  $\gamma_2 : [0, T_2] \rightarrow M$  une courbe reliant  $y$  à  $z$ . On peut concaténer  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  pour former une courbe reliant  $x$  à  $z$ , mais cette courbe n'est pas forcément  $C^1$ . On résout cette difficulté en considérant une fonctions  $C^1$   $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\theta'(0) = 0 = \theta'(1)$  et  $\theta' > 0$  sur  $]0, 1[$ . Les courbes  $\tilde{\gamma}_i(t) = \gamma_i(T_i\theta(t)) : [0, 1] \rightarrow M$  relient  $x$  à  $y$  et  $y$  à  $z$ , et elles vérifient de plus que  $\dot{\gamma}_i = 0$  aux extrémités. La concaténation est alors une courbe  $C^1$  reliant  $x$  à  $z$ .

Les classes d'équivalence de la relation forment une partition de  $M$  en ouverts. Comme  $M$  est connexe, il n'y a qu'une classe.  $\square$

On définit la longueur de la courbe  $C^1 \gamma : [0, T] \rightarrow M$  par

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^T |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

où  $|v|$  est la norme Euclidienne du vecteur  $v \in \mathbb{R}^D$ . La longueur est invariante par reparamétrisation :

**Propriété 5.2.** Soit  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  une courbe  $C^1$  et  $g : [S, S'] \rightarrow [0, T]$  une fonction  $C^1$  croissante et surjective. Alors  $\mathcal{L}(\gamma \circ g) = \mathcal{L}(\gamma)$ .

La preuve est un calcul immédiat de changement de variable, utilisant que  $|g'| = g'$ .

On définit la distance géométrique

$$\delta(x, y)$$

sur  $M$  comme l'infimum des longueurs des courbes  $C^1$  joignant  $x$  à  $y$  dans  $M$ . Vérifions l'inégalité triangulaire : Soient  $x, y$ , et  $z$  trois points de  $M$  et soit  $\epsilon > 0$ . Il existe des courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow M$  qui joignent  $x$  à  $y$  et  $y$  à  $z$  et telles que  $\mathcal{L}(\gamma_1) \leq \delta(x, y) + \epsilon$  et  $\mathcal{L}(\gamma_2) \leq \delta(y, z) + \epsilon$ . Comme dans la preuve de la propriété 5.1, on peut supposer, en reparamétrisant les courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  que  $\dot{\gamma}_1(1) = 0 = \dot{\gamma}_2(0)$ . La concaténation  $\gamma_3$  de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  est alors une courbe  $C^1$  qui joint  $x$  à  $z$ . On a alors

$$\delta(x, z) \leq \mathcal{L}(\gamma_3) = \mathcal{L}(\gamma_1) + \mathcal{L}(\gamma_2) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z) + 2\epsilon.$$

Ceci est vrai pour tout  $\epsilon > 0$ , donc  $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$ .

On note immédiatement que

$$\delta(x, y) \geq |y - x|.$$

Contrairement à la plupart des constructions que nous avons faites jusqu'à présent, la distance géométrique  $\delta$  dépend de la manière dont  $M$  est plongée dans  $\mathbb{R}^D$ , et pas seulement sa structure intrinsèque de variété.

**Proposition 5.3.** Au voisinage d'un point  $x_0 \in M$ , on a

$$\delta(x, x') \leq |x' - x|(1 + \epsilon(|x' - x_0| + |x - x_0|))$$

où  $\epsilon$  est une fonction qui tend vers 0 en 0.

DÉMONSTRATION. Soit  $\varphi : (B, 0) \rightarrow (M, x_0)$  une carte. Posons  $L_y = d\varphi_y$  et  $L = L_0$ . On munit  $B$  de trois distances : La distance  $\delta(\varphi(y), \varphi(y'))$  (que l'on notera encore  $\delta(y, y')$ ), la distance  $|L(y' - y)|$  et la distance  $|\varphi(y') - \varphi(y)|$ .

On a  $\varphi(y') - \varphi(y) = \int_0^1 L_{y+t(y'-y)} \cdot (y' - y) dt$  donc, comme  $\varphi$  est  $C^1$ ,

$$|\varphi(y') - \varphi(y)| = |L(y' - y)|(1 + \epsilon(|y| + |y'|)),$$

et, comme  $L$  est injective, il existe  $c > 0$  tel que

$$|\varphi(y') - \varphi(y)| \geq c|y' - y|(1 - \epsilon(|y| + |y'|)),$$

La longueur la courbe courbe  $\gamma(t) = \varphi(y + t(y - y'))$  vérifie

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 |L_{y+t(y'-y)} \cdot (y' - y)| dt \leq |L(y' - y)|(1 + \epsilon(|y| + |y'|))$$

donc

$$\delta(\varphi(y), \varphi(y')) \leq |\varphi(y') - \varphi(y)|(1 + \epsilon(|y'| + |y|)).$$

Comme  $|\varphi(y) - x_0| \geq c|y|(1 - \epsilon(y))$ , on conclut que

$$\delta(\varphi(y), \varphi(y')) \leq |\varphi(y') - \varphi(y)|(1 + \epsilon(|\varphi(y) - x_0| + |\varphi(y') - x_0|)).$$

On obtient l'inégalité désirée en appliquant celle-ci à  $y' = \varphi^{-1}(x')$ ,  $y = \varphi^{-1}(x)$ . □

**Corollary 5.4.** *La distance  $\delta$  engendre sur  $M$  la même topologie que la distance Euclidienne.*

**Corollary 5.5.** *Si la variété  $M$  est fermée dans  $\mathbb{R}^D$  alors elle est complète pour la distance  $\delta$ .*

La distance géométrique sur  $M$  possède la propriété suivante :

**Propriété 5.6.** *Soient  $x_0$  et  $x_1$  deux points de  $M$ . Si  $r_0$  et  $r_1$  sont des réels positifs tels que  $r_0 + r_1 > \delta(x_0, x_1)$ , alors  $B_\delta(x_0, r_0) \cap B_\delta(x_1, r_1)$  est non vide.*

On remarquera que cette propriété n'est pas satisfaite par la distance  $\arctan(|y - x|)$  sur  $\mathbb{R}^d$ .  
 DÉMONSTRATION. Si  $r_0 = 0$  ou  $r_1 = 0$ , le résultat est clair, on suppose donc  $r_0 > 0$ ,  $r_1 > 0$  et on choisit  $r'_0 \in ]\delta(x_0, x_1) - r_1, \delta(x_0, x_1)[$ . Il existe alors une courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  joignant  $x_0$  à  $x_1$  et telle que  $\mathcal{L}(\gamma) < r'_0 + r_1$ . La courbe  $\gamma$  est continue, donc continue pour la distance  $\delta$ . La fonction continue  $t \mapsto d(x_0, \gamma(t))$  prend toutes les valeurs entre 0 et  $\delta(x_0, x_1)$ , donc en particulier la valeur  $r'_0$ . En notant  $t_0$  un temps tel que  $\delta(x_0, \gamma(t_0)) = r'_0$ , on a

$$\begin{aligned} \delta(x_0, \gamma(t_0)) &\leq \mathcal{L}(\gamma_{[0, t_0]}) = r'_0 < r_0 \\ \delta(\gamma(t_0), x_1) &\leq \mathcal{L}(\gamma_{[t_0, 1]}) = \mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}(\gamma_{[0, t_0]}) < r'_0 + r_1 - r_0 = r_1 \end{aligned}$$

□

**Théorème 5.7.** *Soit  $M$  une sous-variété munie de sa distance géométrique  $\delta$ . Si  $M$  est complète pour  $\delta$ , alors toutes les boules fermées de  $M$  sont compactes.*

Dans un espace métrique localement compact général, les boules fermées ne sont pas forcément toutes compactes.

Comme on le voit dans la preuve, la conclusion tient dans le contexte plus général d'un espace métrique localement compact  $(M, \delta)$  qui est complet et vérifie la propriété 5.6.

DÉMONSTRATION. Fixons  $x \in M$  et montrons que les boules fermées de centre  $x$  sont compactes. Pour ceci on considère le supremum  $R$  des rayons  $r > 0$  tels que la boule  $\bar{B}(x, r)$  est compacte. On veut montrer que  $R = +\infty$ , on suppose que c'est un nombre fini.

*La boule  $\bar{B}(x, R)$  est compacte.* Cette boule est fermée dans  $M$  complet, donc elle est complète. Pour montrer qu'elle est précompacte, on fixe  $\epsilon > 0$  et on considère une partie  $x_1, \dots, x_n$  qui est  $\epsilon/3$ -dense dans la boule compacte  $\bar{B}(x, R - \epsilon/3)$ . Cette partie est alors  $\epsilon$ -dense dans  $\bar{B}(x, R)$ . En effet pour tout  $y \in \bar{B}(x, R)$ , il existe un point  $z \in B(x, R - \epsilon/3)$  tel que  $\delta(y, z) < \epsilon/2$  (par le lemme 5.6). En choisissant  $i$  tel que  $d(x_i, z) < \epsilon/3$ , on voit que  $\delta(x_i, y) < \epsilon$ .

*Il existe  $\eta > 0$  tel que la boule  $\bar{B}(x, R + \eta)$  est compacte.* Comme  $M$  est localement compacte, chaque point  $y$  de  $M$  est le centre d'une boule compacte  $\bar{B}_y$ , la boule ouverte associée étant notée  $B_x$ . Les boules  $B_y, y \in \bar{B}(x, R)$  recouvrent le compact  $\bar{B}(x, R)$ , et on extrait un sous-recouvrement fini. La réunion des boules fermées correspondantes est alors un compact  $K$  qui contient  $\bar{B}(x, R)$  dans son intérieur. La distance entre  $\bar{B}(x, R)$  et le complémentaire de  $K$  est strictement positive, c'est à dire qu'il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout point  $y$  qui appartient à une boule de rayon  $2\eta$  et dont le

centre est dans  $\bar{B}(x, R)$ , on a  $y \in K$ . Au vu de la propriété 5.6, on conclut que  $B(x, R + \delta) \subset K$  et donc que la boule  $\bar{B}(x, R + \delta)$  est compacte. Ceci est en contradiction avec la définition de  $R$ , on conclut que  $R$  est infini, ce qui termine la preuve.  $\square$

Sous les hypothèses du Théorème, les boules fermées  $\bar{B}(x_0, r_0)$  et  $\bar{B}(x_1, r_1)$ , qui sont compactes, ont une intersection non-vide dès que  $r_0 + r_1 \geq \delta(x_0, x_1)$ .

## 5.2 Géodésiques minimisantes.

Soit  $M$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^D$  et  $\delta$  sa distance géométrique. On définit la longueur d'une courbe quelconque  $\gamma : [S, T] \rightarrow M$  comme le supremum

$$\mathcal{L}_\delta(\gamma) = \sup_{S=t_0 < t_1 < \dots < t_k=T} (\delta(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + \dots + \delta(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)))$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des suites finies croissantes de temps intermédiaires  $S = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{k-1} \leq t_k = T$ . On notera  $\mathcal{L}(\gamma_{[S,T]})$  lorsqu'on veut préciser le domaine de la courbe. On note que cette formule fait sens dans tout espace métrique  $(M, \delta)$ . On peut notamment considérer la longueur  $\mathcal{L}_d$  associée à la distance  $d(x, x') = |x' - x|$  sur  $M$ .

Les quelques propriétés ci dessous de la longueur découlent directement de la définition :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\delta(\gamma_{[s,t]}) &\geq \delta(\gamma(s), \gamma(t)), \quad \forall s \leq t \\ \mathcal{L}(\gamma_{[S,T]}) &= \mathcal{L}_\delta(\gamma_{[S,t]}) + \mathcal{L}(\gamma_{[t,T]}) \quad \forall t \in [S, T]. \end{aligned}$$

**Propriété 5.8.** Si  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^D$  et si  $\gamma : [S, T]$  est une courbe  $C^1$  sur

DÉMONSTRATION. Notons  $\mathcal{I}(\gamma)$  le temps de cette preuve le terme de droite de l'égalité. Par définition de  $\delta$ , on a

$$\delta(\gamma(s), \gamma(t)) \leq \mathcal{I}(\gamma_{[s,t]})$$

pour tous  $s$  et  $t$ , et  $\mathcal{I}$  vérifie la relation de Chasles. On en conclut que  $\mathcal{I}(\gamma) \geq \mathcal{L}(\gamma)$ . Réciproquement, considérons un module de continuité  $\omega$  de  $\dot{\gamma} : [s, t] \rightarrow \mathbb{R}^D$ . Pour tout  $[s, t] \subset [S, T]$ , on a

$$\left| |\gamma(t) - \gamma(s)| - (t-s)|\dot{\gamma}(s)| \right| \leq \left| \int_s^t \dot{\gamma}(\sigma) - \dot{\gamma}(s) d\sigma \right| \leq (t-s)\omega(t-s)$$

et

$$\left| \int_s^t |\dot{\gamma}(\sigma)| d\sigma - (t-s)|\dot{\gamma}(s)| \right| \leq (t-s)\omega(t-s)$$

donc

$$\left| \int_s^t |\dot{\gamma}(\sigma)| d\sigma - |\gamma(s) - \gamma(t)| \right| \leq 2(t-s)\omega(t-s).$$

En prenant une décomposition  $T = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  telle que  $t_{i+1} - t_i < \epsilon$ , on a donc

$$\mathcal{L}(\gamma) \geq |\gamma(t_0) - \gamma(t_1)| + \dots + |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_n)| \geq \mathcal{I}(\gamma) - 2(T-S)\omega(\epsilon).$$

Comme on peut choisir  $\epsilon > 0$  arbitrairement petit, on a  $\mathcal{L}(\gamma) \geq \mathcal{I}(\gamma)$  et donc  $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{I}(\gamma)$ .  $\square$

Nous allons maintenant montrer l'existence d'une géodésique minimisante Lipschitzienne :

**Théorème 5.9.** Soit  $M$  une sous-variété fermée, munie de sa distance géométrique  $\delta$ . Étant donnés deux points  $x_0$  et  $x_1$ , il existe une courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  qui est Lipschitz de constante  $\delta(x_0, x_1)$ , et telle que  $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$ . Cette courbe est donc de longueur  $\delta(x_0, x_1)$ .

La preuve qui suit montre en fait le résultat dans le contexte plus général d'un espace métrique localement compact et complet  $(M, \delta)$  vérifiant la propriété 5.6.

DÉMONSTRATION. Posons  $L = \delta(x_0, x_1)$ . En utilisant la Propriété 5.6 et le Théorème 5.7, on voit que l'intersection  $\bar{B}(x_0, L/2) \cap \bar{B}(x_1, L/2)$  est non vide, et on choisit un point  $\gamma(1/2)$  dans cette intersection. On a alors  $\delta(x_0, \gamma(1/2)) = \delta(\gamma(1/2), x_1) = L/2$ .

On construit ainsi des points  $\gamma(1/4)$  et  $\gamma(3/4)$  tels que

$$\delta(x_0, \gamma(1/4)) = \delta(\gamma(1/4), \gamma(1/2)) = \delta(\gamma(1/2), \gamma(3/4)) = \delta(\gamma(3/4), x_1) = L/4.$$

Par récurrence, on construit ainsi une application  $\gamma$  définie sur l'ensemble des nombres dyadiques de  $[0, 1]$ , à valeur dans  $M$ , et  $L$ -Lipschitz. On l'étend alors par continuité en une courbe  $L$ -Lipschitz de  $[0, 1]$  dans  $M$  telle que  $\gamma(0) = x_0$  et  $\gamma(1) = x_1$ . Comme la courbe  $\gamma$  est  $L$ -Lipschitz, il est immédiat que sa longueur est inférieure ou égale à  $L$ . Comme  $\delta(x_0, x_1) = L$ , et que  $\gamma$  relie  $x_0$  à  $x_1$ , on conclut que  $\mathcal{L}(\gamma) = L$ .  $\square$

### 5.3 Métriques Riemanniennes

Dans les sections précédentes, nous avons utilisé la distance ambiante de  $\mathbb{R}^D$  pour définir une distance géométrique sur la sous variété  $M$ . En fait, ce qui était utile pour mesurer la longueur d'une courbe est la donnée, pour chaque point  $x$  de  $M$ , d'une norme sur  $T_x M$ , nous avons pris comme norme la restriction de la norme Euclidienne de  $\mathbb{R}^D$  à  $T_x M$ .

On aurait aussi pu se donner une métrique Riemannienne quelconque :

**Définition 5.10.** Une métrique Riemannienne sur une sous variété  $M$  est la donnée, pour chaque  $x \in M$ , d'un produit scalaire  $g_x(v, w)$  sur l'espace vectoriel  $T_x M$ . On demande de plus que ce produit scalaire dépende différemment du point  $x$ , c'est à dire que la fonction  $x \mapsto g_x(V(x), W(x))$  est différentiable pour tous champs de vecteurs différentiables  $V$  et  $W$ .

**Exercice 5.1.** Si  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^D$ , et si  $g_x$  est une métrique Riemannienne sur  $M$ , alors il existe une application différentiable  $G : M \rightarrow S^+(D)$  (l'ensemble des matrices symétriques définies positives  $D \times D$ ) telle que  $g_x(v, w) = \langle G(x)v, w \rangle$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^D$ .

Étant donnée une métrique Riemannienne  $g_x$  sur  $M$ , on définit comme ci-dessus la longueur d'une courbe de  $M$  par

$$\mathcal{L}_g(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt,$$

puis la distance  $\delta_g$  donnée comme l'infimum des longueurs des courbes. Cette distance vérifie la propriété 5.6, et donc les Théorèmes 5.7 et 5.9.

On dit que la métrique  $g$  est complète si  $M$  est complète pour la distance géodésique associée. La métrique Riemannienne naturelle sur une sous-variété fermée est complète. Nous montrerons plus tard que toute (sous) variété admet un plongement dans un espace  $\mathbb{R}^D$  dont l'image est fermée, et donc une métrique Riemannienne complète. Cependant, il existe aussi des métriques non complètes (sauf sur une variété compacte).

## 6 Théorème de l'orbite

### 6.1 Énoncé général

Soit  $M$  une sous variété de  $\mathbb{R}^D$  et  $E(x)$  un champ de sous-espaces de dimension  $m$  sur  $M$  c'est à dire la donnée, en chaque point  $x \in M$ , d'un sous espace vectoriel de dimension  $m$  de  $T_x M$  tel que l'application  $x \mapsto E(x)$  est différentiable de  $M$  dans la grassmannienne  $G(m, D)$ .

Pour chaque  $x_0 \in M$ , on considère l'orbite  $X(x_0)$ , c'est à dire l'ensemble des points de  $M$  qui peuvent être reliés à  $x_0$  par une courbe  $C^2$  tangente à  $E$ , (telle que  $\dot{\gamma}(t) \in E(\gamma(t))$  pour tout  $t$ ). Dans le cas ou  $E(x) = \text{vect}(V(x))$  pour un champ de vecteur  $V$ , l'orbite de  $x_0$  est donc l'image de toute solution maximale  $x(t)$  de l'équation  $\dot{x} = V(x)$  prenant la valeur  $x_0$ .

Le théorème suivant, appelé théorème de l'orbite de Sussman, généralise la propriété 4.13 à ce cadre.

**Théorème 6.1.** *Supposons que  $E(x)$  est de dimension constante. Pour tout  $x_0 \in M$ , il existe une carte  $\phi : (B^k \times B^l, (0, 0)) \rightarrow (M, x_0)$ , où  $B^k$  et  $B^l$  sont des boules ouvertes centrées en 0 dans  $\mathbb{R}^k$  et  $\mathbb{R}^l$ , ayant la propriété suivante :*

$$\phi^{-1}(X(x_0)) = B^k \times Z$$

où  $Z$  est une partie dénombrable de  $B^l$ .

On a alors  $E(x_0) \subset d\phi_0(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ , mais en général, ce n'est pas une égalité. La dimension  $k$  de l'orbite peut être supérieure à la dimension du champ  $E$ . Cette dimension  $k$  est constante le long de chaque orbite par connexité, mais elle dépend de l'orbite.

Présentons maintenant un point de vue légèrement différent. On considère une famille  $\mathcal{V}$  de champs de vecteurs complets sur  $M$ , et on note  $\mathcal{G}$  le groupe de difféomorphismes de  $M$  engendré par les flots des éléments de  $\mathcal{V}$ . Tout élément de  $\mathcal{G}$  est donc de la forme

$$g = \varphi_n^{t_n} \circ \dots \circ \varphi_1^{t_1}$$

où  $\varphi_i^{t_i}$  sont des flots d'éléments de  $\mathcal{V}$ . Pour tout  $x \in M$ , on note  $\mathcal{G}(x)$  l'ensemble  $\{g(x), g \in \mathcal{G}\}$ . On a la version suivante du théorème précédent :

**Théorème 6.2.** *Pour tout  $x \in X$ , il existe une carte  $\phi : (B^k \times B^l, (0, 0)) \rightarrow (M, x)$ , où  $B^k$  et  $B^l$  sont des boules ouvertes centrées en 0 dans  $\mathbb{R}^k$  et  $\mathbb{R}^l$ , ayant la propriété suivante :*

$$\phi^{-1}(\mathcal{G}(x)) = B^k \times Z$$

où  $Z$  est une partie dénombrable de  $B^l$ . En particulier, pour tout  $V \in \mathcal{V}$ ,  $t \in B^k$  et  $z \in Z$ , on a  $(\phi^{-1})_* V(t, z) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}$ .

Le théorème 6.2 implique le théorème 6.1. En effet, si  $E(x)$  est un champ de sous espaces sur  $M$ , on définit la famille  $\mathcal{V}_E$  des champs de vecteurs de  $M$  à support compact tangents à  $E$  (c'est à dire que  $V(x) \subset E(x)$  pour tout  $x$ ). On note  $\mathcal{G}_E$  le groupe de difféomorphismes de  $M$  engendré par les flots des éléments de  $\mathcal{V}_E$ . On constate que , pour tout  $x \in M$ , on a  $\mathcal{G}_E(x) \subset X(x)$ , la réunion des courbes  $C^2$  tangentes à  $E$  et passant par  $x$ . En utilisant le théorème 6.2, montrons que  $\mathcal{G}_E(x) = X(x)$ , ce qui donne le théorème 6.1.

On doit montrer que toute courbe  $\gamma : ]-1, 1[ \rightarrow M$  tangente à  $E$  est contenue dans une  $\mathcal{G}$ -orbite. Par un argument de connexité, il suffit de montrer que tout  $s_0 \in ]-1, 1[$  admet un voisinage sur lequel  $\gamma(s) \in \mathcal{G}(\gamma(s_0))$ . Posons  $x_0 = \gamma(s_0)$  et considérons la paramétrisation  $\phi$  donnée par le théorème 6.2 appliqué au point  $x_0$ . Soient  $X_1, \dots, X_m$  des champs de vecteurs sur  $B^k \times B^l$  tels que les vecteurs  $\phi_* X_i(x)$  forment une base de  $E(x)$  pour  $x$  proche de  $x_0$ . Comme la courbe  $\gamma$  est tangente à  $E$ , il existe des fonctions  $f_1, \dots, f_m$  de classe  $C^1$  telles que

$$(\phi^{-1} \circ \gamma)'(s) = \sum f_i(s) X_i(\phi^{-1} \circ \gamma(s))$$

au voisinage de  $s_0$ . En définissant  $X(s, x) := \sum f_i(s) X_i(x)$ , on constate que :

- La courbe  $\theta(s) = \phi^{-1} \circ \gamma$  est, localement au voisinage de  $s_0$ , une solution de l'équation différentielle  $\dot{\theta}(s) = X(s, \theta(s))$ .

- Le champ de vecteurs dépendant du temps  $X(s, x)$  est tangent à  $B^k \times \{0\}$ .
- Le point  $\theta(s_0)$  est contenu dans  $B^k \times \{0\}$ .

On conclut que la courbe  $\theta(s)$  est, localement au voisinage de  $s_0$ , contenue dans  $B^k \times \{0\}$ , et donc que la courbe  $\gamma$  est localement contenue dans  $\mathcal{G}(x_0)$ . On a démontré que  $X(x) = \mathcal{G}_E(x)$ , et donc déduit le théorème 6.1 du théorème 6.2.  $\square$

L'exemple suivant montre qu'il faut être prudent dans les énoncés : On se donne une fonction  $f$  nulle sur  $(-\infty, 0]$  et positive sur  $]0, \infty)$ , et on considère la famille  $\mathcal{V}$  de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$  formée par les deux champs  $V_1(x) = e_1$  et  $V_2(x) = f(x_2)e_2$ . L'espace vectoriel  $E(x)$  engendré par ces deux champs est  $\mathbb{R}e_1$  si  $x_2 \leq 0$  et c'est  $\mathbb{R}^2$  si  $x_2 > 0$ . Les  $\mathcal{G}$ -orbites sont les droites horizontales  $x_2 = c, c \leq 0$  et l'ouvert  $\{x_2 > 0\}$ , ce sont des sous variétés. Cependant, l'ensemble  $X(0)$  des points atteignables depuis l'origine par une courbe  $C^1$  tangente à  $E$  est l'ensemble  $\{x_2 \geq 0\}$ , il ne satisfait pas la conclusion des énoncés ci-dessus, et n'est pas égal à  $\mathcal{G}(0)$ .

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6.2. Soit  $\mathcal{W}$  l'espace des champs de vecteurs de la forme  $g_*V, V \in \mathcal{V}, g \in \mathcal{G}$ . On a donc  $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ , mais il n'y a pas nécessairement égalité.

**Lemme 6.3.** *Les champs de vecteurs de  $\mathcal{W}$  sont complets et leurs flots appartiennent à  $\mathcal{G}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $W = g_*V$  un élément de  $\mathcal{W}$ . Si  $\varphi^t$  est le flot de  $V$ , alors le flot de  $W$  est  $\psi^t = g \circ \varphi^t \circ g^{-1}$ . C'est donc un élément de  $\mathcal{G}$ .  $\square$

Notons  $H(x)$  le sous-espace de  $T_xM$  engendré par les vecteurs  $W(x), W \in \mathcal{W}$ . Les champs de  $\mathcal{W}$  et donc ceux de  $\mathcal{V}$ , sont tangents à  $H$ . Notons que la dimension de  $H(x)$  n'est pas forcément constante. Cependant :

**Lemme 6.4.** *La dimension de  $H(x)$  est constante le long de chaque  $\mathcal{G}$ -orbite.*

DÉMONSTRATION. Soient  $x$  et  $y$  deux points d'une même  $\mathcal{G}$ -orbite. Il existe  $g \in \mathcal{G}$  tel que  $y = g(x)$ . Soient  $W_1, \dots, W_k$  une famille d'éléments de  $\mathcal{W}$  telle que les vecteurs  $W_i(x), 1 \leq i \leq k$  forment une base de  $H(x)$ . Alors, les champs de vecteurs  $g_*W_i$  sont des éléments de  $\mathcal{W}$ , qui forment une famille libre au point  $y$ . On a donc  $\dim H(y) \geq k = \dim H(x)$ . Par symétrie,  $\dim H(y) = \dim H(x)$ .  $\square$

Fixons un point  $x_0 \in X$ , et considérons un plongement  $J : (B^l, 0) \rightarrow (M, x_0)$  transverse à  $H(x_0)$  (c'est à dire que  $dJ_0(\mathbb{R}^l) \oplus H(x_0) = T_{x_0}M$ ) d'une petite boule ouverte de  $\mathbb{R}^l$  dans  $M$ . On considère des champs de vecteurs  $W_1, \dots, W_k$  de  $\mathcal{W}$  dont les évaluations en  $x_0$  constituent une base de  $H(x_0)$ . On note  $\varphi_i^t$  les flots associés. L'application

$$\phi : \mathbb{R}^k \times B^l \ni (t_1, \dots, t_k, z) \mapsto \varphi_k^{t_k} \circ \dots \circ \varphi_1^{t_1} \circ J(z)$$

est un difféomorphisme local en  $(0, 0)$ , car

$$\partial_t \phi(0, z) \cdot (s_1, \dots, s_k) = \sum_i s_i W_i(J(z)).$$

Quitte à restreindre  $B^l$ , on suppose donc que c'est un plongement de  $B^k \times B^l$  dans  $M$ , où  $B^k$  est une petite boule ouverte de  $\mathbb{R}^k$  centrée en 0.

**Lemme 6.5.** *On a  $\partial_t \phi(t, z) \cdot \mathbb{R}^k \subset H(\phi(t, z))$  pour tout  $(t, z) \in B^k \times B^l$ .*

DÉMONSTRATION. On rappelle la formule  $\frac{d}{dt}(g \circ \varphi_V^t(x)) = (g_*V)(g \circ \varphi_V^t(x))$  pour tout difféomorphisme  $g$  et tout champ de vecteurs  $V$ . En posant  $g = \varphi_k^{t_k} \circ \dots \circ \varphi_{i+1}^{t_{i+1}}$ , on a donc

$$\partial_{t_i} \phi(t, z) = (g_*V_i)(g \circ \varphi_i^{t_i}(\varphi_{i-1}^{t_{i-1}} \circ \dots \circ \varphi_1^{t_1} \circ J(z))) = (g_*V_i)(\phi(t, z)) \subset H(\phi(t, z))$$

car  $g \in \mathcal{G}$ , donc  $g_*V_i \subset \mathcal{W}$ , donc  $g_*V_i(\phi(t, z)) \subset H(\phi(t, z))$ . □

Comme la dimension de  $H(x)$  est égale à  $k$  si  $x \in \mathcal{G}(x_0)$  on en déduit :

**Propriété 6.6.** *Pour tout  $x \in \mathcal{G}(x_0) \cap \phi(B^k \times B^l)$ , on a  $d(\phi^{-1})_x \cdot H(x) = \mathbb{R}^k \times \{0\}$ .*

Chaque couche horizontale  $\phi(B^k \times \{z\})$ ,  $z \in B^l$  est contenue dans une  $\mathcal{G}$ -orbite, donc :

**Propriété 6.7.** *Pour tout  $x \in M$ , l'ensemble  $\phi^{-1}(\mathcal{G}(x))$  est une réunion de couches horizontales de la forme  $B^k \times \{z\}$ .*

On note  $Z$  la projections sur  $\mathbb{R}^l$  de  $\phi^{-1}(\mathcal{G}(x_0))$ , de sorte que

$$\mathcal{G}(x_0) \cap \phi(B^k \times B^l) = \phi(B^k \times Z).$$

Comme tout champ  $W \in \mathcal{W}$  est tangent à  $H$  on a :

**Propriété 6.8.** *Pour tout champ  $W \in \mathcal{W}$ , les couches horizontales  $\phi(B^k \times \{z\})$ ,  $z \in Z$  sont localement préservées par le flot  $\varphi_W^t$ . Plus précisément, pour tout  $x_1 \in \phi(B^k \times \{z\})$ , on a  $\varphi_W(t, y) \subset \phi(B^k \times \{z\})$  sur un voisinage de  $(0, x_1)$  dans  $\mathbb{R} \times \phi(B^k \times \{z\})$ .*

Il reste à démontrer que  $Z$  est dénombrable. Pour ceci, on considère l'ensemble  $\mathcal{C}$  des courbes  $C^2$  de la forme

$$\gamma(s) = \varphi_n^{\tau_n(s)} \circ \dots \circ \varphi_1^{\tau_1(s)}(x)$$

où  $x$  est un point de  $M$ , où  $\varphi_i^t$  sont des flots d'éléments de  $\mathcal{W}$  et où  $\tau_i(s)$  sont des fonctions  $C^2$ . Si  $\gamma \in \mathcal{C}$ , on déduit de la propriété 6.8 que le second facteur  $\pi_2 \circ \phi^{-1} \circ \gamma$  est localement constant sur son domaine de définition  $\gamma^{-1}(\phi(B^k \times Z))$ .

On munit  $X$  de la distance géométrique  $\delta(x, y)$  définie comme l'infimum des longueurs des courbes de  $\mathcal{C}$  joignant  $x$  à  $y$ . On démontre que  $\delta$  est une distance exactement comme pour la distance géométrique sur une sous variété plongée.

**Lemme 6.9.** *Pour tout  $z \in Z$ , l'application*

$$\phi_z : B^k \ni y \longmapsto \phi(y, z) \in (X, \delta),$$

*est un homéomorphisme sur son image  $\phi(B^k \times \{z\})$ , qui est un ouvert de  $(X, \delta)$ .*

On déduit de ce lemme que  $(X, \delta)$  est localement compact. Comme deux points de  $X$  sont reliés par une courbe de  $\mathcal{C}$ , et qu'une telle courbe est continue pour la distance  $\delta$ , l'espace métrique  $(X, \delta)$  est connexe. L'espace métrique  $(X, \delta)$  étant connexe et localement compact, il est séparable (voir la section 7 ci-dessous pour la démonstration de ce résultat). Finalement, les ouverts  $\phi(B^k \times \{z\})$ ,  $z \in Z$  de  $(X, \delta)$  étant disjoints,  $Z$  est dénombrable.

**DÉMONSTRATION DU LEMME 6.9.** On fixe  $z \in Z$  et on pose  $U = \phi(B^k \times \{z\})$ , c'est un disque plongé dans  $\mathbb{R}^D$ . Soit  $\delta_U$  la distance géométrique sur  $U$ , on a

$$\delta_U \geq \delta \geq d$$

où  $d$  est la distance Euclidienne de  $\mathbb{R}^D$ . L'inégalité  $\delta_U \geq \delta$  découle de l'observation que toute courbe  $C^1$  sur  $U$  est dans  $\mathcal{C}$ . La proposition 5.3 implique que  $\delta_U$  et  $d$  (et donc aussi  $\delta$ ) engendrent la même topologie sur  $U$ . Comme l'application  $\phi_z$  est un homéomorphisme à valeurs dans  $(U, d)$ , c'est un homéomorphisme à valeurs dans  $(U, \delta)$ .

Il reste à démontrer que  $U$  est un ouvert de  $(X, \delta)$ . Pour tout  $x_0 = \phi(y_0, z) \in U$ , il existe  $R > 0$  tel que  $\bar{B}^k(y_0, R) \subset B^k$  et il existe  $r > 0$  et tel que

$$B_\delta(x_0, r) \cap U \subset \phi(B^k(y_0, R/2))$$

où  $B_\delta$  est la boule de  $X$  pour la distance  $\delta$ . Soit  $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow X$  une courbe de  $\mathcal{C}$  telle que  $\gamma(0) = x_0$  et qui n'est pas contenue dans  $U$ . Soit  $t_0 \geq 0$  le premier temps de sortie de  $\phi(B^k(y_0, R/2))$ ,  $t_0 = \inf\{t \in [0, 1], \gamma(t) \notin \phi(B^k(y_0, R/2))\}$ . Le point  $\gamma(t_0)$  appartient à  $\phi(\partial B^k(y_0, R/2))$ , où  $\partial B^k(y_0, R/2)$  est la sphère de rayon  $R/2$ , donc il n'appartient pas à  $B_\delta(x_0, r)$ . La longueur de  $\gamma$  est minorée par la longueur de la courbe  $\gamma|_{[0, t_0]}$ , donc par  $r$ . On conclut que toute courbe de  $\mathcal{C}$  issue de  $x_0$  qui sort de  $U$  est de longueur au moins  $r$ , et donc que  $B_\delta(x_0, r) \subset U$ .  $\square$

## 6.2 Cas des feuilletages

On dit que le champ de sous espaces  $E(x)$  engendre un feuilletage (ou qu'il est intégrable) si elle admet la propriété de redressement suivante :

Pour tout  $x \in M$ , il existe une carte  $\phi : (B^k \times B^l, 0) \rightarrow (M, x)$ , où  $B^k$  et  $B^l$  sont des boules ouvertes centrées en 0 dans  $\mathbb{R}^k$  et  $\mathbb{R}^l$ , telle que

$$E(\phi(y)) = d\phi_y(\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

pour tout  $y \in B^k \times B^l$ .

Le théorème de redressement des champs de vecteurs affirme que les champs de droites (champs de sous espaces de dimension 1) engendrent toutes des feuilletage, on verra que ce n'est pas le cas en dimension supérieure.

Étant donné un point  $x \in M$ , on appelle feuille de  $x$  l'ensemble  $X$  des points qui peuvent être reliés à  $x$  par une courbe tangente à la distribution. La dernière étape de la preuve du Théorème 6.2 permet de montrer, dans le cas d'un feuilletage :

**Proposition 6.10.** *Pour tout  $x \in X$ , il existe une carte  $\phi : (B^d \times B^l, 0) \rightarrow (M, x)$ , où  $B^d$  et  $B^l$  sont des boules ouvertes centrées en 0 dans  $\mathbb{R}^d$  et  $\mathbb{R}^l$ , ayant les propriétés suivantes :*

- $\phi$  redresse  $E$ , c'est à dire que  $E(\phi(y)) = d\phi_y(\mathbb{R}^d \times \{0\})$  pour tout  $y \in B^d \times B^l$ .
- $\phi^{-1}(X) = B^d \times Z$

où  $Z$  est une partie dénombrable de  $B^l$ .

La différence par rapport à l'énoncé général du théorème de l'orbite est que la dimension  $d$  de  $X$  est bien celle des sous-espaces.

## 7 Espaces métriques localement compacts

On décrit quelques propriétés des espaces métriques localement compacts qui donneront le contexte topologique des variétés de dimension finie. Une suite exhaustive de compacts dans  $X$  est une suite  $K_i$  de parties compactes de  $X$  qui recouvrent  $X$ , et telles que  $K_i$  est contenu dans l'intérieur de  $K_{i+1}$ .

**Proposition 7.1.** *Soit  $X$  un espace métrique localement compact. Si  $X$  est connexe ou séparable, alors  $X$  admet une suite exhaustive de compacts.*

**DÉMONSTRATION.** Pour chaque point  $x \in X$ , on définit le réel  $r(x)$  comme le suprémum des rayons  $r$  tels que la boule fermée  $B(x, r)$  est compacte. Si il existe un point  $x$  tel que  $r(x) = +\infty$ , alors on pose  $K_i = B(x, i)$ .

Sinon,  $r(x)$  prend des valeurs réelles strictement positives (car  $X$  est localement compacte). Pour tous  $x$  et  $y$ , la boule  $B(y, r)$  est contenue dans la boule  $B(x, r + d(x, y))$ , donc  $r(y) \leq r(x) + d(x, y)$ . La fonction  $r$  est donc 1-Lipschitz, donc continue.

A tout compact  $K$ , on associe la réunion  $K'$  des boules fermées  $B(x, r(x)/2)$  centrées sur  $K$ . Montrons que  $K'$  est compact. Pour ceci on considère une suite  $x_n$  de points de  $K'$ . Chaque point  $x_n$  est dans une boule  $B(y_n, r(y_n)/2)$ , avec  $y_n \in K$ . Comme  $K$  est compact, on peut supposer en prenant une sous-suite que  $y_n$  a une limite  $y$  dans  $K$ . Comme  $r$  est continue, on peut de plus supposer que  $r(y_n) \leq 3r(y)/4$  pour tout  $n$  et donc que  $x_n$  est dans la boule compacte  $B(y, 3r(y)/4)$  pour  $n$  assez grand. La suite  $x_n$  admet donc une sous-suite convergente.

La réunion des boules ouvertes  $\overset{\circ}{B}(x, r(x)/2)$ ,  $x \in K$  est un ouvert contenu dans  $K'$  et contenant  $K$ , donc  $K$  est contenu dans l'intérieur de  $K'$ .

PREUVE DANS LE CAS CONNEXE : On construit maintenant la suite de compacts suivante : On prend n'importe quel compact  $K_1$  non vide (par exemple un point), et on pose  $K_{i+1} = (K_i)'$ .

Pour montrer que c'est une suite exhaustive de compacts, il suffit de montrer que la réunion  $U$  des  $K_i$  est égale à  $X$ . Comme  $U$  est la réunion des intérieurs des  $K_i$ , c'est un ouvert. Montrons maintenant qu'elle est fermée, et donc égale à  $X$  par connexité.

Considérons une suite  $x_n \in U$  telle que  $x_n \rightarrow x$  dans  $X$ . Choisissons  $n$  assez grand pour que  $r(x_n) > r(x)/2$  et  $d(x_n, x) < r(x)/4$ . Comme  $x_n \in U$ , il existe  $i$  tel que  $x_n \in K_i$ , et donc

$$x \in B(x_n, r(x)/4) \subset B(x_n, r(x_n)/2) \subset K_i' = K_{i+1}$$

PREUVE DANS LE CAS SÉPARABLE : On considère une suite dense  $x_i$ , et on fait comme ci-dessus, mais en posant  $K_{i+1} = (K_i)' \cup \{x_{i+1}\}$ . Comme  $\overset{\circ}{B}(x_i, r(x_i)/2) \subset K_i$ , on vérifie facilement que  $\cup K_i = X$ . □

**Corollary 7.2.** *Tout espace métrique localement compact et connexe est séparable.*

Ceci découle immédiatement de l'existence d'une suite exhaustive de compacts. On rappelle qu'une application  $f$  entre espaces topologiques est dite propre si la preimage par  $f$  de tout compact est compacte.

**Corollary 7.3.** *Si  $X$  est un espace métrique localement compact séparable, alors il existe une fonction continue et propre  $f : X \rightarrow [0, \infty)$ .*

L'existence d'une fonction positive propre implique celle d'une suite exhaustive de compacts, il suffit de prendre  $K_i = \{f \leq i\}$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $K_i$  une suite exhaustive de compacts. Posons  $a_i = d(K_i, K_{i+1}^c)$ , c'est un réel strictement positif. On considère la fonction  $f(x) := \sum_{i \geq 1} d(K^i, x)/a_i$ . La somme est localement finie, donc la fonction  $f$  est bien définie, et elle est continue. Si  $x$  n'est pas dans  $K_{j+1}$ , alors  $d(x, K_i) \geq d(K_{j+1}^c, K_i)$  pour tout  $i$ , donc  $f(x) \geq j$ .

Autrement dit, le fermé  $\{f \leq j\}$  est contenu dans  $K_j$ , il est donc compact. □

**Corollary 7.4.** *Si  $(X, d)$  est un espace métrique séparable localement compact, alors il est muni d'une distance complète  $D$  qui engendre la même topologie que  $d$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $f$  une fonction propre et positive sur  $X$ . On pose  $D(x, y) = d(x, y) + |f(y) - f(x)|$ , on vérifie facilement que c'est une distance. Comme  $D \geq d$ , la topologie engendrée par  $D$  est plus forte que celle de  $d$ . Réciproquement, si  $x_n \rightarrow x$  dans  $(X, d)$ , alors, par continuité de  $f$ ,  $D(x_n, x) \rightarrow 0$ . On conclut donc que les deux distances engendrent la même topologie.

Si  $x_n$  est une suite de Cauchy pour  $D$ , alors la suite  $f(x_n)$  est bornée. La suite  $x_n$  est donc contenue dans une partie compacte de  $X$ , et donc elle converge. □

**Corollary 7.5.** *Le compactifié d'Alexandroff d'un espace métrique localement compact séparable  $(X, d)$  est métrisable.*

DÉMONSTRATION. Posons  $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ . On considère une fonction propre positive  $f$  sur  $X$ , et on pose  $g = 1 - \arctan f$ , qui est une fonction propre de  $X$  dans  $]0, 1]$ . On pose alors

$$D(x, y) = \min(d(x, y) + |g(y) - g(x)|, g(x) + g(y)).$$

On vérifie facilement que  $|g(y) - g(x)| \leq D(x, y)$ . Vérifions maintenant l'inégalité triangulaire pour  $D$ . On considère trois points  $x, y, z$  dans  $X$ .

Dans le cas où  $D(x, y) = d(x, y) + |g(y) - g(x)|$  et  $D(z, y) = d(z, y) + |g(z) - g(y)|$ , on a

$$D(x, y) \leq d(x, z) + |g(z) - g(x)| \leq D(x, y) + D(y, z).$$

Dans le cas où  $D(x, y) = g(y) + g(x)$  et  $D(y, z) = g(z) + g(y)$ , l'inégalité

$$D(x, z) \leq g(x) + g(z) \leq D(x, y) + D(y, z)$$

est évidente.

Dans le cas où  $D(x, y) = d(x, y) + |g(y) - g(x)|$  et  $D(y, z) = g(y) + g(z)$ , alors

$$D(x, z) \leq g(z) + g(x) \leq g(z) + g(y) + D(x, y) = D(y, z) + D(x, y).$$

Nous avons vérifié l'inégalité triangulaire pour  $D$ , qui est donc une distance sur  $X$ . On vérifie facilement que  $D$  et  $d$  ont les mêmes suites convergentes. On définit alors  $\hat{d}$  sur  $\hat{X}$  par  $\hat{d} = D$  sur  $X \times X$ ,

$$\hat{d}(x, \infty) = \hat{d}(\infty, x) = g(x) \quad \forall x \in X,$$

et bien sur  $d(\infty, \infty) = 0$ . Vérifions l'inégalité triangulaire. Comme  $D$  est une distance sur  $X$ , il suffit de constater que

$$\hat{d}(x, y) = D(x, y) \leq g(x) + g(y) = \hat{d}(x, \infty) + \hat{d}(\infty, y)$$

et

$$\hat{d}(x, \infty) = g(x) \leq g(y) + D(x, y) = \hat{d}(y, \infty) + \hat{d}(x, y)$$

pour tous  $x$  et  $y$  dans  $X$ . Il est facile de vérifier directement que  $(\hat{X}, \hat{d})$  est compact. En effet, si  $x_n$  est une suite de  $X$ , ou bien  $\liminf g(x_n) = 0$ , et  $x_n$  admet une sous-suite qui converge vers  $\infty$ , ou bien  $\liminf g(x_n) > 0$ , et  $x_n$  est contenue dans un compact de  $X$ .  $\square$

Une partition de l'unité localement finie est une famille  $f_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$  de fonctions continues qui ont la propriété que, pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  et une famille finie  $A$  d'indices tels que toutes les fonctions  $f_\alpha, \alpha \notin A$  sont identiquement nulles sur  $V$ , et qui de plus vérifient  $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$  pour tout  $x$ , (la somme n'implique qu'un nombre fini de termes non nuls en chaque point  $x$  au vu du caractère localement fini). La partition finie  $(f_\alpha)$  est dite subordonnée au recouvrement ouvert  $(U_\alpha)$  si le support de  $f_\alpha$  est contenu dans  $U_\alpha$  pour tout  $\alpha$ . On dit qu'un espace topologique admet des partitions de l'unité si on peut subordonner une partition localement finie à tout recouvrement ouvert.

**Proposition 7.6.** *Soit  $X$  un espace métrique séparable localement compact. Alors  $X$  admet des partitions de l'unité, c'est à dire que, pour tout recouvrement ouvert de  $X$ , il existe une partition de l'unité localement finie subordonnée à ce recouvrement.*

DÉMONSTRATION. Soit  $(U_\alpha, \alpha \in A)$  un recouvrement ouvert de  $X$ , et  $K_i$  une suite exhaustive de compacts. On recouvre  $K_2$  par un nombre fini de boules ouvertes dont les adhérences sont contenues dans l'un des ouverts  $U_\alpha$  et dans  $\overset{\circ}{K}_3$ . On appelle  $\mathcal{B}_2$  cette famille de boules ouvertes. Pour tout  $i \geq 3$ , on recouvre le compact  $K_{i+1} - \overset{\circ}{K}_i$  par une famille finie  $\mathcal{B}_{i+1}$  de boules ouvertes dont les adhérences sont contenues dans l'un des ouverts de  $\mathcal{U}$  et dans l'ouvert  $\overset{\circ}{K}_{i+2} - K_{i-1}$ . A chacune des boules ouvertes  $B$  de la famille  $\mathcal{B} = \cup_{i \geq 2} \mathcal{B}_i$ , on associe une fonction continue  $f_B : X \rightarrow [0, \infty)$  qui est strictement positive sur la boule et nulle en dehors. La famille  $f_B$  est localement finie puisque les fonctions  $f_B, B \in \cup_{i \geq j+1} \mathcal{B}_i$  sont nulles sur  $\overset{\circ}{K}_j$ . La somme  $f = \sum_{B \in \mathcal{B}} f_B$  est donc une fonction continue à valeurs strictement positives. Les fonctions  $g_B := f_B/f$  forment alors une partition de l'unité localement finie, qui est subordonnée à  $\mathcal{U}$ .

Les fonctions  $g_B := f_B/f$  forment alors une partition de l'unité localement finie, dont chacune des fonctions est à support dans l'un des ouverts  $U_\alpha$ . Choisissons maintenant une fonction  $a(B) : \mathcal{B} \rightarrow A$  qui, à chaque boule  $B \in \mathcal{B}$ , associe un indice  $a(B) \in A$  tel que  $B \in U_{a(B)}$ . Pour tout  $\alpha \in A$ , on définit la fonction  $h_\alpha := \sum_{B \in a^{-1}(\alpha)} g_B$ . Cette somme est localement finie et définit donc une fonction continue. La famille  $(h_\alpha)$  est une partition de l'unité localement finie de  $X$ . Vérifions que l'ouvert  $U_\alpha$  contient le support de  $f_\alpha$ . Pour  $x \notin U_\alpha$ , il existe un voisinage  $V$  de  $x$  qui n'intersecte qu'un nombre fini des boules  $B$ . On peut de plus supposer en restreignant  $V$  que chacune de ces boules contient  $x$  dans son adhérence, et donc qu'aucune de ces boules n'est contenue dans  $U_\alpha$ . Pour chacune de ces boules, on a donc  $a(B) \neq \alpha$ , ce qui implique que  $h_\alpha$  est nulle sur  $V$ .  $\square$

En fait, tout espace métrique admet des partitions de l'unité, mais c'est un peu plus difficile à montrer.

**Corollary 7.7.** *Tout espace métrique localement compact et localement connexe (c'est le cas des variétés topologiques) admet des partitions de l'unité.*

DÉMONSTRATION. Soit  $(X_\beta)$  les composantes connexes de  $X$  (elles sont ouvertes, et elles connexes donc séparables), et soit  $(U_\alpha)$  un recouvrement ouvert de  $X$ . On considère une partition de l'unité  $f_{\alpha\beta}$  adaptée au recouvrement ouvert  $(U_\alpha \cap X_\beta)$  et on note  $f_\alpha$  la fonction  $\sum_\beta f_{\alpha\beta}$ , c'est à dire la fonction dont la restriction à  $X_\beta$  est égale à  $f_{\alpha\beta}$ . C'est une partition de l'unité de  $X$ .  $\square$

Un espace topologique est dit paracompact si il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un sous recouvrement localement fini. Il est (presque) évident qu'un espace qui admet des partitions de l'unité est paracompact. Réciproquement, il est classique en topologie (depuis Bourbaki) que tout espace paracompact admet des partitions de l'unité. Démontrons la variante qui nous sera utile.

**Proposition 7.8.** *Soit  $M$  un espace paracompact et soit  $\mathcal{F}$  un sous espace vectoriel de  $C(M, \mathbb{R})$  qui est stable par somme localement finie et par quotient (par un élément de  $\mathcal{F}$  ne s'annulant pas), et qui a la propriété que, pour tout ouvert  $U$  de  $M$  et tout point  $x \in U$ , il existe  $f \in \mathcal{F}$ , à valeurs positives, à support dans  $U$ , et strictement positive en  $x$ . L'espace  $M$  admet alors des partitions de l'unité composées de fonctions de  $\mathcal{F}$ .*

On utilisera ce résultat dans le cas où  $M$  est une variété et où  $\mathcal{F}$  est un l'ensemble des fonctions  $C^k$  sur  $M$ . Dans le cas général d'un espace paracompact  $M$ , il n'est pas évident que l'espace  $\mathcal{F} = C^0(M, \mathbb{R})$  vérifie les hypothèse ci-dessus, mais c'est vrai (tout espace paracompact est normal).

DÉMONSTRATION. Soit  $(U_\alpha)$  un recouvrement ouvert de  $M$ . Il existe une famille  $f_\beta, \beta \in B$  de fonctions de  $\mathcal{F}$  à valeurs positives, subordonnée au recouvrement  $U_\alpha$  (c'est à dire que pour tout  $\beta$  il existe  $\alpha$  tel que  $f_\beta$  est à support dans  $U_\alpha$ ) et telle que pour tout  $x$  il existe  $\beta$  tel que  $f_\beta(x) > 0$ . Comme  $M$  est paracompact, on peut extraire un sous recouvrement localement fini  $B' \subset B$  du recouvrement ouvert  $\{f_\beta > 0\}, \beta \in B$ . La somme  $s(x) = \sum_{\beta \in B'} f_\beta(x)$  est localement finie, donc elle définit une fonction  $s$  continue et strictement positive. La famille  $f_\beta/s, \beta \in B'$  est une partition

de l'unité dont chaque fonction est à support dans un des ouverts  $U_\alpha$ . On se ramène à une partition de l'unité subordonnée à  $U_\alpha$  comme dans la dernière étape de la preuve de la Proposition 7.6.  $\square$

## 8 Variétés

### 8.1 Première définition

Soit  $M$  un espace métrique. On dit que  $M$  est une variété topologique de dimension  $d$  si il est localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^d$ . On appelle carte topologique de  $M$  tout homéomorphisme entre un ouvert  $U$  de  $M$  et un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^d$ .

Une famille  $\phi_\alpha U_\alpha \rightarrow V_\alpha, \alpha \in A$  de cartes de  $M$  est un atlas  $C^r$  si les applications

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sont  $C^r$  et si les domaines  $U_\alpha$  recouvrent  $M$ . Notons que les ensembles  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  sont des ouverts de  $V_\alpha$ , donc de  $\mathbb{R}^d$ .

**Définition 8.1.** Une variété de classe  $C^r$  est un espace métrique  $M$  munie d'un atlas  $C^r$ .

Les applications  $C^k, k \leq r$  entre variétés  $C^r$  sont les applications  $C^k$  dans les cartes. Plus précisément, si  $M$  et  $N$  sont deux variétés munies de leurs atlas  $(U_\alpha, \phi_\alpha), \alpha \in A$  et  $(V_\beta, \psi_\beta), \beta \in B$ , l'application  $f : M \rightarrow N$  est dite  $C^k$  si  $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$  est  $C^k$  sur son domaine  $\phi_\alpha(U_\alpha)$  pour tous  $\alpha$  et  $\beta$ . Comme  $(\phi_\alpha)$  et  $(\psi_\beta)$  sont des atlas, il suffit de vérifier que, pour tout  $x$ , il existe  $\alpha \in A$  et  $\beta \in B$  tels que  $x \in U_\alpha, f(x) \in V_\beta$ , et  $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$  est  $C^k$  au voisinage de  $\phi_\alpha(x)$ .

Nous appellerons carte  $C^r$  de la variété  $M$  tout couple  $(U, \phi)$ , où  $\phi$  est un plongement différentiable dans  $\mathbb{R}^d$ . L'ensemble des cartes  $C^r$  est un atlas  $C^r$  qui contient l'atlas initial de  $M$ .

Toute sous variété  $M$  de  $\mathbb{R}^D$  est naturellement munie d'une structure de variété dont les cartes sont les difféomorphismes entre des ouverts de  $M$  et des ouverts de  $\mathbb{R}^d$ .

Toute variété différentiable est localement compacte et localement connexe, donc paracompacte. Elle admet des partitions de l'unité  $C^\infty$ , ce qui découle de la proposition 7.8 une fois qu'on a constaté qu'il existe une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^d$  qui est positive sur la boule unité et nulle en dehors.

**Exercice 8.1.** — Montrer que la fonction  $t \mapsto e^{-1/t^2}$  (étendue par 0 en 0) est  $C^\infty$ .

— Montrer que la fonction qui vaut  $f(t) = e^{(2-t)^{-1}(1-t)^{-1}}$  sur  $]1, 2[$  et 0 en dehors est  $C^\infty$ .

— En posant  $g(t)$  la primitive de  $f$  qui vaut 0 en  $t = 2$ , montrer que la fonction  $x \mapsto g(|x|/2)$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^d$ , positive sur la boule unité, et nulle en dehors.

Les partitions de l'unité permettent de montrer :

**Propriété 8.2.** Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction (sans régularité) localement majorée sur la variété  $M$ . Alors il existe une fonction  $g$  de classe  $C^\infty$  telle que  $g \geq f$ .

DÉMONSTRATION. Tout point  $z \in M$  admet un voisinage ouvert  $U_z$  sur lequel  $f$  est majorée par le réel  $a_z > 0$ . On considère une partition de l'unité localement finie  $(h_z)$ , de classe  $C^\infty$ , adaptée au recouvrement  $(U_z)$ . On pose alors  $g = \sum_z a_z h_z$ .  $\square$

On peut ainsi améliorer la Proposition 7.4 :

**Proposition 8.3.** Sur toute variété séparable  $M$ , il existe une fonction propre à valeurs positives de classe  $C^\infty$ .

La séparabilité de  $M$  est ici une condition nécessaire.

DÉMONSTRATION. On considère une suite exhaustive de compacts  $K_i$  et la fonction  $f$  qui vaut  $i$  sur  $K_i - K_{i-1}$ . On applique alors le résultat précédent pour trouver une fonction lisse  $g$  telle que  $g \geq i + 1$  en dehors de  $K_i$ .  $\square$

## 8.2 Seconde définition

Soit  $M$  un ensemble (a priori sans structure) et soit  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha, \alpha \in A$  une famille d'applications bijectives, où les  $U_\alpha$  sont des parties de  $M$  qui recouvrent  $M$  et les  $V_\alpha$  des ouverts de  $\mathbb{R}^d$ . On dit que les applications  $\phi_\alpha$  forment un atlas  $C^r$  si chacun des ensembles  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), (\alpha, \beta) \in A^2$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et si chacune des applications

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^d \supset \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \mathbb{R}^d$$

est  $C^r$ .

**Définition 8.4.** Une pré-variété de classe  $C^r$  est un ensemble  $M$  muni d'un atlas  $C^r$ .

Il existe alors une unique topologie sur  $M$  telle que les applications  $\phi_\alpha$  sont des homéomorphismes, c'est la topologie dont les ouverts sont les parties  $U$  de  $M$  telles que  $\phi(U \cap U_\alpha)$  est ouvert (dans  $\mathbb{R}^d$ ) pour tout  $\alpha$ .

On remarque que les domaines  $U_\alpha$  sont des ouverts pour cette topologie. De plus, si  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , alors l'ensemble  $\phi_\alpha^{-1}(V)$  est ouvert pour tout  $\alpha$ . En effet, pour tout  $\beta$ ,

$$\phi_\beta(\phi_\alpha^{-1}(V)) = (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(V \cap \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta))$$

est ouvert puisque  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  est un difféomorphisme. Les applications  $\phi_\alpha$  sont donc continues. La continuité des applications réciproques est claire.

La topologie de  $M$  associée à l'atlas  $\phi_\alpha$  est séparée, mais elle n'est pas nécessairement métrisable.

**Propriété 8.5.** Une variété ( $C^r$ ) est une pré-variété ( $C^r$ ) dont la topologie sous-jacente est métrisable.

La littérature utilise souvent le terme variété pour ce que nous avons appelé pré-variété. La proposition 7.8 implique que toute pré-variété paracompacte admet des partitions de l'unité  $C^\infty$ .

**Proposition 8.6.** Toute pré-variété paracompacte est une variété.

## 8.3 Plongement

On montre ici que la notion de variété n'est pas vraiment plus générale que la notion de sous variété :

**Théorème 8.7** (Whitney). Pour toute variété  $C^\infty$  séparable  $M$ , il existe un plongement  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ , de classe  $C^\infty$ , dont la première composante est propre. Son image  $F(M)$  est donc une sous variété fermée de  $\mathbb{R}^{2d+1}$  difféomorphe à  $M$ .

L'hypothèse de séparabilité est bien sûr nécessaire. On rappelle que toute variété connexe est séparable. On rappelle aussi que, si la première composante de  $F$  est propre, alors  $F$  est propre.

**Lemme 8.8.** Soit  $M$  une variété de dimension  $d$  admettant un atlas fini. Alors il existe  $D \in \mathbb{N}$  et un plongement  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^D$ .

DÉMONSTRATION. Soient  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^d, 1 \leq i \leq k$  un atlas fini de  $M$ . Les ouverts  $U_i$  recouvrent donc  $M$  et les applications  $\phi_i$  sont des plongements. Soit  $f_i$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert  $U_i$ . Les fonctions  $f_i$  sont à support dans  $U_i$ . L'application  $f_i \phi_i$  peut donc s'étendre en une application  $C^r$  sur tout  $M$ , valant 0 en dehors de  $U_i$ . L'application

$$F : M \ni x \mapsto (f_1(x), f_1(x)\phi_1(x), f_2(x), f_2(x)\phi_2(x), \dots, f_k(x), f_k(x)\phi_k(x)) \in \mathbb{R}^{k(d+1)}$$

est alors une immersion injective. En effet, si  $F(x) = F(y)$ , alors  $f_i(x) = f_i(y)$  pour tout  $i$ . En choisissant un indice  $i$  tel que  $f_i(x) \neq 0$  (et donc  $x \in U_i$  et  $y \in U_i$ ) on déduit alors de l'égalité  $f_i(x)\phi_i(x) = f_i(y)\phi_i(y)$  que  $\phi_i(x) = \phi_i(y)$  et donc que  $x = y$  puisque  $\phi_i$  est injective sur  $U_i$ .

Pour montrer que  $F$  est une immersion, on calcule

$$dF_x \cdot v = (df_{1x} \cdot v, \phi_1(x)df_{1x} \cdot v + f_1(x)d\phi_{1x} \cdot v, \dots, \phi_k(x)df_{kx} \cdot v + f_k(x)d\phi_{kx} \cdot v).$$

Si  $v$  est dans le noyau de cette application linéaire, alors  $df_{ix} \cdot v = 0$  pour tout  $i$ , donc  $f_i(x)d\phi_{ix} \cdot v = 0$ . En choisissant  $i$  tel que  $f_i(x) > 0$ , on conclut que  $d\phi_{ix} \cdot v = 0$ , et, comme  $\phi_i$  est une immersion en  $x$ , que  $v = 0$ .

Finalement, on considère une fonction propre  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . L'application  $\psi = (f, F)$  est une immersion injective car  $F$  l'est, et elle est propre car  $f$  l'est. C'est donc un plongement.  $\square$

**Lemme 8.9.** Soit  $M$  une sous variété de  $\mathbb{R}^D$ , de dimension  $d$ . Alors l'ensemble des applications linéaires  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$  telles que  $L|_M$  est une immersion injective est dense dans  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$ .

En conséquence, Toute variété de dimension  $d$  admettant un atlas fini admet une immersion injective à valeurs dans  $\mathbb{R}^{2d+1}$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathring{T}M \subset TM$  l'ouvert constitué des points  $(x, v) \in TM$  tels que  $v \neq 0$ . L'application

$$e : \mathring{T}M \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1}) \ni (x, v, L) \mapsto L \cdot v \in \mathbb{R}^{2d+1}$$

est une submersion. En effet on a  $\partial_L e_{x,v,L} \cdot \ell = \ell \cdot v$ . Comme  $v \neq 0$  l'application linéaire

$$\partial_L e_{x,v,L} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1}) \ni \ell \mapsto \ell \cdot v \in \mathbb{R}^{2d+1}$$

est surjective. On en déduit que  $e^{-1}(0)$  est une sous variété de codimension  $2d + 1$  de  $\mathring{T}M \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$ , donc de dimension  $n(2d + 1) - 1$ . Le cas facile du théorème de Sard implique que la projection  $\Sigma_1$  de  $e^{-1}(0)$  sur le facteur  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$  est de mesure nulle. Une application linéaire  $L$  est dans  $\Sigma_1$  si et seulement si il existe un point  $(x, v) \in \mathring{T}M$  tel que  $d(L \circ f)_x \cdot v = 0$ , c'est à dire si et seulement si  $L \circ f$  n'est pas une immersion.

Soit  $\mathring{M}^2 \subset M^2$  l'ouvert constitué des couples  $(x, y)$  tels que  $x \neq y$ . Considérons l'application

$$h : \mathring{M}^2 \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1}) \ni (x, y, L) \mapsto L(f(y) - f(x)) \in \mathbb{R}^{2d+1},$$

qui est une submersion. En effet, pour tout  $(x, y) \in \mathring{M}^2$ , on a  $f(y) \neq f(x)$  puisque  $f$  est injective. L'application  $\partial_L h : \ell \mapsto \ell(f(y) - f(x))$  est donc surjective. La préimage  $h^{-1}(0)$  est donc une sous variété de dimension  $n(2d + 1) - 1$ , et sa projection  $\Sigma_2$  sur le facteur  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{2d+1})$  est de mesure nulle. Or  $\Sigma_2$  est précisément l'ensemble des applications  $L$  telles que  $L \circ f$  n'est pas injective.

L'ensemble  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  est de mesure nulle, et, pour tout  $L$  est dans son complémentaire,  $L \circ f$  est une immersion injective.  $\square$

**Exercice 8.2.** Soit  $M$  une sous variété de dimension  $d$ . Montrer qu'il existe une immersion de  $M$  dans  $\mathbb{R}^{2d}$ . On peut pour ceci considérer la restriction de l'application  $e$  apparaissant dans la démonstration du Lemme 8.9 à la sous variété

$$STM = \{(x, v) \in TM, |v| = 1\}.$$

**Lemme 8.10.** Soit  $M$  une variété et  $f$  une fonction propre sur  $M$ . Alors il existe un plongement  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^{4d+3}$  dont la première composante est égale à  $f$ .

DÉMONSTRATION. Considérons une partition de l'unité  $g_i$  de  $\mathbb{R}$  subordonnée au recouvrement  $]i, i + 2[$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Soit  $U_i$  l'ouvert  $f^{-1}(]i, i + 2[)$ . Comme  $U_i$  est relativement compacte, c'est une variété admettant un atlas fini, et donc un plongement  $\psi_i$  dans  $\mathbb{R}^{2d+1}$ . On prolonge l'application  $(g_i \circ f)\psi_i$  par 0 en dehors de  $U_i$ . L'application (dans laquelle les sommes se réduisent à un seul terme pour chaque  $x$ )

$$F : x \mapsto (f(x), \sum_l g_{2l} \circ f(x)\psi_{2l}(x), \sum_l g_{2l+1} \circ f(x)\psi_{2l+1}(x))$$

est un plongement. Comme la première composante de  $F$  est une fonction propre,  $F$  est propre et il suffit de montrer que c'est une immersion injective. Si  $F(x) = F(y)$ , alors  $f(x) = f(y)$ . Il existe alors au plus deux entiers  $i$  tels que  $g_i \circ f(x) > 0$ , l'un est pair, on l'écrit l'autre impair.

Supposons qu'il existe un entier pair  $i = 2k$  tel que  $g_{2k} \circ f(x) > 0$ , cet entier est alors unique, et on a

$$g_{2k} \circ f(x)\psi_{2k}(x) = \sum_l g_{2l} \circ f(x)\psi_{2l}(x) = \sum_l g_{2l} \circ f(y)\psi_{2l}(y) = g_{2k} \circ f(y)\psi_{2k}(y)$$

donc  $\psi_{2k}(x) = \psi_{2k}(y)$ , ce qui implique que  $x = y$ . Si il n'existe pas d'entier pair tel que  $g_i \circ f(x) > 0$ , alors il existe un unique entier impair tel que  $g_i \circ f(x) > 0$ , ce cas se traite de la même façon.

Pour montrer que  $F$  est une immersion, on calcule

$$dF_x \cdot v = (df_x \cdot v, \sum_l (\psi_{2l}(x)d(g_{2l} \circ f)_x + g_{2l} \circ f(x)d\psi_{2l}|_x \cdot v), \\ \sum_l (\psi_{2l+1}(x)d(g_{2l+1} \circ f)_x + g_{2l+1} \circ f(x)d\psi_{2l+1}|_x \cdot v).$$

Si  $v$  est dans le noyau de cette application linéaire, alors  $df_x \cdot v = 0$ , donc  $d(g_i \circ f)_x \cdot v = 0$  pour tout  $i$ . Alors, pour tout  $i$  tel que  $g_i \circ f(x) > 0$ , on a  $d\psi_i(x) \cdot v = 0$ , ce qui implique que  $v = 0$ .  $\square$

PREUVE DU THÉORÈME DE WHITNEY. On considère le plongement  $F = (f, g)$  de  $M$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4d+2}$  donné par le Lemme précédent, où  $f$  est une fonction propre. Soit  $\phi : \mathbb{R}^{4d+2} \rightarrow B^{4d+2}$  (la boule unité ouverte) une difféomorphisme. Alors  $(f, \phi \circ g)$  est un plongement de  $M$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{4d+2}$ . Au vu du lemme 8.9, il existe une application linéaire  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{4d+3}, \mathbb{R}^{2d+2})$ , dont le coefficient  $L_{11}$  est non nul, et telle que  $L \circ (f, g)$  est une immersion injective. La première composante de  $L \circ (f, g)$  s'écrit  $L_{11}f + l \circ g$ , où  $l$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{R}^{4d+2}$ . Comme la fonction  $l \circ g$  est bornée, la fonction  $L_{11}f + l \circ g$  est propre. L'application  $L \circ (f, g)$  est donc un plongement.  $\square$

## 8.4 Feuilles

Soit  $M$  une sous variété de  $\mathbb{R}^D$  et  $X$  une partie connexe de  $M$  qui satisfait la conclusion du théorème de l'orbite :

Pour tout  $x \in X$ , il existe un plongement  $\phi : (B^k \times B^l, (0, 0)) \longrightarrow (M, x)$ , où  $B^k$  et  $B^l$  sont des boules ouvertes centrées en 0 dans  $\mathbb{R}^k$  et  $\mathbb{R}^l$ , ayant la propriété suivante :

$$\phi^{-1}(X) = B^k \times Z$$

où  $Z$  est une partie dénombrable de  $B^l$ . L'ensemble  $X$  est alors connexe par arcs  $C^1$ , cela se démontre exactement comme pour les sous variétés. On munit  $X$  de la distance géométrique  $\delta(x, x')$  définie comme l'infimum des longueurs des courbes de  $X$  joignant  $x$  à  $x'$ . On peut alors munir l'ensemble  $X$  d'une structure intrinsèque de variété :

**Proposition 8.11.** *Il existe une variété connexe  $N$  et une immersion  $J : N \longrightarrow M$  dont  $X$  est l'image. L'immersion  $J$  est un homéomorphisme de  $N$  dans  $(X, \delta)$ . Si  $\tilde{N}$  est une autre variété qui admet une immersion injective  $\tilde{J} : \tilde{N} \longrightarrow M$  d'image  $X$ , alors il existe un difféomorphisme  $g : \tilde{N} \longrightarrow N$  tel que  $\tilde{J} = J \circ g$ .*

L'ensemble  $X$  est une sous variété de  $M$  si et seulement si  $J$  est un plongement.

DÉMONSTRATION. On appelle paramétrisation locale de  $M$  adaptée à  $X$  en  $x$  tout plongement  $\phi : (B^k \times B^l, (0, 0)) \longrightarrow (M, x)$  tel que  $\phi^{-1}(X) = B^k \times Z$  avec  $Z$  dénombrable. On appelle carte locale adaptée à  $X$  en  $x$  l'inverse d'une paramétrisation locale adaptée à  $X$  en  $x$ . On a montré dans le lemme 6.9 que toute paramétrisation locale adaptée à  $x$  induit, pour tout  $z \in Z$ , une homéomorphisme de  $B^k \times \{z\}$  sur son image (munie de la distance  $\delta$ ).

Étudions d'abord l'unicité. Si  $J : N \longrightarrow M$  est une immersion injective d'image  $X$ , si  $Y$  est une variété, et si  $f : Y \longrightarrow M$  est une application différentiable à valeurs dans  $X$ , alors l'application  $f$  se factorise par  $J$ , c'est à dire qu'il existe une application différentiable  $g : Y \longrightarrow N$  telle que  $f = J \circ g$ .

L'existence (et l'unicité) de l'application  $g$  découle de l'injectivité de  $J$ . Pour montrer que  $g$  est différentiable, on considère un point  $y_0 \in Y$  et son image  $x_0 = f(y_0) \in X$ . On considère alors une carte adaptée  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$  de  $M$  en  $x_0$ . Comme  $f$  est à valeurs dans  $X$ , l'application  $\phi \circ f$  est à valeurs dans  $B^k \times Z$ . Comme les composantes connexes de  $Z$  sont ses points, la seconde composante de  $\phi \circ f$  est nulle au voisinage de  $z_0$ , c'est à dire que  $\phi \circ f$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ . La même remarque s'applique à l'application  $J : N \longrightarrow M$ , et l'application  $\phi \circ J : (N, J^{-1}(x_0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^k \times \{0\}, 0)$  est une immersion donc un difféomorphisme local, c'est à dire une carte de  $N$ . Dans cette carte, l'application  $g$  s'écrit  $(\phi \circ J) \circ g = \phi \circ f$ , qui est différentiable.

On peut donc factoriser  $\tilde{J} = J \circ g$ . Si  $\tilde{J}$  est aussi une immersion injective d'image  $X$ , on a aussi, réciproquement, que  $g^{-1}$  est différentiable,  $g$  est alors un difféomorphisme.

Si  $J$  est un plongement, alors son image  $X = J(N)$  est une sous-variété, comme nous l'avons déjà démontré. Réciproquement, si  $X$  est une sous-variété, le résultat d'unicité implique que toute immersion injective d'image  $X$  est un plongement.

Comme toute courbe  $x(t)$  de classe  $C^1$  se factorise par  $J$ , on conclut de la connexité par arcs  $C^1$  de  $X$  que  $N$  est connexe.

Venons-en à l'existence. Pour toute paramétrisation locale de  $M$ , on définit l'ensemble  $U_\phi := \phi^{-1}(B^k \times \{0\}) \subset X$ . Les applications  $\tilde{\phi} : U_\phi \longrightarrow B^k \times \{0\} \approx B^k$ , où  $\phi$  est une carte de  $M$  adaptée à  $X$ , forment un atlas de  $X$ . En effet, si  $\phi$  et  $\psi$  sont deux cartes de  $M$  adaptées à  $X$ , alors  $\tilde{\psi}^{-1}$  est un plongement de  $B^k$  dans  $M$ . L'application  $\phi \circ \tilde{\psi}^{-1}$  est définie sur l'ouvert  $W = \psi(\text{dom } \psi \cap \text{dom } \phi) \cap (B^k \times \{0\})$ . Son second facteur est localement constant donc le domaine de  $\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}^{-1}$  est un ouvert de  $W$ , sur lequel l'application  $\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}^{-1}$  coïncide avec  $\phi \circ \tilde{\psi}^{-1}$  et est donc différentiable. □

## 8.5 Quotients

Soit  $G$  un sous groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  qui en est aussi une sous variété. Une action de  $G$  sur une variété  $M$  est une application  $a : G \times M \longrightarrow M$ , de classe  $C^\infty$ , telle que  $a_{Id} = Id$  et telle que

$a_g \circ a_h = a_{gh}$  pour tous  $g$  et  $h$  de  $G$ , où  $a_g$  est l'application  $x \mapsto a(g, x)$ . L'application  $g \mapsto a_g$  est alors un morphisme du groupe  $G$  dans le groupe des difféomorphismes de  $M$ . On appelle orbite de  $x$  l'ensemble  $a(G, x) = a_x(G)$ .

On dit que l'action  $a$  est libre si l'application  $a_x : g \mapsto a(g, x)$  est injective pour tout  $x \in M$ .

On dit que l'action  $a$  est propre si l'application  $(g, x) \mapsto (a(g, x), x)$  est propre. De manière équivalente, l'action  $a$  est propre si, pour tout compact  $K$  de  $M$ , l'application  $a|_{G \times K}$  est propre.

En particulier, si  $G$  est compact, toute action de  $G$  est propre.

**Exercice 8.3.** Montrer que  $\mathbb{Z}^n$  est isomorphe à un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  qui est une sous-variété de dimension 0. Montrer que l'action de  $\mathbb{Z}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$  par translations est propre.

**Exercice 8.4.** Montrer qu'une action  $a$  est propre si et seulement si, pour tout  $K \in M$ , l'ensemble des  $g \in G$  tels que  $a_g(K) \cap K \neq \emptyset$  est compact.

Commençons par une remarque générale sur les actions de groupe.

**Proposition 8.12.** Soit  $a$  une action différentiable de  $G$  sur  $M$ . Pour tout  $x \in M$ , l'application  $a_x$  est de rang constant sur  $G$ , et le sous groupe isotrope  $I_x := a_x^{-1}(x)$  est une sous variété fermée de  $G$  de dimension  $d_G - k$  où  $k$  est le rang de  $da_x$ .

DÉMONSTRATION. En dérivant par rapport à  $h$  en  $h = Id$  l'expression  $a(gh, x) = a(g, a(h, x))$ , on obtient l'égalité  $\partial_g a(g, x) \circ dr_g(Id) = \partial_x a(g, x) \circ \partial_g a(Id, x)$  ou  $r_g$  est la multiplication à droite par  $g$ , qui est un difféomorphisme. Comme  $\partial_x a(g, x)$  est un isomorphisme, on conclut que le rang de  $d(a_x)_g = \partial_g a(g, x)$  est égal au rang de  $d(a_x)_{Id} = \partial_g a(Id, x)$ .

Le théorème de forme normale des applications de rang constant implique que  $I_x$  est une sous variété dont l'espace tangent en  $Id$  est le noyau de  $\partial_g a(Id, x)$ . □

Le théorème suivant permet notamment de munir le tore  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  d'une structure de variété qui fait de la projection un difféomorphisme local. Il donne aussi un cadre théorique contenant la fibration de Hopf (dans le cas  $G = S^1 = SO_2(\mathbb{R})$ ).

**Théorème 8.13.** Soit  $a(g, x)$  une action libre et propre du groupe  $G$  sur une variété  $M$ . Alors il existe une variété  $N$  de dimension  $d_M - d_G$  et une submersion  $\pi : M \rightarrow N$  ayant la propriété suivante :

Tout point  $z_0 \in N$  admet un voisinage  $U$  et un difféomorphisme  $\psi = (\pi, \theta) : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$  vérifiant

$$\psi \circ a(g, x) = (\pi(x), g\theta(x))$$

pour tout  $(g, x) \in G \times \pi^{-1}(U)$ . On dit que  $\pi : M \rightarrow N$  est un fibré principal de groupe  $G$ .

Dans le cas où  $G$  est un groupe discret (c'est à dire muni de la topologie discrète), l'hypothèse que  $G$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  est inutile.

La submersion  $\pi$  n'est pas forcément propre (sauf si  $G$  est compact), c'est malgré tout une fibration.

DÉMONSTRATION. Pour tout  $x \in M$ , l'application  $a_x$  est un plongement propre de  $G$  dans  $M$ . En effet, elle est propre en raison de la propriété de l'action  $a$ , et c'est une immersion en raison de la liberté de l'action, au vu de la proposition 8.12 (elle est de rang constant égal à  $d_G$ ). L'orbite du point  $x$  est donc une sous variété fermée. En fait, on a :

**Lemme 8.14.** Pour tout  $x_0 \in X$ , il existe un disque plongé  $D$  centré en  $x_0$  et tel que l'action  $a$  induit un plongement (c'est à dire un difféomorphisme sur son image) de  $G \times D$  dans  $M$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $d_G$  la dimension de  $G$ ,  $d_M$  la dimension de  $M$ , et  $d =: d_M - d_G$ . Considérons une immersion locale  $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (M, x_0)$  telle que l'image de  $d\phi_0$  est un supplémentaire de l'image de  $\partial_g a(Id, x_0)$ . L'application  $A : G \times \mathbb{R}^d \ni (g, y) \mapsto a(g, \phi(y))$  est alors un difféomorphisme local en  $(Id, 0)$ . Il existe donc une boule ouverte  $B^d(0, r)$  et un voisinage ouvert  $U$  de  $Id$  dans  $G$  tels que  $A$  est un plongement (c'est à dire un difféomorphisme sur son image) sur  $B^d(0, r) \times U$ .

Montrons que  $A$  est un difféomorphisme local en chaque point de  $G \times B^d(0, r)$ . On a en effet  $A(gh, x) = a_g(A(h, x))$ , et, en différenciant par rapport à  $(h, x)$  en  $h = Id$ , on obtient

$$dA_{(g,x)} \cdot (gw, v) = d(a_g)_{\phi(x)} \circ dA_{(Id,x)} \cdot (w, v).$$

Comme  $A$  est un difféomorphisme local en  $(Id, x)$  c'est un difféomorphisme locale en  $(g, x)$ .

Montrons finalement que  $A$  peut être rendu injective en réduisant la boule  $B^d$ . Si ce n'était pas le cas, il existerait deux suite  $y_n$  et  $y'_n$  tendant vers 0 dans  $B^d(0, r)$  et des suites  $h_n \neq h'_n$  dans  $G$  telles que  $A(g_n, y_n) = A(g'_n, y'_n)$ . En notant  $x_n = \phi(y_n)$ ,  $x'_n = \phi(y'_n)$ , ceci implique que  $x_n = a(h_n^{-1}h'_n, x'_n)$ , c'est à dire que  $x_n = a(g_n, x'_n)$  avec  $g_n \in G$ ,  $g_n \neq Id$ . Comme les suite  $x_n$  et  $x'_n$  restent dans un compact, la propriété de l'action implique que  $g_n$  reste dans un compact de  $G$ . On peut donc supposer que  $g_n$  converge vers un élément  $g$  de  $G$ . À la limite, on voit que  $x_0 = a(g, x_0)$  et donc  $g = Id$ . A partir d'un certain rang, on a donc  $g_n \in U$  et l'injectivité de  $A$  sur  $B^d(0, r) \times U$  implique (si  $g_n \neq Id$ ) que  $a(g_n, x'_n) = A(g_n, y'_n) \neq A(Id, y_n) = x_n$ , ce qui est une contradiction.

L'application  $A$  est un difféomorphisme local injectif, et donc un difféomorphisme sur son image. On pose alors  $D = \phi(B)$ , et  $a(g, x) = A(g, \phi^{-1}(x))$  est un difféomorphisme de  $G \times D$  sur son image.  $\square$

Soit  $N$  l'ensemble des orbites, et  $\pi : M \rightarrow N$  la projection naturelle qui, a un point, associe son orbite. Traitons d'abord l'aspect métrique.

**Lemme 8.15.** *Il existe une distance  $d_G$  sur  $M$ , compatible avec sa topologie usuelle, qui est invariante par l'action de  $G$ , c'est à dire que  $d_G(a(g, x), a(g, x')) = d_G(x, x')$  pour tout  $g \in G$ .*

DÉMONSTRATION. On munit le compactifié d'Alexandroff de  $M$  d'une distance  $d$  compatible avec la topologie de  $M$ , et l'on restreint cette distance à  $M$ . Elle a la propriété que  $d(x_n, x'_n) \rightarrow 0$  si les suites  $x_n$  et  $x'_n$  sortent de tout compact. On pose alors

$$d_G(x, x') = \max_{g \in G} d(a(g, x), a(g, x')).$$

On vérifie facilement que  $d_G$  est une distance. Montrons que le maximum est atteint. En effet, si  $g_n$  est une suite maximisante, alors l'une des suites  $a(g_n, x)$  et  $a(g_n, x')$  admet une valeur d'adhérence (sinon la distance  $d(a(g_n, x), a(g_n, x'))$  tendrait vers 0) ce qui implique que  $g_n$  admet une sous-suite convergente en raison de la propriété de l'action. Si  $g$  est la limite, on a  $d_G(x, x') = d(a(g, x), a(g, x'))$ .

Montrons finalement que la topologie engendrée par  $d_G$  est moins fine (et donc égale) à celle engendrée par  $d$ . Supposons que  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  mais qu'il existe  $g_n \in G$  tels que  $d(a(g_n, x_n), a(g_n, x)) > b > 0$  pour tout  $n$ . Alors l'un des suites  $a(g_n, x_n)$  ou  $a(g_n, x)$  admet une valeur d'adhérence dans  $M$ , donc  $g_n$  aussi au vu de la propriété de l'action. On peut donc supposer que  $g_n \rightarrow g$  et alors, pour la distance  $d$  sur  $M$ , on a  $a(g_n, x_n) \rightarrow a(g, x)$  et  $a(g_n, x) \rightarrow a(g, x)$  et donc  $d(a(g_n, x_n), a(g_n, x)) \rightarrow 0$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

On munit  $N$  de la distance

$$d_N(x, x') = \inf_{y \in \pi^{-1}(x), y' \in \pi^{-1}(x')} d_G(y, y') = \inf_{y' \in \pi^{-1}(x')} d_G(z, y')$$

pour tout  $z \in \pi^{-1}(x)$ . Montrons que  $d_N$  est bien une distance. Si  $d_N(x, x') = 0$ , alors pour tout  $y \in \pi^{-1}(x)$  il existe une suite  $y'_n \in \pi^{-1}(x')$  telle que  $d_G(y, y'_n) \rightarrow 0$ . Ceci implique que  $y$  est

contenu dans la fermeture de  $\pi^{-1}(x')$  et donc dans  $\pi^{-1}(x')$ . On a donc  $x = x'$ . Pour démontrer l'inégalité triangulaire  $d(x, x') + d(x', x'') \geq d(x, x'')$ , on fixe  $y' \in \pi^{-1}(x')$ , et on écrit

$$d(x, x') + d(x', x'') = \inf_{y, y''} (d_G(y, y') + d_G(y', y'')) \geq \inf_{y, y''} d_G(y, y'') = d(x, x''),$$

où les infimums sont pris sur  $y \in \pi^{-1}(x)$  et  $y'' \in \pi^{-1}(x'')$ . On remarque que la projection  $\pi : (M, d_G) \rightarrow (N, d_N)$  est 1-Lipschitz donc continue.

On munit  $N$  de l'atlas dont les paramétrisations locales sont les application  $\pi \circ \phi$ , où  $\phi : B \rightarrow M$  est un plongement d'un boule ouverte  $B$  de  $\mathbb{R}^d$  dans  $M$  vérifiant la conclusion du lemme précédent, c'est à dire tel que  $a$  induit un plongement de  $G \times \phi(B)$  dans  $M$ . Ces applications sont injectives car si deux points  $y$  et  $y'$  sont tels que  $\pi \circ \phi(y) = \pi \circ \phi(y')$ , alors il existe  $g \in G$  tel que  $a(g, \phi(y)) = \phi(y')$ , ce qui implique que  $\phi(y) = \phi(y')$  au vu de l'injectivité de  $a$  sur  $G \times \phi(B)$ , et donc que  $y = y'$ . L'ensemble  $a(G \times \phi(B))$  est une réunion d'orbite. Notons  $A_2^{-1}$  le second facteur de  $A^{-1}$ , qui est aussi l'application  $(\pi \circ \phi)^{-1} \circ \pi$ . L'application  $\phi \circ A_2^{-1}$  associe à tout point  $z \in a(G \times \phi(B))$  l'unique intersection de l'orbite de  $z$  avec le disque  $\phi(B)$ . Elle est différentiable puisque  $A_2^{-1}$  l'est.

Le lemme précédent montre que les images de ces paramétrisations locales recouvrent  $N$ .

Les applications  $\pi \circ \phi$  sont continues car  $\pi$  l'est. Montrons que leurs inverses sont continues. Si  $x_n \rightarrow x$  dans  $(N, d_N)$ , alors il existe une suite  $y_n \in \pi^{-1}(x_n)$  qui tend vers le point  $y = \phi(B) \cap \pi^{-1}(x)$ . Comme l'application  $A_2^{-1}$  est différentiable, donc continue, on a  $z_n \rightarrow z$  dans  $B$ , où  $z = (\pi \circ \phi)^{-1}(x)$  et  $z_n = (\pi \circ \phi)^{-1}(x_n)$ . On a montré que chaque paramétrisation  $\pi \circ \phi$  est un homéomorphisme, on note  $\varphi$  l'homéomorphisme inverse (qui est donc une carte de  $N$ ).

Chaque changement de carte  $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$  est différentiable puisqu'il s'écrit  $A_2^{-1} \circ \tilde{\phi}$ . Les cartes  $\varphi$  constituent donc un atlas de  $N$  et la munissent d'une structure de variété.

Pour toute carte  $\varphi : U \rightarrow B$  de  $N$  associée comme ci-dessus à un plongement  $\phi : B \rightarrow M$ , on considère le difféomorphisme

$$G \times U \ni (g, z) \mapsto a(g, \phi \circ \varphi(z)) \in \pi^{-1}(U).$$

Son inverse  $\psi$  satisfait les conclusions du théorème. □

**Addendum 8.16.** Si  $\pi : M \rightarrow N$  est une application vérifiant les conclusions du théorème, alors toute application différentiable  $f : M \rightarrow X$  (à valeurs dans une variété  $X$ ) invariante par l'action  $a$  (c'est à dire que  $f \circ a_g = f$  pour tout  $g \in G$ ) se factorise par  $\pi$ , c'est à dire s'écrit  $f = \tilde{f} \circ \pi$  avec une application différentiable  $\tilde{f} : N \rightarrow X$ .

En particulier, l'application  $\pi : M \rightarrow N$  est unique : Toute autre application  $\tilde{\pi} : M \rightarrow \tilde{N}$  vérifiant le théorème est de la forme  $\tilde{\pi} = \tilde{\phi} \circ \pi$  avec un difféomorphisme  $\tilde{\phi}$ .

DÉMONSTRATION. Toute application  $f : M \rightarrow X$  invariante par l'action  $a$  se factorise en  $f = \tilde{f} \circ \pi$  où  $\tilde{f}(y)$  est défini comme  $f(x)$  pour n'importe quel point  $x$  de  $\pi^{-1}(y)$ . La valeur  $f(x)$  ne dépend pas du choix de  $x$  au vu de l'invariance de  $f$ .

Comme  $\pi$  est une submersion surjective, la différentiabilité de  $f$  implique celle de  $\tilde{f}$ .

Si  $\tilde{\pi} : M \rightarrow \tilde{N}$  est une autre application satisfaisant les conclusions du théorème, alors il existe une application différentiable  $\phi$  telle que  $\tilde{\pi} = \phi \circ \pi$ , et réciproquement il existe une application différentiable  $\tilde{\phi}$  telle que  $\pi = \tilde{\phi} \circ \tilde{\pi}$ . On a alors  $\tilde{\pi} = \phi \circ \pi = \phi \circ \tilde{\phi} \circ \tilde{\pi}$ . Comme  $\tilde{\pi}$  est surjective, on conclut que  $\tilde{\phi} \circ \phi = Id$ , et de la même façon que  $\phi \circ \tilde{\phi} = Id$ . Les application  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  sont donc des difféomorphismes. □

Pour vérifier que se résultat s'applique à la fibration de Hopf, et plus généralement à tous les champs de vecteurs dont toutes les orbites sont 1-périodiques, on utilise :

**Exercice 8.5.** Soit  $V$  un champ de vecteur sur une sous variété  $M$  dont toutes les orbites sont périodiques de période (minimale) 1. Montrer qu'il existe une action libre  $a$  de  $S^1$  sur  $M$  telle que  $\varphi_V^t(x) = a(e^{2it\pi}, x)$ .

On dit que le groupe  $G$  agit librement proprement discontinûment sur  $M$  si il agit par une action libre  $a$  qui est propre pour la topologie discrète. Dans ce cas, la submersion  $\pi : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme local puisque les variétés  $M$  et  $N$  ont la même dimension. C'est même un revêtement :

**Définition 8.17.** L'application différentiable  $\pi : M \rightarrow N$  est un revêtement si tout  $y_0 \in N$ , admet un voisinage ouvert  $U$  ayant la propriété suivante : Il existe un ensemble au plus dénombrable discret  $Z$  et un difféomorphisme  $\psi : U \times Z \rightarrow \pi^{-1}(U)$  qui commute avec les projections sur  $U$ .

**Exercice 8.6.** Montrer que tout difféomorphisme local propre est un revêtement fini (c'est à dire que  $Z$  est fini).

Soit  $H$  un sous-groupe de  $Gl_n(\mathbb{R})$  qui en est aussi une sous variété. Soit  $G$  un sous-groupe de  $H$  qui est une sous variété fermée de  $H$  (en fait, le caractère fermé est automatique). On définit l'action de  $G$  sur  $H$  par  $a(g, h) = hg^{-1}$ . Cette action est propre (car  $G$  est fermé dans  $H$ ). L'ensemble des orbites de cette action est le quotient  $H/G$ , que le théorème 8.13 munit d'une structure de variété telle que la projection canonique est une submersion.

Il y a une action naturelle à droite de  $H$  sur  $H/G$ . En effet la composition  $A : \pi \circ p : H \times H \rightarrow H/G$  du produit et de la projection canonique est invariante par l'action du sous groupe  $\{Id\} \times G$  donnée par  $((Id, g), (h, h')) \mapsto (h, h'g^{-1})$  sur  $H \times H$ , et donc se factorise en une application  $a$  de  $(H \times H)/(Id \times G) = H \times (H/G)$  dans  $H/G$ . Cette application est une action de  $H$  sur  $H/G$ .

Réciproquement, soit  $M$  une variété munie d'une action transitive  $a(h, x)$  de  $H$ . On dit que l'action est transitive si chaque orbite est égale à  $M$ , c'est à dire si chacune des applications  $a_x : H \rightarrow M$  est surjective. Alors, pour tout  $x \in M$  le sous-groupe isotrope  $I_x := a_x^{-1}(x)$  est une sous variété fermée de  $H$ , et l'application  $a_x$  se factorise en  $a_x = \phi \circ \pi$  où  $\pi : H \rightarrow H/I_x$  est la projection canonique et  $\phi : H/I_x \rightarrow M$  est un difféomorphisme. En effet, l'application  $a_x$  est de rang  $\dim M$  au vu de la proposition 8.12, donc l'application  $\phi$  aussi.

Plus généralement, si  $a$  est une action différentiable de  $H$  sur  $M$  et si  $x$  est un point de  $M$ , alors l'application  $a_x$  se factorise en  $\phi \circ \pi$  où  $\phi : H/I_x \rightarrow M$  est une immersion injective. Dans le cas où l'action  $a$  est propre, l'immersion injective  $\phi$  l'est aussi, c'est donc un plongement. Chaque orbite d'une action propre (pas nécessairement libre) est donc une sous variété.

**Exercice 8.7.** Montrer que l'orbite du point  $x$ , qui est l'image de l'immersion  $\phi$ , satisfait les conclusions du théorème de l'orbite même lorsque l'action n'est pas propre.

**Exercice 8.8.** Expliquer les égalités  $G(k, n) = \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)/Gl_k(\mathbb{R})$ ,  
 $G(k, n) = \mathcal{L}_{n-k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})/Gl_{n-k}(\mathbb{R})$ ,  $G(k, n) = O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ .

## 9 Espace tangent et crochet de Lie

### 9.1 Espaces tangents et champs de vecteurs.

Deux courbes  $\gamma, \tilde{\gamma} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (M, x)$  sont dites tangentes en 0 si les courbes  $\phi \circ \gamma$  et  $\phi \circ \tilde{\gamma}$  ont la même dérivée en 0 pour toute carte de  $M$  en  $x$ . Il suffit que cette propriété soit satisfaite dans une carte. C'est une relation d'équivalence  $R$  sur l'ensemble  $C_x^1(\mathbb{R}, M)$  des courbes sur  $M$  qui satisfont  $\gamma(0) = x$ . Définissons l'espace tangent comme l'ensemble des classes d'équivalences

$$T_x M := C_x^1(\mathbb{R}, M)/R.$$

Pour toute carte  $\phi$  en  $x$ , l'application  $\gamma \mapsto \phi \circ \gamma'(0)$  engendre une bijection entre  $T_x M$  et  $\mathbb{R}^d$  (car deux courbes ont la même image si et seulement si elles appartiennent à la même classe d'équivalence). On munit  $T_x M$  de la structure d'espace vectoriel qui fait de cette bijection un isomorphisme. Cette structure ne dépend pas du choix de la carte  $\phi$ . En effet, si  $\tilde{\phi}$  est une autre carte en  $x$ , alors

$$(\tilde{\phi} \circ \gamma)'(0) = d(\tilde{\phi} \circ \phi^{-1})_0((\phi \circ \gamma)'(0)),$$

où  $d(\tilde{\phi} \circ \phi^{-1})_0$  est un isomorphisme.

Toute application différentiable  $f : M \rightarrow N$  définie au voisinage de  $x$  engendre naturellement une application dérivée

$$d_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N.$$

Cette application associe à tout vecteur  $v \in T_x M$  le vecteur défini par la courbe  $f \circ \gamma$ , où  $\gamma$  est n'importe quelle courbe représentant  $v$ . Si  $\tilde{\gamma}$  est une autre courbe représentant  $v$ , alors pour toute carte  $\phi$  de  $M$  en  $x$  et toute carte  $\varphi$  de  $N$  en  $y$ , on a

$$(\varphi \circ f \circ \tilde{\gamma})'(0) = d(\varphi \circ f \circ \phi^{-1})_0 \cdot (\phi \circ \tilde{\gamma})'(0) = d(\varphi \circ f \circ \phi^{-1})_0 \cdot (\phi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ f \circ \gamma)'(0)$$

donc la classe de  $f \circ \tilde{\gamma}$  est la même que celle de  $f \circ \gamma$ . Si  $J$  est un plongement de  $M$  dans  $\mathbb{R}^D$ , l'application  $dJ_x : [\gamma] \mapsto (J \circ \gamma)'(0)$  est un isomorphisme entre l'espace tangent  $T_x M$  de  $M$  vue comme variété abstraite et l'espace tangent  $T_x(J(M))$  de  $J(M)$  vue comme sous variété.

Le représentant  $[\gamma] \in T_x M$  d'une courbe  $C^1$  n'est autre que

$$[\gamma] = d\gamma_0(1),$$

que l'on continuera à noter  $\dot{\gamma}(0)$ .

Présentons maintenant un autre point de vue très utile. On dit qu'une application linéaire

$$L : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

est une dérivation ponctuelle en  $x$  si elle a la propriété de Leibnitz

$$L(fg) = g(x)L(f) + f(x)L(g).$$

Si  $L$  est une dérivation en  $x$  sur  $M$ , et si  $\psi : M \rightarrow N$  est une application  $C^\infty$  au voisinage de  $x$ , alors l'application

$$\psi_* L : f \mapsto L(f \circ \psi)$$

est une dérivation ponctuelle en  $f(x)$ . L'application  $L \mapsto \psi_* L$  est linéaire. À toute vecteur tangent  $v \in T_x M$ , on associe la dérivation ponctuelle

$$L_v(f) := df_x \cdot v = (f \circ \gamma)'(0)$$

pour toute courbe  $\gamma$  représentant  $v$ . si  $M$  et  $N$  sont deux (pré) variétés et  $\psi : (M, x) \rightarrow (N, y)$  une application différentiable, alors  $\psi_*(L_v) = L_{d\psi_x \cdot v}$  dans  $\mathcal{D}_y$  (les dérivations ponctuelles en  $y$ ).

**Proposition 9.1.** *L'espace  $\mathcal{D}_x$  des dérivations en  $x$  est un espace vectoriel de dimension  $d$ , et l'application  $v \mapsto L_v$  est un isomorphisme de  $T_x M$  dans  $\mathcal{D}_x M$ .*

Même dans le cas d'une sous variété, la proposition ci-dessus n'est pas évidente.

DÉMONSTRATION. Pour tout ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $x$ , les espaces  $\mathcal{D}_x(U)$  et  $\mathcal{D}_x(M)$  sont isomorphes. Un isomorphisme est donné par l'application  $i_*$  associée à l'inclusion de  $U$  dans  $M$  (c'est l'application  $(i_* L)(f) = L(f \circ i) = L(f|_U)$ ).

Pour le montrer, on considère une fonction  $h : M \rightarrow [0, 1]$  de classe  $C^\infty$  égale à 1 au voisinage de  $x$  et à support dans  $U$ , et la fonction  $g = 1 - (1 - h)^2$ , qui a les mêmes propriétés.

Pour toute dérivation ponctuelle  $L$  en  $x$  sur  $M$  (ou sur  $U$ ), on a  $L(f) = L(gf)$ . En effet,

$$L(f) - L(gf) = L((1 - h)^2 f) = (1 - h)(x)L((1 - h)f) + (1 - h)(x)f(x)L(1 - h) = 0.$$

On constate alors que l'application qui à une dérivation  $L$  sur  $M$  associe la dérivation  $f \mapsto L(gf)$  sur  $U$  (où la fonction  $gf$  est étendue par zéro en dehors de  $U$ ) est une inverse de  $i_*$ .

Soit  $\phi : (M, x) \mapsto (\mathbb{R}^d, 0)$  une carte de  $M$  en  $x$  (de domaine  $U$ ). On peut choisir  $\phi$  surjective.

Les applications  $d\phi_x : T_x M \rightarrow T_0 \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d$  et  $\phi_* : \mathcal{D}_x(U) \rightarrow \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^d)$  sont des isomorphismes. Il suffit donc de démontrer que l'application

$$\mathbb{R}^d \ni v \mapsto L_v \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^d)$$

est un isomorphisme. Pour démontrer la surjectivité, on considère une dérivation ponctuelle  $L$  en 0 sur  $\mathbb{R}^d$ .

On commence par constater, si 1 est la fonction constante égale à 1, que  $L(1) = L(1 \cdot 1) = 1L(1) + 1L(1) = 2L(1)$ , donc  $L(1) = 0$ .

On rappelle alors qu'une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  s'écrit  $f(x) = f(0) + F(x) \cdot x$  où

$$F(x) := \int_0^1 df_{tx} dt$$

est une application  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^d$  dans  $(\mathbb{R}^d)^*$ , telle que  $F(0) = df_0$ . On a donc,  $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^d x_i F_i(x)$ , et donc

$$Lf = \sum_{i=1}^d F_i(0)L(x_i) = D_v f$$

où  $v = (L(x_1), L(x_2), \dots, L(x_d))$ . □

Un champ de vecteurs sur une (pré) variété  $M$  est la donnée, pour chaque  $x \in M$ , d'un vecteur  $V(x) \in T_x M$ . On demande de plus que ce vecteur  $V(x)$  dépende régulièrement de  $x$ . Il y a plusieurs façons équivalentes d'exprimer cette régularité. On peut par exemple demander que le champ de vecteurs soit différentiable dans les cartes. On peut aussi demander que la fonction  $x \mapsto df_x \cdot V(x)$  soit  $C^\infty$  pour toute fonction  $f$  de classe  $C^\infty$ . On associe alors au champ  $V(x)$  une l'application linéaire

$$\mathcal{L}_V : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

telle que  $\mathcal{L}_V f(x) = df_x \cdot V(x)$ . Cette application vérifie la propriété de Leibnitz

$$\mathcal{L}_V(fg) = f\mathcal{L}_V g + g\mathcal{L}_V f,$$

On dit que c'est un dérivation globale. Réciproquement, si  $\mathcal{L} : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  est une dérivation globale, alors pour chaque  $x \in M$  l'application  $L_x : f \mapsto \mathcal{L}f(x)$  est une dérivation ponctuelle. Elle est donc engendrée par un vecteur de  $T_x M$ . Toute dérivation globale est donc engendrée par un champ de vecteurs. On prendra garde à la formule de calcul :

**Propriété 9.2.** Si  $V$  est un champ de vecteurs sur  $M$ , et  $\varphi : M \rightarrow N$  est une application différentiable telle que  $\varphi_* V$  existe, alors

$$(\mathcal{L}_{\varphi_* V} f) \circ \varphi = \mathcal{L}_V(f \circ \varphi).$$

La proposition suivante est bien utile :

**Proposition 9.3.** *Pour tout champ de vecteurs  $X$  sur une variété séparable  $M$ , il existe une fonction  $f$  à valeurs strictement positive telle que le champ  $fX$  est complet.*

DÉMONSTRATION. Soit  $g$  une fonction propre  $C^\infty$  et strictement positive. Si la fonction  $\mathcal{L}_X g$  est bornée, alors  $X$  est complet. En effet, on considère une solution maximale  $x(t) : ]T^-, T^+[ \rightarrow M$ . La fonction  $(g \circ x)'$  est bornée sur  $]T^-, T^+[$ . Si  $T^+ < \infty$ , on conclut que  $g \circ x$  est bornée sur  $[0, T^+[$ , ce qui implique que  $x([0, T^+[)$  est contenu dans un compact, ce qui est une contradiction. On montre de la même façon que  $T^- = -\infty$ .

Si  $Xg$  n'est pas borné, on considère une fonction  $h$  lisse et strictement positive qui majore  $|\mathcal{L}_X g|$ , par exemple  $h = (\mathcal{L}_X g)^2 + 1$ . On pose alors  $f = 1/h$ , et on observe que  $|\mathcal{L}_{fX} g| = |f \mathcal{L}_X g| = |\mathcal{L}_X g|/h \leq 1$ . Au vu de ce qui précède, le champ  $fX$  est donc complet.  $\square$

En général, il n'y a pas de manière canonique de représenter la dérivée seconde  $\ddot{\gamma}(t)$  d'une courbe comme un élément de  $T_{\gamma(t)}M$ . Dans le cas où  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^D$ , ceci se manifeste par le fait que  $\ddot{\gamma}(t)$  (définie en considérant  $\gamma$  comme une courbe de  $\mathbb{R}^D$ ) n'appartient pas à  $T_{\gamma(t)}M$ .

Il y a toutefois un cas particulier important dans lequel c'est possible : lorsque  $\dot{\gamma}(t) = 0$ .

**Proposition 9.4.** *Soit  $\gamma$  une courbe  $C^2$  sur  $M$  telle que  $\dot{\gamma}(0) = 0$ . Alors la courbe  $g : t \mapsto \gamma(t^{1/2})$  est  $C^1$  (où  $t^{1/2}$  est prolongé sur  $\mathbb{R}$  comme fonction impaire). En notant  $\ddot{\gamma}(0) := 2g'(0) \in T_{\gamma(0)}M$ , on a*

$$d\phi_{\gamma(0)} \cdot \ddot{\gamma}(0) = (\phi \circ \gamma)''(0)$$

pour toute carte locale  $\phi : (M, \gamma(0)) \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

DÉMONSTRATION. La courbe  $z(t) := \phi \circ \gamma$  est une courbe sur  $\mathbb{R}^d$  telle que  $\dot{z}(0) = 0$ . Un développement limité élémentaire montre alors que  $z(t^{1/2}) = 2t\ddot{z}(0) + o(t)$ . La courbe  $t \mapsto z(t^{1/2})$  est donc dérivable en  $t = 0$  de dérivée égale à  $2\ddot{z}(0)$ . La courbe  $t \mapsto \gamma(t^{1/2}) = \phi^{-1} \circ z(t^{1/2})$  est donc dérivable en  $t = 0$ , de dérivée  $(d\phi_{\gamma(0)})^{-1} \cdot \ddot{\gamma}(0)$ .  $\square$

On peut aussi faire une preuve directe du fait que la dérivée seconde est bien un vecteur tangent en un temps où la dérivée est nulle :

**Exercice 9.1.** *Soit  $\phi : (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  un difféomorphisme et soit  $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  une courbe  $C^2$ . Montrer par un calcul direct que  $(\phi \circ \gamma)''(0) = d\phi_0 \cdot \gamma''(0)$  si  $\dot{\gamma}(0) = 0$ , mais que ce n'est pas le cas en général.*

Plus généralement :

**Proposition 9.5.** *Soit  $f : M \rightarrow N$  est une fonction  $C^2$  telle que  $df_{x_0} = 0$ . Alors il existe une unique application bilinéaire symétrique  $d^2 f_{x_0}$  de  $T_{x_0}M \times T_{x_0}M$  dans  $T_{f(x_0)}N$  telle que, pour toute paramétrisation locale  $\psi$  de  $M$  en  $x_0$  et tout carte locale  $\varphi$  de  $N$  en  $f(x_0)$ ,*

$$d^2(\varphi \circ f \circ \psi)_0 \cdot (v, w) = d\varphi_{f(x_0)} \circ d^2 f_{x_0} (d\psi_0 \cdot v, d\psi_0 \cdot w).$$

DÉMONSTRATION. Pour chaque choix de  $\psi$  et  $\varphi$ , la formule ci-dessus détermine une forme bilinéaire symétrique  $b$  de  $T_{x_0}M \times T_{x_0}M$  dans  $T_{f(x_0)}N$ . Il nous faut montrer que cette forme bilinéaire ne dépend pas du choix de  $\varphi$  et  $\psi$ . On peut le faire par un calcul direct (pas si facile, mais instructif), mais nous allons utiliser une autre méthode. Pour tout  $v \in T_{x_0}M$ , on choisit une courbe  $\gamma$  telle que  $\gamma(0) = x_0$  et  $\dot{\gamma} = v$ . On constate alors que la courbe  $f \circ \gamma$  est de dérivée nulle en 0, et sa

dérivée seconde vérifie  $(f \circ \gamma)''(0) = b(v, v)$ . Pour le vérifier, on pose  $\eta = \psi^{-1} \circ \gamma$ . L'application  $\varphi \circ f \circ \psi : \mathbb{R}^{d_M} \rightarrow \mathbb{R}^{d_N}$  est de dérivée nulle en 0, et on a

$$\begin{aligned} (\varphi \circ f \circ \gamma)''(0) &= (\varphi \circ f \circ \psi \circ \eta)''(0) = d^2(\varphi \circ f \circ \psi)_0 \cdot (\eta'(0), \eta'(0)) \\ &= d\varphi_{f(x_0)} \cdot b(d\psi_0 \cdot \eta'(0), d\psi_0 \cdot \eta'(0)) = d\varphi_{f(x_0)} \cdot b(v, v). \end{aligned}$$

D'autre part, il découle de la proposition 9.4 que

$$(\varphi \circ f \circ \gamma)''(0) = d\varphi_{f(x_0)} \cdot (f \circ \gamma)''(0)$$

ce qui démontre l'égalité  $(f \circ \gamma)''(0) = b(v, v)$ . On conclut que  $b(v, v)$  est indépendant de  $\varphi$  et  $\psi$  pour tout  $v$ , et donc, par polarisation, que la forme bilinéaire symétrique  $b$  est indépendante de  $\varphi$  et  $\psi$ .  $\square$

Dans le cas où  $M$  est une sous variété de  $\mathbb{R}^D$ , on a encore une autre interprétation naturelle pour  $d^2 f_{x_0}$  : C'est la restriction à  $T_{x_0} M$  de la forme bilinéaire  $d^2 \tilde{f}_{x_0}$ , où  $\tilde{f}$  est n'importe quelle extension  $C^2$  de  $f$  à un voisinage de  $x_0$  dans  $\mathbb{R}^D$ .

## 9.2 Crochets de Lie

Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs, que nous supposons complets sur la (pré) variété  $M$ .

On veut décrire dans quelle mesure les flots  $\varphi_X$  et  $\varphi_Y$  commutent. On considère, pour chaque  $x \in M$ , l'application  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  donnée par

$$\phi_x(t, s) = \varphi_Y^s \circ \varphi_X^t \circ \varphi_Y^{-s} \circ \varphi_X^{-t}(x).$$

Il est immédiat que  $\phi(t, s) = x$  si  $t = 0$  ou  $s = 0$ , donc  $\partial_t \phi(0) = \partial_s \phi(0) = 0$  dans  $T_x M$ . La dérivée seconde  $d^2 \phi_0$  est donc bien définie comme application bilinéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $T_x M$  et elle est de la forme (toujours car  $\phi(t, s) = x$  si  $t = 0$  ou  $s = 0$ )

$$d^2 \phi_0 \cdot (s, t) = st \partial_{st}^2 \phi(0)$$

avec  $\partial_{st}^2 \phi \in T_x M$ . On pose

$$[X, Y](x) = \partial_{st}^2 \phi(0)$$

c'est le **Crochet de Lie** de  $X$  et  $Y$ . C'est un champ de vecteurs  $C^\infty$  si  $X$  et  $Y$  le sont. En considérant la courbe  $\gamma_x(t) := \phi_x(t, t)$ , qui a une dérivée nulle  $\dot{\gamma}(0) = 0$ , on a

$$[X, Y](x) := \ddot{\gamma}_x(0)/2.$$

**Propriété 9.6.** Soit  $\psi : M \rightarrow N$  une application différentiable. Si  $\psi_* X$  et  $\psi_* Y$  existent (et sont des champs de vecteurs différentiables), alors

$$[\psi_* X, \psi_* Y] = \psi_* [X, Y].$$

DÉMONSTRATION. Fixons un point  $x$  et considérons la courbe  $x(t) = \phi(r(t), r(t))$ , où  $r(t) = \text{sign}(t)\sqrt{|t|}$ , de sorte que  $x'(0) = [X, Y](x)$ .

$$x(t) := \varphi_Y^{r(t)} \circ \varphi_X^{r(t)} \circ \varphi_Y^{-r(t)} \circ \varphi_X^{-r(t)}(x)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \psi \circ x(t) &= \psi \circ \varphi_Y^{r(t)} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi_X^{r(t)} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi_Y^{-r(t)} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi_X^{-r(t)} \circ \psi^{-1} \circ \psi(x) \\ &= \varphi_{\psi_* Y}^{r(t)} \circ \varphi_{\psi_* X}^{r(t)} \circ \varphi_{\psi_* Y}^{-r(t)} \circ \varphi_{\psi_* X}^{-r(t)}(\psi(x)), \end{aligned}$$

et, en dérivant en  $t=0$ ,  $d\psi_x \cdot [X, Y](x) = [\psi_* X, \psi_* Y](\psi(x))$ .  $\square$

L'exercice suivant montre que le crochet n'est pas toujours nul :

**Exercice 9.2.** Soit  $X$  un champ de vecteurs constant et  $Y$  un champ de vecteurs linéaire donné par  $Y(x) = bx$ . Alors  $[X, Y]$  est le champ constant égal à  $bX$ .

**Exercice 9.3.** Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs linéaires sur  $\mathbb{R}^d$ , donnés par  $X(x) = ax$ ,  $Y(x) = bx$ . Montrer que  $[X, Y](x) = (ba - ab)(x)$ .

**Exercice 9.4.** Soient  $a$  et  $b$  deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$ . Considérons les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  sur  $Gl_n(\mathbb{R})$  donnés par  $X(g) = ag$ ,  $Y(g) = bg$ . On a alors  $\varphi_X^t(g) = \exp(ta)g$ ,  $\varphi_Y^t(g) = \exp(tb)g$ . Montrer que  $\partial_t \phi_g(0, s) = \exp(sb)a \exp(-sb)g - ag$  et donc que  $[X, Y](g) = (ba - ab)g$ .

Si  $G$  est un sous groupe de  $Gl_n(\mathbb{R})$  qui en est aussi une sous variété, alors l'espace tangent  $\mathfrak{g} = T_{Id}G \subset M_n(\mathbb{R})$  est stable par l'opération  $a, b \mapsto ab - ba$ .

On obtient une autre interprétation du crochet de Lie en remarquant que

$$\varphi_Y^s \circ \varphi_X^t \circ \varphi_Y^{-s} = \varphi_{(\varphi_Y^s)_* X}^t$$

et donc

$$\phi_x(t, s) = \varphi_{(\varphi_Y^s)_* X}^t \circ \varphi_X^{-t}(x).$$

On a alors

$$\partial_t \phi_x(0, s) = (\varphi_Y^s)_* X(x) - X(x)$$

dont on déduit :

**Propriété 9.7.**

$$[X, Y](x) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} ((\varphi_Y^s)_* X(x)).$$

**Exercice 9.5.** Montrer la formule

$$\partial_s ((\varphi_Y^s)_* X(x)) = [(\varphi_Y^s)_* X, Y] = (\varphi_Y^s)_* [X, Y]$$

Calculons les crochets de Lie en coordonnées. Si  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , vus comme applications de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , alors on a  $(\varphi_Y^s)_* X(x) = (d(\varphi_Y^s)_x \cdot X(x))(\varphi_Y^{-s}(x))$ . En remarquant que  $\partial_s|_{s=0} d(\varphi_Y^s)_x \cdot X(x) = d(\partial_s|_{s=0} \varphi_Y^s)_x \cdot X(x) = dY_x \cdot X(x)$ , on obtient :

$$[X, Y](x) = dY_x \cdot X(x) - dX_x \cdot Y(x)$$

ce qui s'écrit aussi en coordonnées

$$([X, Y])_i = \sum_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} X_j - \frac{\partial X_i}{\partial x_j} Y_j.$$

Il est instructif de revenir aux exercices 9.2 et 9.3 avec ces formules. Finalement, on a

**Propriété 9.8.**

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X.$$

Cette propriété caractérise le champ  $[X, Y]$ , et est souvent donnée comme sa définition. DÉMONSTRATION. Soit  $\varphi$  une carte. On remarque d'abord que  $\mathcal{L}_X(f \circ \varphi) = (\mathcal{L}_{\varphi_* X} f) \circ \varphi$ . En utilisant cette formule, on obtient

$$\mathcal{L}_{[X, Y]}(f \circ \varphi) = (\mathcal{L}_{\varphi_* [X, Y]} f) \circ \varphi = (\mathcal{L}_{[\varphi_* X, \varphi_* Y]} f) \circ \varphi$$

et

$$(\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X)(f \circ \varphi) = ((\mathcal{L}_{\varphi_* X} \circ \mathcal{L}_{\varphi_* Y} - \mathcal{L}_{\varphi_* Y} \circ \mathcal{L}_{\varphi_* X})f) \circ \varphi.$$

Il suffit donc de montrer l'égalité dans les cartes, c'est à dire dans  $\mathbb{R}^d$ . On fait le calcul direct

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y f(x) &= d(df_x \cdot Y(x))_x \cdot X(x) = d^2 f_x \cdot (Y(x), X(x)) + df_x \circ dY_x \cdot X(x) \\ \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X f(x) &= d(df_x \cdot X(x))_x \cdot Y(x) = d^2 f_x \cdot (Y(x), X(x)) + df_x \circ dX_x \cdot Y(x)\end{aligned}$$

et donc

$$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y f(x) - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X f(x) = df_x \cdot (dY_x \cdot X(x) - dX_x \cdot Y(x)) = df_x \cdot [X, Y](x).$$

Le point remarquable de ce calcul est la simplification des termes de second ordre. □

Il est remarquable que l'opérateur différentiel  $\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$  est une dérivation (a priori, c'est un opérateur du second ordre). C'est un exercice facile et intéressant de vérifier directement qu'il vérifie la propriété de Leibnitz. La propriété 9.8 implique :

**Propriété 9.9.** *L'application qui aux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  associe leur crochet de Lie  $[X, Y]$  est bilinéaire et antisymétrique :*

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

Elle vérifie de plus l'identité de Jacobi

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

L'antisymétrie implique notamment que

$$[X, Y](x) = -\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} ((\varphi_X^s)_* Y(x)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} ((\varphi_X^{-s})_* Y(x)) =: \mathcal{L}_X(Y).$$

Le dernier opérateur est appelé dérivée de Lie de  $Y$  par rapport à  $X$ . L'identité de Jacobi est équivalente à

$$[[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]],$$

elle s'interprète comme la relation

$$\mathcal{L}_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$$

où cette fois les opérateurs  $\mathcal{L}$  agissent sur les champs de vecteurs et plus, comme plus haut, sur les fonctions.

**Propriété 9.10.** *On a la relation  $[fX, gY] = fg[X, Y] - (\mathcal{L}_Y f)gX + (\mathcal{L}_X g)fY$ .*

Le cas particulier  $[X, gY] = g[X, Y] + (Xg)Y$  se réécrit  $\mathcal{L}_X(gY) = g\mathcal{L}_X(Y) + (\mathcal{L}_X g)Y$ , c'est une règle de Leibnitz pour l'opérateur  $\mathcal{L}_X$ . La démonstration est immédiate en utilisant propriété 9.8. Revenons maintenant à la question de la commutation :

**Théorème 9.11.** *Soient  $X$  et  $Y$  des champs de vecteurs tels que le champ  $[X, Y]$  est identiquement nul. Alors les flots de  $X$  et de  $Y$  commutent. Plus précisément, pour tout  $x \in M$ , si  $I$  et  $J$  sont des intervalles contenant 0 tels que  $\varphi_Y^s \circ \varphi_X^t(x)$  est défini pour tout  $s \in I$ ,  $t \in J$  alors on a la relation*

$$\varphi_X^t \circ \varphi_Y^s(x) = \varphi_Y^s \circ \varphi_X^t(x)$$

pour tous  $s \in I$ ,  $t \in J$  (en particulier, le membre de gauche est bien défini). Si  $X$  et  $Y$  sont complets, alors la relation de commutation est valable pour tous  $t$  et  $s$  dans  $\mathbb{R}$ .

Dans le cas complet, ceci implique aussi que  $(\varphi_Y^s)_*X = X$  pour tout  $s$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer le résultat dans le cas où  $I$  et  $J$  sont compacts. Soit  $U$  le domaine de définition commun des flots  $\varphi_Y^s, s \in J$ . C'est un ouvert contenant  $x$ . On a  $(\varphi_Y^{-s})_*X = X$  sur  $U$ , ceci découle du calcul

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}((\varphi_Y^{-s})_*X(x)) &= \frac{d}{d\sigma}|_{\sigma=0}((\varphi_Y^{-\sigma})_*(\varphi_Y^{-s})_*X(x)) \\ &= [Y, (\varphi_Y^{-s})_*X] = [(\varphi_Y^{-s})_*Y, (\varphi_Y^{-s})_*X] = (\varphi_Y^{-s})_*[Y, X] = 0. \end{aligned}$$

Les champs  $(\varphi_Y^{-s})_*X, s \in J$  sont tous définis sur  $U$ , et ils y satisfont la relation  $\frac{d}{ds}((\varphi_Y^{-s})_*X(x)) = 0$ , donc  $(\varphi_Y^{-s})_*X = X$ .

Considérons la restriction  $X_U$  de  $X$  à l'ouvert  $U \subset M$ . On conclut que les flots  $\varphi_Y^{-s} \circ \varphi_{X_U}^t \circ \varphi_Y^s$  et  $\varphi_{X_U}^t$  de ces champs sont égaux sur le domaine de définition de  $\varphi_{X_U}^t$  (qui, à priori, peut être strictement contenu dans  $U \cap \text{dom}\varphi_{X_U}^t$ ). Il découle de notre hypothèse que  $U$  contient le segment d'orbite  $\varphi_X(I \times \{x\})$ , et donc que  $x$  est dans le domaine de  $\varphi_{X_U}^t$  pour tout  $t \in I$ . On a donc  $\varphi_Y^{-s} \circ \varphi_{X_U}^t \circ \varphi_Y^s(x) = \varphi_{X_U}^t(x)$  pour tout  $t \in I, s \in J$ , ce qui est le résultat annoncé.  $\square$

L'exercice suivant montre qu'il faut être un peu prudent dans le cas de champs non complets.

**Exercice 9.6.** *Considérons l'application exponentielle  $e : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  et les champs de vecteurs constants  $e_1$  et  $e_2$  sur  $\mathbb{C}^*$ .*

*Montrer qu'il existe des champs  $X_1$  et  $X_2$  sur  $\mathbb{C}$  tels que  $e_*X_i = e_i$ .*

*Montrer que  $\varphi_1^1 \circ \varphi_2^1(z) \neq \varphi_2^1 \circ \varphi_1^1(z)$  pour  $z = -3i\pi/4$ .*

On rappelle que tout champ de vecteurs peut être redressé au voisinage d'un point régulier. En présence de plusieurs champs de vecteurs, on a :

**Théorème 9.12.** *Soient  $X_1, \dots, X_k$  des champs de vecteurs au voisinage de  $x_0$  dont les valeurs en  $x_0$  forment une famille libre. Il existe une carte locale  $\phi : (M, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$  qui redresse simultanément ces champs de vecteurs, c'est à dire telle que*

$$\phi_*X_i = e_i$$

*(le champ de vecteur constant égal au  $i$ -ème vecteur de base) si et seulement si  $[X_i, X_j] \equiv 0$  dans un voisinage de  $x_0$ .*

DÉMONSTRATION. Supposons que les champs  $X_i$  peuvent être redressés. Alors  $X_i = \phi_*^{-1}e_i$ , donc  $[X_i, X_j] = \phi_*^{-1}[e_i, e_j] = 0$ .

Réciproquement, soit  $E \subset T_{x_0}M$  l'espace vectoriel engendré par les vecteurs  $X_i(x_0), 1 \leq i \leq k$ . On considère alors une immersion  $\psi : (\mathbb{R}^{d-k}, 0) \rightarrow (M, x_0)$  transverse à  $E$  en 0, c'est à dire telle que l'image de  $d\psi_0$  est un supplémentaire de  $E$  dans  $T_{x_0}M$ . Les flots  $\varphi_{X_i}^t$  sont bien définis dans un voisinage de  $(0, x_0)$  et ils commutent deux à deux. Soit  $\Psi : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}, 0) \rightarrow (M, x_0)$  l'application définie par

$$\Psi(t_1, \dots, t_k, y) = \varphi_{X_1}^{t_1} \circ \dots \circ \varphi_{X_k}^{t_k}(\psi(y)).$$

On voit facilement que  $\partial_y \Psi_0 = d\psi_0$  et que  $\partial_{t_i} \Psi_0 = X_i(0)$ , et on conclut que  $\Psi$  est un difféomorphisme local de  $M$  en  $x_0$ . Ceci est vrai sans hypothèse de commutation. On voit directement dans l'expression du flot que  $\partial_{t_1} \Psi(y, t) = X_1(\Psi(y, t))$ , c'est à dire que  $\Psi_*e_1 = X_1$ , où  $e_1, \dots, e_k$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^k$ . En utilisant la commutation locale des flots, on observe que

$$\Psi(t_1, \dots, t_k, y) = \varphi_{X_i}^{t_i} \circ \dots \circ \varphi_{X_{i-1}}^{t_{i-1}} \circ \varphi_{X_{i+1}}^{t_{i+1}} \circ \dots \circ \varphi_{X_k}^{t_k}(\psi(y)),$$

et donc que  $\partial_{t_i} \Psi(y, t) = X_i(\Psi(y, t))$ , c'est à dire que  $\Psi_* e_i = X_i$  pour tout  $i$ . L'inverse locale  $\phi$  de  $\Psi$  est la carte locale cherchée.  $\square$

Considérons maintenant un champ de sous-espaces  $E(x)$  de rang  $k$ , c'est à dire la donnée, pour tout  $x \in M$ , d'un sous-espace vectoriel  $E(x)$  de  $T_x M$ . On suppose que ce champ est différentiable, c'est à dire qu'il est représenté dans une carte par une application différentiable à valeurs dans la Grassmannienne  $G(k, n)$ . Il est équivalent de dire que, au voisinage de tout point  $x_0 \in M$ , il existe des champs de vecteur différentiables  $X_1, \dots, X_k$  tels que les  $X_i(x)$  engendrent  $E(x)$  pour tout  $x$  voisin de  $x_0$ . Ce champ de sous espaces est dit intégrable au voisinage de  $x_0$  si il existe une carte dans laquelle il est constant. Il engendre alors un feuilletage, voir la section 6.2. Un corollaire immédiat du théorème 9.12 est :

**Corollary 9.13.** *Le champ  $E(x)$  est intégrable au voisinage de  $x_0$  si et seulement si il peut être engendré localement par des champs de vecteurs  $X_i$  qui commutent deux à deux.*

Il est bien sûr possible d'engendrer un champ de sous espaces intégrable par des champs de vecteurs qui ne commutent pas deux à deux. On a en effet donné un exemple de champs de vecteurs linéairement indépendants de  $\mathbb{R}^2$  et qui ne commutent pas, ils engendrent la distribution constante (donc intégrable) de rang maximal. Toutefois, on a :

**Propriété 9.14.** *Si  $E(x)$  est un champ de sous espaces intégrable au voisinage de  $x_0$ , et si les champs de vecteurs  $X_i, 1 \leq i \leq k$  engendrent  $E(x)$  au voisinage de  $x_0$ , alors  $[X_i, X_j](x) \in E(x)$  au voisinage de  $x_0$ .*

On a aussi la réciproque :

**Théorème 9.15 (Frobenius).** *Soit  $E(x)$  un champ de sous espaces de dimension  $k$  au voisinage de  $x_0$ , engendré par les champs  $X_1, \dots, X_k$ . Si il existe un voisinage de  $x_0$  dans lequel  $[X_i, X_j](x) \in E(x)$  pour tous  $i, j$ , alors le champ de sous espaces  $E(x)$  est intégrable au voisinage de  $x_0$ .*

DÉMONSTRATION. Nous allons construire des champs qui engendrent localement le même champ de sous espaces et qui commutent. On considère pour ceci une submersion  $\psi : (M, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$  telle que  $d\psi_{x_0}|_{E(x_0)}$  est un isomorphisme. L'application linéaire  $d\psi_x|_{E(x)}$  est alors un isomorphisme pour tout  $x$  proche de  $x_0$ , et on définit les champs de vecteurs

$$Y_i(x) := (d\psi_x|_{E(x)})^{-1}(e_i), \quad 1 \leq i \leq k.$$

Comme dans la preuve du Théorème D'Ehresmann (4.10), les champs  $Y_i$  sont réguliers et vérifient  $\psi_* Y_i = e_i$ . On a donc  $\psi_* [Y_i, Y_j] = [e_i, e_j] = 0$ , c'est à dire que  $d\psi_x \cdot [Y_i, Y_j](x) = 0$ . Au vu du Lemme ci-dessous, on a  $[Y_i, Y_j] \in E(x)$  et donc  $[Y_i, Y_j] = 0$  puisque  $d\psi_x$  est injective sur  $E(x)$ .  $\square$

**Lemme 9.16.** *Sous les hypothèses du théorème, si  $Y$  et  $Z$  sont deux champs contenus dans  $E$  en chaque point, alors  $[Y, Z]$  est un champ contenu dans  $E$  en chaque point.*

L'espace des champs contenus dans  $E$  est stable par crochet de Lie, on dit que c'est une sous algèbre de Lie de l'espace de tous les champs de vecteurs sur  $M$ .

DÉMONSTRATION. On écrit  $Y = \sum y_i X_i, Z = \sum z_i X_i$ , où  $y_i, z_i$  sont des fonctions régulières. Le crochet  $[Y, Z]$  est donc une somme de termes de la forme

$$[y_i X_i, z_j X_j] = y_i [X_i, z_j X_j] - z_j (X_j y_i) X_i = y_i z_j [X_i, X_j] + y_i (X_i z_j) X_j - z_j (X_j y_i) X_i \in E.$$

$\square$

Dans le cas général d'un champ de sous-espaces de dimension  $k$  non nécessairement intégrable, ou plus généralement d'une famille  $\mathcal{V}$  de champs de vecteurs, le théorème de l'orbite donne l'existence d'orbites qui sont localement difféomorphes au produit d'un disque de dimension  $d$  et d'un ensemble dénombrable. L'espace tangent  $H(x) \subset T_x M$  de l'orbite de  $x$  contient l'espace  $E(x) = \text{Vect}(\mathcal{V}(x))$ .

De plus, si  $V$  et  $W$  sont deux champs de vecteurs tangents à l'orbite de  $x$ , alors la courbe

$$\gamma(t) = \varphi_W^{t^{1/2}} \circ \varphi_V^{t^{1/2}} \circ \varphi_W^{-t^{1/2}} \circ \varphi_V^{-t^{1/2}}(x)$$

est contenue dans l'orbite de  $x$ , donc sa dérivée  $\dot{\gamma}(0) = 2[V, W](x)$  est tangente à l'orbite de  $x$ . En définissant l'algèbre de Lie  $\mathcal{LV}$  engendrée par  $\mathcal{V}$  comme le plus petit espace vectoriel de champs vecteurs contenant  $\mathcal{V}$  et invariant par crochet de Lie, on en déduit que  $H(x) \supset \mathcal{LV}(x)$  (cette inclusion est souvent une égalité, mais pas toujours). On conclut en particulier :

**Théorème 9.17** (Chow). *Soit  $M$  une variété connexe et  $\mathcal{V}$  une famille de champs de vecteurs complets sur  $M$  telle que  $\mathcal{LV}(x) = T_x M$  pour tout  $x$ . Alors l'orbite de tout point de  $M$  est égale à  $M$ .*

**Exercice 9.7.** *Dans le cas analytique, l'inclusion  $H(x) \supset \mathcal{LV}(x)$  est une égalité.*

*Il suffit de démontrer que  $(\varphi_Y^t)_* X(x) \subset \mathcal{LV}(x)$  pour tous  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{LV}$ .*

*On vérifie pour ceci que la courbe  $t \mapsto (\varphi_Y^t)_* X(x) \in T_x M$  est tangente à  $\mathcal{LV}(x)$  à tous les ordres en 0. Ses dérivées successives sont en effet  $(\mathcal{L}_X)^k Y$ .*

Soit  $G$  un sous groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  qui en est une sous variété. Soit  $\mathfrak{g}$  l'espace tangent de  $G$  en l'identité et soit  $a$  une action différentiable de  $G$  sur une variété  $M$ . A tout vecteur  $v \in \mathfrak{g}$ , on associe le champ de vecteurs sur  $M$  défini par  $V_v(x) = \partial_g a(Id, x) \cdot v$ . Rappelons que  $\mathfrak{g}$  est un sous espace vectoriel de l'ensemble des matrices  $\mathfrak{g}$  invariant par le crochet de Lie  $[v, w] = vw - wv$  (produit de matrices). On en conclut que l'ensemble des champs  $V_v$  est invariant par crochet de Lie. Si  $G$  est connexe, alors le group  $a_g, g \in G$  est précisément le groupe  $\mathcal{G}$  engendré par les flots des champs  $V_v$ . On peut donc appliquer directement le théorème de l'orbite et conclure que les orbites  $a(G, x)$  vérifient sa conclusion pour tout  $x$  (avec  $H(x) = \partial_g a(Id, x) \cdot \mathfrak{g}$ ).

Si  $G$  n'est pas connexe, alors on considère la composante  $G_0$  de l'identité dans  $G$ . C'est un sous groupe distingué de  $G$ , qui est aussi une sous-variété. Le quotient  $G/G_0$  est discret, donc dénombrable. Chaque  $G$ -orbite est donc une réunion au plus dénombrable de  $G_0$ -orbites difféomorphes, elle vérifie donc les conclusions du théorème de l'orbite (avec le même espace tangent  $H(x)$  que ci-dessus).

### 9.3 Formes de Pfaff

Une forme différentielle de degré un, ou forme de Pfaff, sur la variété  $M$  est la donnée, pour chaque  $x \in M$ , d'une forme linéaire  $\alpha_x$  sur  $T_x M$ . On demande de plus que cette forme linéaire dépende régulièrement du point  $x$ , c'est à dire par exemple que la fonction  $x \mapsto \alpha_x \cdot V(x)$  soit différentiable pour tout champ de vecteurs  $x$ .

**Exercice 9.8.** *Toute forme de Pfaff  $\alpha$  engendre une application linéaire  $A$  des champs de vecteurs vers les fonctions, qui est  $C^\infty(M)$ -linéaire, c'est à dire telle que  $A(fX) = fA(x)$ . Réciproquement, montrer que toute application linéaire de l'espace des champs de vecteurs  $C^\infty$  vers  $C^\infty(M)$  qui est  $C^\infty(M)$ -linéaire est engendré par une forme de Pfaff.*

Pour toute fonction  $f$ , on définit la forme  $\alpha_x = df_x$ . Les formes de Pfaff de ce type sont dites exactes. Les formes localement exactes sont dites fermées.

Si  $\alpha$  est une forme de Pfaff sur  $M$  et si  $\psi : N \rightarrow M$  est une application différentiable, alors on définit la forme  $\psi^* \alpha$  sur  $N$  par

$$(\psi^* \alpha)_x = \alpha_{\psi(x)} \circ d\psi_x.$$

En particulier, si  $\psi$  est une paramétrisation locale de  $M$ , alors  $\psi^*\alpha$  est la représentation locale de  $\alpha$ . On remarque que, pour tout champ de vecteurs  $V$  sur  $M$ , on a

$$(\psi^*\alpha) \cdot (\psi_*^{-1}V) = (\alpha \cdot V) \circ \psi$$

c'est à dire qu'on peut calculer  $\alpha \cdot V$  dans les cartes. Comme  $\psi^*(df) = d(f \circ \psi)$ , être exacte ou fermée est invariant par difféomorphisme.

Les formes de Pfaff s'intègrent le long des courbes. Si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  est une courbe  $C^1$ , on définit  $\int_\gamma \alpha := \int_0^1 \alpha_{\gamma(t)} \cdot \dot{\gamma}(t) dt$ . Pour toute application  $\psi$ , on a  $\int_{\psi \circ \gamma} \alpha = \int_\gamma \psi^* \alpha$ . Dans le cas d'une forme exacte, on a  $\int_\gamma df = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$ .

De la même façon que le dual  $(\mathbb{R}^n)^*$  de l'espace  $\mathbb{R}^n$  s'identifie à  $\mathbb{R}^n$  on pourrait penser qu'il y a peu de différences entre les champs de vecteurs et les formes de Pfaff. Mais ce n'est pas le cas. Par exemple, deux champs de vecteurs sont équivalents en des points non singuliers, mais il n'en est pas de même des formes de Pfaff : si toutes les formes de Pfaff étaient localement équivalentes, elles seraient toutes fermées, ce qui n'est pas le cas.

**Exercice 9.9.** *Montrer que la forme  $\alpha = x_1 dx_2$  sur  $\mathbb{R}^2$  n'est pas fermée. En effet, si  $\alpha = df$ , alors  $\partial_{12}f = 1$  et  $\partial_{21}f = 0$ , ce qui contredit le théorème de Schwarz.*

À toute forme de Pfaff  $\alpha$ , on associe le champ de sous-espaces  $K(x) = \ker \alpha_x$ . C'est un champ d'hyperplans si la forme ne s'annule pas. Réciproquement, tout champ d'hyperplans peut localement être représenté comme noyau d'une forme de Pfaff  $\alpha$  non nulle. Si les formes de Pfaff  $\alpha$  et  $\beta$  ont le même champ de noyaux, alors il existe une fonction non nulle  $f$  telle que  $\alpha = f\beta$ .

**Propriété 9.18.** *Soit  $\alpha$  une forme de Pfaff non nulle en  $x_0$ . Le champ de noyaux de  $\alpha$  est intégrable si et seulement si il existe des fonction  $f$  et  $g$  telles que  $\alpha = gdf$  au voisinage de  $x_0$ .*

On dit parfois que  $g$  est un facteur intégrant de  $f$ . Le champ de noyau d'une forme fermée est donc intégrable.

DÉMONSTRATION. Si  $\alpha = gdf$ , alors  $df_{x_0}$  est non nul, donc  $f$  est la première coordonnée d'une carte locale  $\phi$  en  $x_0$ . La carte  $\phi$  redresse le champ  $K$ .

Si le champ  $K$  est redressé en le champ constant  $x_1 = 0$  dans la carte  $\phi$ , et si  $f$  est la première coordonnée de  $\phi$ , alors  $df$  et  $\alpha$  ont le même noyau, donc il existe une fonction  $g$  telle que  $\alpha = gdf$ .  $\square$

La thermodynamique classique offre un exemple célèbre. On décrit un système physique par des quantités macroscopiques  $x \in \mathbb{R}^n$ . On a alors une forme  $\alpha$  qui donne les échange de chaleurs, c'est à dire que si les quantités macroscopiques  $x$  du systèmes évoluent au cours du temps (assez lentement pour rester en équilibre) suivant une courbe  $\gamma(t)$ , alors l'intégrale  $\int_\gamma \alpha$  donne l'échange de chaleur total entre le système et son milieu. Les physiciens notent cette forme  $\delta Q$ .

Les évolutions  $\gamma(t)$  tangentes au noyau de  $\alpha$  sont les transformations adiabatiques. Si le champ de noyaux de la forme  $\alpha$  n'était pas intégrable, il existerait un état  $x_0$  depuis lequel on pourrait faire évoluer le système vers n'importe quel état  $x$  voisin de  $x_0$  par des transformations adiabatiques. En effet ou bien les hypothèses du théorème de Frobénius sont satisfaites en chaque point, ou bien il existe un point  $x_0$  et deux champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  tangents au noyau de  $\alpha$  tels que  $\alpha \cdot [X, Y] \neq 0$  en  $x_0$ , et donc au voisinage de  $x_0$ . On peut alors appliquer le théorème de Chow (qui dans ce cadre est plutôt dû à Carathéodory) à un voisinage de  $x_0$ .

Le second principe de la thermodynamique affirme que ce n'est pas le cas (sinon, on pourrait trouver une petite courbe fermée  $\gamma$  au voisinage de  $x_0$  le long de laquelle le bilan de chaleur  $\int_\gamma \alpha$  est non-nul). On conclut que le champ d'hyperplans  $\ker \alpha$  est intégrable, et que la forme  $\alpha$  admet localement un facteur intégrant, c'est à dire qu'il existe localement des fonctions  $T > 0$  et  $S$  telles que  $\alpha = TdS$ .

## 9.4 Complément : fibrés vectoriels

Un fibré vectoriel de rang  $k$  au dessus de la variété  $M$  est la donnée, pour chaque point  $x$  de  $M$ , d'une espace vectoriel  $F(x)$  de dimension  $k$ . On a alors un espace total  $E := \{(x, v), x \in M, v \in F(x)\}$  et une projection naturelle  $\pi : E \rightarrow M$ . On suppose de plus qu'est donné un espace vectoriel  $\mathcal{S}$  de sections de  $\pi$  qui vérifie :

Pour tout  $x_0 \in M$ , il existe  $k$  sections  $s_1, \dots, s_k$  dans  $\mathcal{S}$  et un voisinage  $U$  de  $x_0$  telles que, pour chaque  $x \in U$ , les vecteurs  $s_i(x)$  forment une base de  $F(x)$  et tel que toute section  $s \in \mathcal{S}$  est, sur  $U$ , une combinaison linéaire à coefficients  $C^\infty$  des sections  $s_1, \dots, s_k$ .

On dit que le fibré est trivial sur  $U$  si il existe des sections  $s_1, \dots, s_k$  comme ci-dessus.

L'application

$$U \times \mathbb{R}^k \ni (x, t) \mapsto (x, \sum t_i s_i(x)) \in \pi^{-1}(U)$$

est alors bijective et linéaire dans les fibres, son inverse est appelé une trivialisatation locale du fibré.

Il existe une unique structure de pré variété sur  $E$  telle que  $\pi$  est une submersion et telle que les sections de  $\mathcal{S}$  sont différentiables. Pour tout ouvert  $U$  de la base  $M$  qui est un ouvert de carte de  $M$  et qui est tel que le fibré est trivial au dessus de  $U$ , on a une paramétrisation

$$V \times \mathbb{R}^k \ni (y, t) \mapsto (\phi(y), \sum t_i s_i(\phi(y)))$$

de  $\pi^{-1}(U)$ , où  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et où  $\phi : V \rightarrow U$  est un difféomorphismes. Ces paramétrisations forment un atlas de  $E$ .

**Exercice 9.10.** Soient  $\pi : E \rightarrow M$  et  $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow M$  deux fibrés vectoriels de base  $M$ . Soit  $g : E \rightarrow \tilde{E}$  une application différentiable qui envoie chaque fibre de  $F(x) = \pi^{-1}(x)$  dans la fibre de  $\tilde{F}(x) = \tilde{\pi}^{-1}(x)$  par une injection linéaire. Montrer que  $g$  est un plongement de  $E$  dans  $\tilde{E}$ .

**Théorème 9.19.** Tout fibré vectoriel de rang  $k$  au dessus de la variété  $M$  admet un plongement (de fibré vectoriel) à valeurs dans le fibré trivial  $M \times \mathbb{R}^{d_M+k}$ . Son espace total est une variété différentiable.

On rappelle qu'un sous fibré équivalent à un sous-fibré d'un fibré trivial est dit de type fini. Tout fibré vectoriel de rang fini au dessus d'une variété est donc de type fini.

**Lemme 9.20.** Si  $\pi : E \rightarrow M$  est un sous fibré vectoriel de  $M \times \mathbb{R}^n$  de rang  $k$ , alors il existe une application linéaire  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$  telle que l'application  $(x, v) \mapsto (x, L(v))$  induit un plongement au dessus de l'identité de  $E$  dans  $M \times \mathbb{R}^{d_M+k}$ .

DÉMONSTRATION. On suppose que  $k > 0$ . Soit  $SE \subset M \times \mathbb{R}^n$  l'ensemble des  $(x, v) \in E$  tels que  $|v| = 1$  (norme Euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ ). C'est une sous variété de  $E$ , de dimension  $d_M + k - 1$ , car 1 est une valeur régulière de l'application  $v \mapsto |v|^2$  sur chaque fibre  $F(x)$  et donc une valeur régulière de l'application  $(x, v) \mapsto |v|^2$  sur  $E$ .

Considérons maintenant l'application  $g : SE \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k}) \rightarrow \mathbb{R}^{d_M+k}$  définie par

$$g(x, v, L) = L \cdot v.$$

C'est un submersion sur  $SE \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$ , et  $g^{-1}(0)$  est donc une sous variété de  $SE \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$  de codimension  $d_M + k$ , c'est à dire de dimension strictement inférieure à la dimension de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$ . Sa projection sur ce facteur est donc de mesure nulle, et il existe un point  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{d_M+k})$  qui n'est pas dans cette projection. Pour un tel  $L$ , on voit que  $L|_{E(x)}$  est injective pour tout  $x$ , c'est à dire que l'application  $(x, v) \mapsto (x, L \cdot v)$  est un plongement.  $\square$

**Lemme 9.21.** *Si  $\pi : E \rightarrow M$  est un fibré vectoriel et si  $V$  est un ouvert relativement compact de  $M$ , alors il existe un plongement au dessus de l'identité de  $\pi^{-1}(V)$  à valeurs dans  $V \times \mathbb{R}^{d_M+k}$ .*

DÉMONSTRATION. On recouvre  $V$  par un nombre fini  $N$  d'ouverts  $V_i$  pour lesquels il existe une trivialisatoin  $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^k$ . On note  $h_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^k$  la seconde composante de  $\phi_i$ . On considère une partition de l'unité  $f^i$  subordonnée aux ouverts  $U_i$ . Les applications  $H_i(x, v) := f^i(x)h_i(x, v)$  sont étendues par 0 en dehors de  $\pi^{-1}(U_i)$ . L'application  $H : E \rightarrow (\mathbb{R}^k)^N$  ayant pour composantes les  $H_i$  est linéaire et injective dans chaque fibre. En effet, pour tout  $x \in M$ , il existe  $i$  tel que  $f_i(x) > 0$ , mais alors l'application  $H_i$  est injective sur la fibre  $F(x)$ . On a donc un plongement  $z \mapsto (\pi(z), H(z))$  de  $E$  dans  $M \times \mathbb{R}^{kN}$ . En appliquant le premier lemme, on en déduit l'existence d'un plongement linéaire dans les fibres à valeurs dans  $\mathbb{R}^{d_M+k}$ , de la forme  $z \mapsto (\pi(z), L \circ H(z))$ .  $\square$

**Lemme 9.22.** *Si  $\pi : E \rightarrow M$  est un fibré vectoriel sur la variété  $M$  alors il existe un plongement au dessus de l'identité de  $E$  dans  $V \times \mathbb{R}^{d_M+k}$ .*

DÉMONSTRATION. On considère une fonction propre  $g$  sur  $M$ , les ouverts  $U_i = g^{-1}(]i, i+2])$  et une partition de l'unité  $f_i$  adaptée aux ouverts  $U_i$ . Pour chaque  $i$ , il existe une application linéaire dans les fibres  $\theta_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^{d_M+k}$  telle que  $z \mapsto (\pi(z), \theta_i(z))$  est un plongement. On prolonge  $\theta_i$  par 0 en dehors de  $\pi^{-1}(U_i)$ , et on considère les application  $\Theta := \sum_k \theta_{2k}$  (au plus un des termes de cette somme est non nul pour chaque point) et  $\tilde{\Theta} = \sum_k \theta_{2k+1}$ . L'application  $(\Theta, \tilde{\Theta}) : E \rightarrow \mathbb{R}^{2(d_M+k)}$  induit une injection linéaire sur chaque fibre. Au vu du premier lemme, il existe donc  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2(d_M+k)}, \mathbb{R}^{d_M+k})$  telle que  $L \circ (\Theta, \tilde{\Theta})$  induit une injection linéaire dans chaque fibre.  $\square$

Le fibré tangent  $TM$  d'une variété est le fibré dont les sections sont les champs de vecteurs, le fibré cotangent  $T^*M$  est le fibré dont les sections sont les formes de Pfaff.

## 10 Formes différentielles

### 10.1 Formes multilinéaires alternées.

Étant donné un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , on note  $A^k E$  l'espace des formes  $k$ -linéaires alternées sur  $E$ .

Pour  $k = 1$ ,  $A^1 E$  est le dual de  $E$ . Pour  $k = \dim E$ ,  $A^k E$  est de dimension 1. En particulier,  $A^k(\mathbb{R}^k)$  est engendré par le déterminant.

Si  $l_1, \dots, l_k$  sont des éléments de  $E^*$ , alors on note  $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$  l'élément de  $A^k E$  défini par

$$l_1 \wedge \dots \wedge l_k = \det((l_i(v_j))_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k}) = \det(Lv_1, \dots, Lv_k),$$

où  $L : E \rightarrow \mathbb{R}^k$  est l'application linéaire de coordonnées  $l_i$ . On remarque que l'application

$$(l_1, \dots, l_k) \mapsto l_1 \wedge \dots \wedge l_k$$

est linéaire et antisymétrique. Son image engendre linéairement  $A^k E$  (mais, si  $k > 1$ , son image n'est pas égale à  $A^k E$ , on appelle décomposables les formes linéaires alternées de la forme  $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$ ). La forme  $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$  est non nulle si et seulement si les formes linéaires  $l_i$  sont indépendantes dans  $E^*$ .

**Propriété 10.1.** Soit  $e_1, \dots, e_d$  une base de  $E$  et soit  $l_i$  la base duale. Alors les éléments  $l_{i_1} \wedge \dots \wedge l_{i_k}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  forment une base de  $A^k E$ , dans laquelle chaque élément  $a \in A^k E$  se décompose en

$$a = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) l_{i_1} \wedge \dots \wedge l_{i_k}.$$

L'espace vectoriel  $A^k E$  est donc de dimension  $\binom{d}{k}$ .

DÉMONSTRATION. Pour calculer  $a(v_1, \dots, v_k)$ , on écrit  $v_i = \sum_j l_j(v_i) e_j$  et on décompose alors par multilinéarité

$$\begin{aligned} a(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k} a(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}) l_{j_1}(v_1) \cdots l_{j_k}(v_k) \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} a(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}}) l_{i_{\sigma(1)}}(v_1) \cdots l_{i_{\sigma(k)}}(v_k) \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} s(\sigma) l_{i_{\sigma(1)}}(v_1) \cdots l_{i_{\sigma(k)}}(v_k) \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) l_1 \wedge \dots \wedge l_k(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

L'unicité de la décomposition découle facilement de l'observation que, si  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  et  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$  sont des suites différentes, alors  $l_{i_1} \wedge \dots \wedge l_{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0$ .  $\square$

Si  $L : E \rightarrow F$  est linéaire, alors pour tout  $k$  on définit l'application linéaire  $A^k L : A^k F \rightarrow A^k E$  par

$$(A^k L)\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(Av_1, \dots, Av_k).$$

On la notera souvent  $L^*$  au lieu de  $A^k L$ . On constate que  $L^* l_1 \wedge \dots \wedge L^* l_k = L^*(l_1 \wedge \dots \wedge l_k)$  pour  $l_i \in E^*$ . Si  $L$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$  et si  $\dim E = k$ , alors  $A^k L$  est la multiplication par  $\det L$ , ce que l'on peut réécrire  $L^* \alpha = (\det L)\alpha$ . Plus généralement, si  $L : E \rightarrow F$  est linéaire, si  $(e_i)$  est une base de  $E$  et  $(f_j)$  une base de  $F$ , alors les coefficients de  $A^k L$  dans les bases  $f_{j_1} \wedge \dots \wedge f_{j_k}$  et  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$  sont les déterminants des matrices  $k \times k$  extraites de la matrice représentant  $L$ .

Étant donné une  $k$  forme alternée  $\alpha$  sur  $E$  et un vecteur  $v \in E$ , on définit le produit intérieur  $i_v \alpha$  comme la  $(k-1)$  forme alternée

$$i_v \alpha(v_1 \dots v_{k-1}) := \alpha(v, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

**Propriété 10.2.**

$$\begin{aligned} i_v(l_1 \wedge \dots \wedge l_k) &= \sum_i (-1)^{i+1} l_i(v) l_1 \wedge \dots \wedge l_{i-1} \wedge l_{i+1} \wedge \dots \wedge l_k. \\ i_v(\alpha \wedge \beta) &= (i_v \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_v \beta. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. La première égalité est le développement du déterminant

$$(l_1 \wedge \dots \wedge l_k)(v, v_2, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} l_1(v) & l_1(v_2) & \dots & l_1(v_k) \\ l_2(v) & l_2(v_2) & \dots & l_2(v_k) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_k(v) & l_k(v_2) & \dots & l_k(v_k) \end{vmatrix}$$

par rapport à la première colonne. La seconde égalité découle facilement de la première.  $\square$

Le noyau  $\ker \alpha$  de la forme  $\alpha$  est défini comme l'ensemble des vecteurs  $v$  tels que la  $(k-1)$ -forme  $i_v \alpha$  est nulle.

**Propriété 10.3.** *Le noyau d'une  $k$ -forme non-nulle  $\alpha$  est de dimension au plus  $d - k$ . De plus, si ce noyau est de dimension  $d - k$ , alors la forme  $\alpha$  est décomposable, et elle est proportionnelle à  $l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$  pour toute base  $(l_1, \dots, l_k)$  de l'orthogonal de  $\ker \alpha$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $F$  est un supplémentaire du noyau de  $\alpha$ . La restriction de  $\alpha$  à  $F$  est une  $k$ -forme non-nulle (le vérifier), donc  $k \leq \dim F$ . La  $k$ -forme  $\alpha$  a un noyau de dimension  $n - k$  si et seulement si elle est décomposable et non nulle. En effet, soit  $F$  un supplémentaire de  $\ker \alpha$  et  $\pi$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $\ker \alpha$ . Alors la restriction  $\beta$  de  $\alpha$  à  $F$  est une  $k$ -forme sur l'espace  $F$  de dimension  $k$ , donc elle est décomposable. La forme  $\alpha = \pi^* \beta$  est donc décomposable. Le noyau de la forme décomposable non-nulle  $l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$  est  $\ker l_1 \cap \cdots \cap \ker l_k$ .  $\square$

Définissons maintenant le produit extérieur  $\wedge : A^k E \times A^l E \longrightarrow A^{k+l} E$  par les formules

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_1 \dots v_{k+l}) &:= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} s(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in Q(k,l)} s(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}), \end{aligned}$$

où  $Q(k, l) \subset \mathfrak{S}_{k+l}$  est l'ensemble des permutations  $\sigma$  telles que  $\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(k)$  et  $\sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \cdots < \sigma(k+l)$ ; cet ensemble contient un élément dans chaque classe à droite de  $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_l$ . Le produit extérieur est bilinéaire, et vérifie

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$$

où  $(-1)^{kl}$  est la signature de la permutation  $(1, \dots, k+l) \mapsto (k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k)$ .

**Propriété 10.4.** *On a*

$$(l_1 \wedge \cdots \wedge l_k) \wedge (l_{k+1} \wedge \cdots \wedge l_{k+l}) = l_1 \wedge \cdots \wedge l_{k+l}$$

*pour toutes formes linéaires  $l_1, \dots, l_{k+l}$ . Le produit extérieur est donc associatif.*

DÉMONSTRATION. Posons  $\alpha = l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$  et  $\beta = l_{k+1} \wedge \cdots \wedge l_{k+l}$ .

Si les formes  $l_1, \dots, l_{k+l}$  sont linéairement indépendantes, alors il existe des vecteurs  $v_j, 1 \leq j \leq k+l$  tels que  $l_i(v_j) = \delta_{i,j}$ . On a alors, pour ces vecteurs,

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) = 1 = l_1 \wedge \cdots \wedge l_{k+l}(v_1, \dots, v_{k+l}).$$

On déduit de ce calcul que l'égalité voulue est satisfaite dans le cas où  $\alpha \wedge \beta$  est nulle (ce qui ne peut arriver que si les formes  $l_i, 1 < i < l+k$  sont liées).

Si les formes  $(l_1, \dots, l_k)$  sont liées, les deux membres sont nuls et l'égalité est satisfaite. Il en est de même si les formes  $(l_{k+1}, \dots, l_{k+l})$  sont liées.

Dans les autres cas, le noyau  $\ker \alpha = \ker l_1 \cap \cdots \cap \ker l_k$  est de dimension  $d - k$ , et le noyau  $\ker \beta = \ker l_{k+1} \cap \cdots \cap \ker l_{k+l}$  est de dimension  $d - l$ . L'intersection  $\ker \alpha \cap \ker \beta$  est de dimension au moins  $d - (k+l)$ . Il découle de la définition de  $\alpha \wedge \beta$  que  $\ker \alpha \cap \ker \beta \subset \ker(\alpha \wedge \beta)$ .

Si la forme  $(k+l)$ -forme  $\alpha \wedge \beta$  est non nulle (le cas où elle est nulle a déjà été traité) son noyau est de dimension au plus  $d - (k+l)$  donc en l'occurrence égale à  $d - (k+l)$ . Ce noyau est donc égal à  $\ker \alpha \cap \ker \beta = \bigcap_{i=1}^{k+l} \ker l_i$  et la forme  $\alpha \wedge \beta$  est proportionnelle à  $l_1 \wedge \cdots \wedge l_{k+l}$ . Le calcul initial de cette preuve montre que le coefficient de proportionnalité est égal à un.  $\square$

En particulier, cette application coïncide avec celle que nous avons déjà définie de  $A^1 E \times A^1 E$  dans  $A^2 E$ .

L'ensemble des  $k$ -formes décomposables est un cône. Pour l'étudier, on considère son image  $N$  dans le projectif  $G(1, A^k E)$ .  $N$  est donc l'ensemble des droites vectorielles de  $A^k E$  dirigées par des formes décomposables non nulles. On fixe une base et on identifie  $E$  à  $\mathbb{R}^d$ . Le groupe orthogonal  $O(d)$  agit sur  $G(1, A^k \mathbb{R}^d)$  par  $O, \alpha \mapsto (O^{-1})^* \alpha$ . Comme  $O(d)$  est compact cette action est propre, ses orbites sont des variétés. La trace  $N$  des formes décomposables sur  $G(1, A^k \mathbb{R}^d)$  est une orbite de cette action, c'est donc une variété. Le groupe isotrope des transformations qui fixent  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$  est le groupe  $O(k) \times O(d-k)$  des transformations orthogonales qui fixent  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ . La variété  $N$  est donc difféomorphe à la grassmanienne  $G(k, d)$ , ou à la Grassmanienne  $G(d-k, d)$ .

On construit directement une bijection de  $G(k, d)$  dans  $N$  de la façon suivante : étant donné  $F \in G(d-k, d)$  on prend une base  $l_1, \dots, l_k$  de l'orthogonal de  $F$  dans  $(\mathbb{R}^d)^*$  et on associe à  $F$  la droite vectorielle dirigée forme  $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$ , qui est non-nulle. Cette droite ne dépend pas du choix de la base (mais la forme  $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$  en dépend, à un facteur près). Le passage par l'action du groupe orthogonal ci-dessus permet de montrer sans effort que l'application que nous venons de définir est bien un difféomorphisme.

L'ensemble des formes décomposables non nulles est donc une sous-variété de  $A^k E$  de dimension  $1 + k(d-k)$ . On vérifie que  $1 + k(d-k) < \binom{d}{k}$  sauf si  $k \leq 1$  ou  $k \geq d-1$ .

## 10.2 Formes différentielles

Une  $k$ -forme différentielle sur la variété  $M$  est la donnée, pour chaque  $x \in M$ , d'une forme  $k$ -linéaire alternée  $\alpha_x$  sur  $T_x M$ . On suppose de plus que  $\alpha_x$  dépend régulièrement de  $x$ , c'est à dire que, étant donnés  $k$  champs de vecteurs différentiables  $X_1, \dots, X_k$  sur  $M$ , la fonction  $x \mapsto \alpha_x(X_1, \dots, X_k)$  est différentiable. Il est pratique d'assimiler les fonctions à des 0-formes.

Il existe un unique fibré vectoriel  $A^k(TM)$  au dessus de  $M$  dont les fibres sont les espaces  $A^k T_x M$  et dont les sections différentiables sont les formes différentielles de degré  $k$ . Les formes de Pfaff sont les formes différentielles de degré un.

Une  $k$ -forme différentielle  $\alpha$  engendre donc une application  $\mathbb{R}$ -multilinéaire alternée sur l'espace des champs de vecteurs dans  $C^\infty(M)$ . Réciproquement, une telle application multilinéaire alternée  $a$  "vient" d'une forme différentielle si et seulement si elle vérifie

$$a(fX_1, X_2, \dots, X_k) = fa(X_1, \dots, X_k)$$

pour toute fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  (la preuve est la même que pour les formes de Pfaff).

On note  $\Lambda^k M$  l'ensemble des  $k$ -formes différentielles sur  $M$ . On définit fibre à fibre le produit  $\wedge : \Lambda^k M \times \Lambda^l M \rightarrow \Lambda^{k+l} M$ .

Si  $\varphi : M \rightarrow N$  est une application différentiable et si  $\alpha$  est une  $k$ -forme sur  $N$ , alors on définit la forme  $\varphi^* \alpha$  sur  $M$  par

$$(\varphi^* \alpha)_x = A^k(d\varphi_x) \alpha_{\varphi(x)}$$

c'est à dire

$$(\varphi^* \alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{\varphi(x)}(d\varphi_x \cdot v_1, \dots, d\varphi_x \cdot v_k).$$

On voit que  $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$  et on rappelle que  $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$  pour toute fonction  $f$ . Une  $k$ -forme différentielle est dite décomposable si elle s'écrit  $gdf_1 \wedge \dots \wedge df_k$ . Si  $\alpha$  est décomposable, alors  $\varphi^* \alpha$  l'est aussi, au vu de la propriété ci-dessous.

### Propriété 10.5.

$$\varphi^*(gdf_1 \wedge \dots \wedge df_k) = (g \circ \varphi) d(f_1 \circ \varphi) \wedge \dots \wedge d(f_k \circ \varphi),$$

ce qui s'écrit aussi

$$\varphi^*(gdf_1 \wedge \dots \wedge df_k) = (\varphi^* g)(\varphi^* df_1) \wedge \dots \wedge (\varphi^* df_k).$$

DÉMONSTRATION. Pour vérifier cette égalité, on constate que

$$\begin{aligned}
\varphi^*(gdf_1 \wedge \cdots \wedge df_k)_x(v_1, \dots, v_k) &= g \circ \varphi(x)((df_1)_{\varphi(x)} \wedge \cdots \wedge (df_k)_{\varphi(x)})(d\varphi_x \cdot v_1, \dots, d\varphi_x \cdot v_k) \\
&= g \circ \varphi(x) \det(((df_i)_{\varphi(x)} \circ d\varphi_x \cdot v_j)_{i,j}) \\
&= g \circ \varphi(x) \det((d(f_i \circ \varphi)_x \cdot v_j)_{i,j}) \\
&= (g \circ \varphi)d(f_1 \circ \varphi) \wedge \cdots \wedge d(f_k \circ \varphi).
\end{aligned}$$

□

Toute  $k$ -forme différentielle sur  $\mathbb{R}^d$  est de la forme

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

où  $dx_i$  désigne la forme linéaire  $l_i$  de la base duale canonique (qui est aussi la forme  $df$  pour  $f = x_i$ ).

Si  $\alpha$  est une forme sur  $M$  et si  $\varphi$  est une paramétrisation locale de  $M$  au voisinage de  $x_0$ , alors  $\varphi^*\alpha$  est une forme sur  $\mathbb{R}^d$ , c'est donc une somme finie de formes décomposables. On en déduit que  $\alpha$  est localement une somme finie de formes décomposables. En utilisant une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de  $M$  par des disques plongés, on conclut :

**Proposition 10.6.** *Toute  $k$ -forme différentielle sur la variété  $M$  est une somme localement finie de formes décomposables.*

On a aussi

**Propriété 10.7.**  $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$ .

En effet cette égalité est clairement satisfaite lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  sont décomposables, et les deux membres sont linéaires. La proposition suivante sera utile :

**Proposition 10.8.** *Soit  $\alpha$  une forme décomposable non nulle en  $x_0$ . Considérons deux décompositions  $\alpha = fdg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$  et  $\alpha = \tilde{f}d\tilde{g}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{g}_k$  au voisinage de  $x_0$ . Alors il existe un difféomorphisme local  $\phi$  de  $\mathbb{R}^k$  tel que, au voisinage de  $x_0$ ,*

$$(\tilde{g}_1(x), \dots, \tilde{g}_k(x)) = \phi(g_1(x), \dots, g_k(x)).$$

En conséquence,

$$(d\tilde{g}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{g}_k)_x = \det(d\phi(g_1(x), \dots, g_k(x)))(dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x.$$

DÉMONSTRATION. Considérons le champ de sous-espaces de dimension  $d - k$  donné par  $H(x) = \ker \alpha_x$ . Ce champ est intégrable, ses feuilles locales sont les fibres de la submersion  $\psi : M \ni x \mapsto (g_1(x), \dots, g_k(x)) \in \mathbb{R}^k$ . Ce sont aussi les fibres de la submersion  $\tilde{\psi} : M \ni x \mapsto (\tilde{g}_1(x), \dots, \tilde{g}_k(x)) \in \mathbb{R}^k$ . Soit  $N$  un petit disque de dimension  $k$  transverse à  $H(x_0)$ . La restriction à  $N$  de chacune des submersions  $\psi$  et  $\tilde{\psi}$  est un difféomorphisme sur son image. L'application  $\phi := \tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$  convient. □

Étant donné un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ , on définit l'opérateur  $\mathcal{L}_X$  sur  $\Lambda^k M$  par

$$(\mathcal{L}_X \alpha)_x = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} ((\varphi_X^s)^* \alpha)_x.$$

On remarque que, dans le cas où  $\alpha$  est de degré 0, c'est à dire une fonction  $f$ , on a  $(\varphi_X^s)^* f = f \circ \varphi_X^s$  et l'opérateur  $\mathcal{L}_X$  coïncide avec celui que nous avons déjà défini. On déduit de la propriété 10.7 par bilinéarité que :

**Propriété 10.9.**  $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X\beta)$ .

Un calcul immédiat montre

**Propriété 10.10.**  $\psi^*(\mathcal{L}_{\psi_*X}\alpha) = \mathcal{L}_X\alpha$ .

On remarque aussi les identités  $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$  et  $\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_Xf)$ , et finalement :

**Propriété 10.11.**  $\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X$ .

DÉMONSTRATION. Cette égalité est vraie pour les formes de degré 0, c'est une des définitions du crochet de Lie. Au vu de l'identité  $\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_Xf)$ , elle est donc vraie pour toute 1 forme exacte  $\alpha = df$ . Au vu de la propriété 10.9, elle est donc satisfaite pour toute forme décomposable, et donc pour toute forme.  $\square$

### 10.3 Intégration et formule de Stokes sur le cube.

On peut intégrer les  $d$ -formes différentielles sur  $\mathbb{R}^d$ . En définissant la  $d$ -forme de référence  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ , on peut écrire toute  $d$ -forme  $\alpha$  sous la forme  $\alpha_x = a(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ . Dans le cas où  $\alpha$  est à support compact, on définit alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \alpha := \int_{\mathbb{R}^d} a(x)dx.$$

Plus généralement, pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^d$ , et toute forme  $\alpha$  définie sur  $\mathbb{R}^d$  (ou sur un voisinage de  $K$ ), on définit

$$\int_K \alpha := \int_K a(x)dx.$$

Cette définition est moins naïve qu'il n'y paraît au vu de la proposition suivante. On dit que le difféomorphisme  $\varphi$  de  $\mathbb{R}^d$  (ou entre ouverts de  $\mathbb{R}^d$ ) préserve l'orientations si  $\det d\varphi > 0$  en tout point.

**Proposition 10.12.** Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\alpha$  une forme différentielle sur  $V$ , et  $K$  un compact contenue dans  $V$ . Soit  $\varphi : W \rightarrow V$  un difféomorphisme qui préserve l'orientation, alors

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^*\alpha = \int_K \alpha.$$

DÉMONSTRATION. En écrivant  $\alpha$  sous la forme  $\alpha_x = a(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ , on a

$$(\varphi^*\alpha)_x = (\det d\varphi_x)a(\varphi(x))dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d.$$

On a donc  $\int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^*\alpha = \int_{\varphi^{-1}(K)} (\det d\varphi_x)a(\varphi(x))dx$ , et, comme  $\varphi$  préserve l'orientation

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^*\alpha = \int_{\varphi^{-1}(K)} |\det d\varphi_x|a(\varphi(x))dx = \int_K a(x)dx,$$

où la dernière égalité est la formule de changement de variables dans les intégrales multiples.  $\square$

Considérons le cube  $C = [0, 1]^d$ . Il a  $2d$  faces que nous notons  $C_1^0 = \{0\} \times [0, 1]^{d-1}$ ,  $C_1^1 = \{1\} \times [0, 1]^{d-1}$ ,  $C_2^0 = [0, 1] \times \{0\} \times [0, 1]^{d-2}$ , etc.. En notant  $\omega_i$  la forme  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_d$ ,

toute  $(d-1)$ -forme  $\alpha$  s'écrit  $\sum_i a_i(x)\omega_i$ . La restriction de chacune des formes multilinéaires  $\omega_j, j \neq i$  à un sous-espace contenant  $e_i$  est nulle. Il est donc naturel de poser

$$\int_{C_i^0} \alpha := \int_{[0,1]^{d-1}} a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_d$$

et

$$\int_{C_i^1} \alpha := \int_{[0,1]^{d-1}} a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_d.$$

On définit alors l'intégrale de  $\alpha$  sur le bord de  $C$  par

$$\int_{\partial C} \alpha := \sum_{i=1}^d (-1)^i \left( \int_{C_i^0} \alpha - \int_{C_i^1} \alpha \right).$$

Comme

$$a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_d) - a_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_d) = \int_0^1 \partial_i a_i(x_1, \dots, x_d) dx_i,$$

on obtient

$$\int_{\partial C} \alpha = \int_C \sum_{i=1}^d (-1)^{i+1} \partial_i a(x_1, \dots, x_d) dx_1 \cdots dx_d.$$

En notant  $d\alpha$  la  $d$ -forme

$$d\alpha := \left( \sum_{i=1}^d (-1)^{i+1} \partial_i a(x_1, \dots, x_d) \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$$

on a démontré :

**Proposition 10.13.**  $\int_{\partial C} \alpha = \int_C d\alpha$

On va maintenant extrapoler autour de cette formule. On va définir une différentielle  $d$  sur les formes différentielles, la différentielle extéreuse, une notion d'intégration sur les variétés et une notion de bord de sorte que la formule de Stokes  $\int_{\partial M} \alpha = \int_M d\alpha$  soit satisfaite.

## 10.4 Différentielle extéreuse

On définit un opérateur  $d$  qui, à une  $k$ -forme sur une variété  $M$  associe une  $k+1$ -forme. On demande au vu de l'étude ci-dessus que la différentielle de la forme  $a(x)dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k$  sur  $\mathbb{R}^k$  soit  $\partial_1 a(x)dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1}$ . Cette dernière forme n'est autre que  $da \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1}$ . On demande aussi que l'opérateur  $d$  se comporte bien par changement de carte, et plus généralement que

$$\varphi^* d\alpha = d(\varphi^* \alpha)$$

pour toute application différentiable  $\varphi$ . Au vu de ces deux propriétés, la différentielle d'une forme décomposable  $\alpha = f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$  ne peut être que

$$df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k.$$

En effet, on considère l'application  $\varphi(x) = (f(x), g_1(x), \dots, g_k(x))$ . On a alors  $f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k = \varphi^*(x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k)$  et donc  $d(f dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k) = \varphi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k) = df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$ .

**Théorème 10.14.** Soit  $M$  une variété. Il existe une unique famille d'applications  $\mathbb{R}$ -linéaires  $d_k : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k+1} M$  telles que

$$(d_k \alpha)_x = (df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x$$

si  $\alpha = fdg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$  au voisinage de  $x$ .

Par définition, on a  $d_1 f = df$  pour toute fonction  $f$ . On notera  $d$  la différentielle  $d_k$ .

DÉMONSTRATION. L'unicité est claire, mais pas l'existence. Commençons par démontrer que, si  $\alpha$  est une forme nulle au voisinage de  $x$ , alors, pour toute décomposition locale  $\alpha = fdg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$  on a  $(df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x = 0$ . Si  $(dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x = 0$ , il est clair que  $(df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x = 0$ . Si  $(dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x \neq 0$ , on doit avoir  $f = 0$  sur un voisinage de  $x$ , donc  $df_x = 0$ , et on a encore  $(df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x = 0$ .

Considérons maintenant une  $k$ -forme décomposable  $\alpha$  et deux décompositions  $\alpha = fdg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$  et  $\alpha = \tilde{f}d\tilde{g}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{g}_k$ . On doit montrer l'égalité

$$(d\tilde{f} \wedge d\tilde{g}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{g}_k)_x = (df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x$$

pour tout  $x$ . Montrons cette égalité en un point  $x_0$  en lequel  $\alpha_{x_0}$  est non-nulle. Il découle de la proposition 10.8 qu'il existe un difféomorphisme local  $\phi$  de  $\mathbb{R}^k$  tel que

$$(d\tilde{g}_1 \wedge \cdots \wedge d\tilde{g}_k)_x = \det(d\phi(g_1(x), \dots, g_k(x))) (dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k)_x$$

au voisinage de  $x_0$ . On a alors  $\tilde{f}(x) = f(x)h(g_1(x), \dots, g_k(x))$  où  $h = 1/\det d\phi$ . On déduit que  $d\tilde{f} = hdf + \sum_i f \partial_i h dg_i$ , et on conclut l'égalité voulue puisque  $dg_i \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k = 0$ .

L'égalité voulue est démontrée sur l'ouvert  $U$  des points  $x$  en lesquels  $\alpha_x \neq 0$ . Par continuité, elle est aussi valide sur l'adhérence de cet ouvert. Nous avons aussi démontré qu'elle est satisfaisante sur le complémentaire de cette adhérence, donc partout.  $\square$

On appelle différentielle extérieure les applications  $d_k$  données par le théorème, elles sont en général toutes notées  $d$ , et c'est aussi ce que nous ferons. On déduit immédiatement de la définition :

**Propriété 10.15.**  $(d_k \alpha)_x = 0$  si  $\alpha$  est nulle au voisinage de  $x$ .

$d_1 f = df$  pour toute fonction  $f$ .

$d_{k+1} \circ d_k = 0$ .

$d_k(\varphi^* \alpha) = \varphi^*(d_k \alpha)$  Pour toute application différentiable  $\varphi$ .

$d_{k+l}(\alpha \wedge \beta) = (d_k \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d_l \beta)$ .

On notera  $d$  pour  $d_k$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer ces propriétés pour des formes décomposables, et elles sont immédiates. Détaillons juste le calcul pour la dernière. Si  $\alpha = fdg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k$  et  $\beta = hdg_{k+1} \wedge \cdots \wedge dg_{k+l}$ , alors  $\alpha \wedge \beta = fhdg_1 \wedge \cdots \wedge dg_{k+l}$  donc

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= hdf \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_{k+l} + fdh \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_{k+l} \\ &= (df \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k) \wedge (hdg_{k+1} \wedge \cdots \wedge dg_{k+l}) + fdg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k \wedge dh \wedge dg_{k+1} \wedge \cdots \wedge dg_{k+l} \\ &= (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k fdg_1 \wedge \cdots \wedge dg_k \wedge dh \wedge dg_{k+1} \wedge \cdots \wedge dg_{k+l} \\ &= (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta). \end{aligned}$$

$\square$

**Lemme 10.16.** Si  $\alpha_s$  est une famille (régulière) de  $k$ -formes, alors  $\partial_s(d\alpha_s) = d(\partial_s \alpha_s)$ .

DÉMONSTRATION. On se place au voisinage d'un point  $x_0$ . En prenant des fonctions  $f_1, \dots, f_d$  qui sont les coordonnées d'une carte locale, on voit que les formes  $(df_i)_x$  engendrent  $(T_x M)^*$  pour  $x$  proche de  $x_0$ . Toute  $k$ -forme différentielle au voisinage de  $x_0$  s'écrit donc

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}.$$

La famille  $\alpha_s$  s'écrit

$$\alpha_s = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(s, x) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} d(\partial_s \alpha_s) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \partial_x(\partial_s a_{i_1, \dots, i_k}) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \partial_s(\partial_x a_{i_1, \dots, i_k}) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k} = \partial_s(d\alpha_s). \end{aligned}$$

□

En dérivant par rapport à  $s$  l'égalité  $d((\varphi_X^s)^* \alpha) = (\varphi_X^s)^*(d\alpha)$ , on obtient :

**Proposition 10.17.** *Pour tout champ de vecteurs  $X$  on a  $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$ .*

On a finalement :

**Proposition 10.18** (Formule de Cartan).

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d.$$

DÉMONSTRATION. On vérifie pour les formes décomposables  $\alpha = f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$  :

$$\begin{aligned} i_X d\alpha &= \mathcal{L}_X f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k - \mathcal{L}_X g_1 df \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_k + \mathcal{L}_X g_2 df \wedge dg_1 \wedge dg_3 \wedge \dots \wedge dg_k + \dots \\ d(i_X \alpha) &= d(f \mathcal{L}_X g_1 dg_2 \wedge \dots \wedge dg_k - f \mathcal{L}_X g_2 dg_1 \wedge dg_3 \wedge \dots \wedge dg_k + \dots) \\ &= d(f \mathcal{L}_X g_1) \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_k - d(f \mathcal{L}_X g_2) \wedge dg_1 \wedge dg_3 \wedge \dots \wedge dg_k + \dots \\ &= \mathcal{L}_X g_1 df \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_k - \mathcal{L}_X g_2 df \wedge dg_1 \wedge dg_3 \wedge \dots \wedge dg_k + \dots \\ &\quad + f(\mathcal{L}_X dg_1) \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_k - f d(\mathcal{L}_X dg_2) \wedge dg_1 \wedge dg_3 \wedge \dots \wedge dg_k + \dots \\ \mathcal{L}_X \alpha &= \mathcal{L}_X f dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k + f(\mathcal{L}_X dg_1) \wedge dg_2 \wedge \dots \wedge dg_k + f dg_1 \wedge (\mathcal{L}_X dg_2) \wedge dg_3 \wedge \dots \wedge dg_k + \dots \end{aligned}$$

On peut aussi faire une preuve par récurrence sur le degré en utilisant les formules  $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X \alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X \beta$ ,  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$  et  $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X \beta$ . □

Soit  $M$  une variété munie d'une forme volume  $\omega$  (c'est à dire une  $d$ -forme qui ne s'annule pas). Pour tout champ de vecteurs  $X$ , on considère la  $(d-1)$ -forme  $i_X \omega$  et sa différentielle  $d(i_X \omega) = \mathcal{L}_X \omega$ . Cette  $d$ -forme est de la forme  $f\omega$  et on appelle divergence de  $X$  (par rapport à la forme volume  $\omega$ ) la fonction  $f$ . La divergence  $\text{div} X$  de  $X$  est donc la fonction définie par la formule

$$(\text{div} X)\omega = \mathcal{L}_X \omega = d(i_X \omega).$$

**Exercice 10.1.** Sur  $\mathbb{R}^d$  muni de la forme volume canonique  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ , la divergence du vecteur  $X = \sum_i X_i(x) e_i$  s'écrit  $\text{div} X = \sum_i \partial_i X_i$ .

Munissons maintenant  $\mathbb{R}^3$  de son produit Euclidien usuel et de sa forme volume canonique  $\omega$ . À tout champ de vecteurs  $X$ , on associe la 1-forme  $\alpha_x \cdot v = \langle X(x), v \rangle$  et la 2-forme  $i_X$ . On remarque que l'application  $v \mapsto i_v \omega$  est un isomorphisme entre  $A^1 \mathbb{R}^3$  et  $A^2 \mathbb{R}^3$ . On définit alors le rotationnel du champ de vecteurs  $X$  comme l'unique champ de vecteur tel que

$$d(\alpha_X) = i_{\text{rot } X} \omega.$$

## 10.5 Orientation et intégration

Le bon comportement de l'intégrale des formes différentielles sur  $\mathbb{R}^d$  (proposition 10.12) permet d'envisager une extension de l'intégrale aux variétés. Il y a toutefois une difficulté liée à la contrainte, dans la proposition 10.12, que le difféomorphisme  $\varphi$  préserve l'orientation. Ceci nous conduit aux définitions suivantes.

Un atlas de la variété  $M$  est dit orienté si tous les changements de cartes  $\varphi \circ \psi^{-1}$  sont des difféomorphismes de  $\mathbb{R}^d$  qui préservent l'orientation.

Une variété orientée est une variété munie d'un atlas orienté. Une orientation d'une variété  $M$  est le choix d'une structure de variété orientée pour  $M$  (c'est à dire d'un atlas orienté compatible avec la structure de variété de  $M$ ). Une variété orientable est une variété admettant une orientation.

Une orientation de  $M$  détermine une orientation de  $T_x M$  pour tout  $x$ . Cette orientation dépend continûment de  $x$  au sens où, si  $(V_i)$  sont des champs de vecteurs tels que les évaluations  $V_1(x), \dots, V_d(x)$  forment une base orientée de  $T_x M$ , alors les  $V_i(y)$  forment une base orientée de  $T_y M$  pour  $y$  proche de  $x$ . Réciproquement, la donnée d'une orientation de  $T_x M$  pour tout  $x$  dépendant continûment de  $x$  détermine une orientation de  $M$ .

Le choix de deux orientations d'une variété  $M$  détermine donc un signe localement constant. Une variété orientable connexe admet exactement deux orientations.

Soit  $\alpha$  une  $d$ -forme sur la variété orientée  $M$  supportée dans un compact d'un domaine de carte orientée. On définit l'intégrale

$$\int_M \alpha := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^* \alpha$$

où  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$  est n'importe quel plongement orienté dont l'image contient le support de  $\alpha$ . La proposition 10.12 implique que cette valeur ne dépend pas du choix de  $\varphi$ . En effet, si  $\psi$  est un autre plongement orienté, alors  $\psi^* \alpha = (\varphi^{-1} \circ \psi)^*(\varphi^* \alpha)$ , et  $\varphi^{-1} \circ \psi$  préserve l'orientation, donc  $\int \psi^* \alpha = \int \varphi^* \alpha$ .

Soit  $\Lambda_c^d M$  l'espace des  $d$  formes à support compact sur  $M$ .

**Définition 10.19.** L'intégrale  $\alpha \mapsto \int_M \alpha$  est l'unique forme linéaire sur  $\Lambda_c^d M$  telle que  $\int_M \alpha = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^* \alpha$  lorsque  $\varphi$  est un plongement orienté et  $\alpha$  une  $d$ -forme supportée dans l'image de  $\varphi$ .

Pour toute partie compacte  $K$  de  $M$ , l'intégrale  $\alpha \mapsto \int_K \alpha$  est l'unique forme linéaire sur  $\Lambda^d M$  telle que  $\int_K \alpha = \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \alpha$  lorsque  $\varphi$  est un plongement orienté et  $\alpha$  une  $d$ -forme supportée dans l'image de  $\varphi$ .

Pour calculer  $\int_K \alpha$ , on recouvre le compact  $K$  par un nombre fini d'images  $U_i$  de paramétrisations orientées  $\varphi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow M$ , on choisit une partition de l'unité  $f_i$  de  $M$  subordonnée au recouvrement  $(U_i, M - K)$  de  $M$ , et on pose

$$\int_K \alpha = \sum_i \int_{\varphi_i^{-1}(K)} \varphi_i^*(f_i \alpha) = \sum_i \int_K f_i \alpha.$$

Si  $(g_j)$  est une autre partition de l'unité subordonnée à un recouvrement par ouverts de cartes, alors

$$\sum_j \int_K g_j \alpha = \sum_{i,j} \int_K f_i g_j \alpha = \sum_i \int_K f_i \alpha,$$

c'est à dire que la somme est indépendante de la partition de l'unité choisie.

**Propriété 10.20.** Soit  $\phi : M \rightarrow N$  un difféomorphisme préservant l'orientation, soit  $K$  un compact de  $N$ , et soit  $\alpha$  une  $d$ -forme sur  $N$ . On a a

$$\int_{\phi^{-1}(K)} \phi^* \alpha = \int_K \alpha$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer la formule pour les formes  $\alpha$  supportées dans l'image d'une paramétrisation orientée  $\varphi$ . Dans ce cas, la forme  $\phi^* \alpha$  est supportée dans l'image de la paramétrisation orientée  $\phi^{-1} \circ \varphi$ , et on a

$$\int_{\phi^{-1}(K)} \phi^* \alpha = \int_{(\phi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(\varphi^{-1}(K))} (\phi^{-1} \circ \varphi)^* \phi^* \alpha = \int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^* \alpha = \int_K \alpha.$$

□

Étudions un peu plus la question de l'orientation. On donnera en particulier un exemple de variété non orientable. Une forme volume sur  $M$  est une  $d$ -forme  $\omega$  ( $d$  est la dimension de  $M$ ) ne s'annulant pas, c'est à dire que pour tout  $x \in M$ , la forme  $\omega_x$  sur  $T_x M$  est non nulle. Comme l'espace des  $d$ -formes alternées sur  $T_x M$  est de dimension 1 pour tout  $x$ , si  $\omega$  est une forme volume sur  $M$ , toute  $d$ -forme  $\alpha$  sur  $M$  s'écrit  $\alpha = f\omega$ .

**Proposition 10.21.** La variété  $M$  est orientable si et seulement si elle admet une forme volume.

DÉMONSTRATION. Soit  $\omega$  une forme volume sur  $M$ . Pour toute paramétrisation locale  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$ , la forme  $\varphi^* \omega$  est de la forme  $f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$  avec une fonction  $f$  qui ne s'annule pas. On dit que la paramétrisation  $\varphi$  est positive si  $f > 0$ , négative si  $f < 0$ . Si  $\varphi$  est une paramétrisation négative, alors  $\varphi \circ s$  est une paramétrisation positive, où  $s$  est la symétrie linéaire  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_d)$ . Les images des paramétrisations positives recouvrent donc  $M$ , et constituent un atlas de  $M$ . Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux paramétrisations positive, alors  $\varphi^* \omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$  et  $(\psi)^* \omega = g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$  donc

$$(\psi^{-1} \circ \varphi)^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d) = \frac{f}{g \circ \psi^{-1}} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d,$$

c'est à dire que  $\det d(\psi^{-1} \circ \varphi)_x = f(x)/g(\psi^{-1}(x)) > 0$ . L'atlas constitué des (inverses des) paramétrisations positives est donc orienté.

Réciproquement, considérons une variété orientée  $M$ , muni d'un atlas orienté constitué de cartes  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Considérons une partition de l'unité  $(f_i)$  subordonnée aux ouverts relativement compacts  $\varphi_i^{-1}(B)$ . La forme  $\alpha := \sum_i f_i \varphi_i^* \omega$ , où  $\omega$  est la  $d$ -forme canonique sur  $\mathbb{R}^d$ , est alors une forme volume. En effet, étant donné une paramétrisation orientée  $\psi$  de  $M$  en un point  $x$ , on a

$$\psi^* \alpha = \sum_i (f_i \circ \psi)(\varphi_i \circ \psi)^* \omega = \left( \sum_i g_i (f_i \circ \psi) \right) \omega$$

où chaque fonction  $g_i$  est strictement positive sur  $\psi^{-1}(U_i)$ . De plus, pour tout point  $x$  du domaine de  $\psi$ , il existe  $i$  tel que  $f_i \circ \psi(x) > 0$ , donc  $g_i(x)(f_i \circ \psi)(x) > 0$ , donc  $(\sum_i g_i (f_i \circ \psi))(x) > 0$ . Nous avons montré que la  $d$ -forme  $\alpha$  ne s'annule pas. □

**Propriété 10.22.** Soit  $\pi : M \rightarrow N$  un difféomorphisme local, et soit  $\varphi$  un difféomorphisme de  $M$  tel que  $\pi \circ \varphi = \pi$ . Si  $N$  est orientable, alors  $M$  l'est aussi, et  $\varphi$  préserve l'orientation.

DÉMONSTRATION. Soit  $\omega$  une forme volume sur  $N$ . Alors  $\pi^*\omega$  est une forme volume sur  $M$ , qui est donc orientable. De plus,  $\varphi^*(\pi^*\omega) = (\pi \circ \varphi)^*\omega = \pi^*\omega$  donc  $\varphi$  préserve la forme volume  $\pi^*\omega$  sur  $M$ , et donc l'orientation.  $\square$

La sphère  $S^d$  est orientable. On obtient un orientation de  $T_x S^d$  en choisissant les bases  $v_1, \dots, v_d$  telles que  $x, v_1, \dots, v_d$  est une base orientée de  $\mathbb{R}^{d+1}$ . L'application  $-Id$  préserve l'orientation de  $\mathbb{R}^d$  si et seulement si  $d$  est pair. On conclut que l'espace projectif  $\mathbb{R}P^d = S^d / -Id$  est orientable si et seulement si  $d$  est impair. On a utilisé :

**Propriété 10.23.** Soit  $M$  une variété orientable et  $G$  un groupe discret de difféomorphisme préservant l'orientation de  $M$  agissant librement et proprement. Alors le quotient  $M/G$  est une variété orientable.

Soit  $A^d TM$  le fibré vectoriel de rang un au-dessus de  $M$  dont les  $d$ -formes sont les sections. On peut le considérer comme un sous-fibré de  $M \times \mathbb{R}^{d+1}$ . Son intersection  $\hat{M}$  avec  $M \times S^d$  est une variété de dimension  $d$ , qui est telle que la projection  $\pi : \hat{M} \rightarrow M$  est un revêtement à deux feuilletés. La symétrie  $\sigma : (x, v) \mapsto (x, -v)$  préserve  $\hat{M}$  et sa restriction est un difféomorphisme  $\sigma$  tel que  $\pi \circ \sigma = \pi$  et  $\sigma \circ \sigma = Id$ .

**Proposition 10.24.** La variété  $\hat{M}$  est orientable, et la variété  $M$  est orientable si et seulement si  $\sigma$  préserve l'orientation.

On appelle  $\hat{M}$  le revêtement des orientations.

DÉMONSTRATION. Tout point  $\hat{x}$  de  $\hat{M}$  est de la forme  $(x, \omega)$  où  $\omega$  est une  $d$ -forme non-nulle sur  $T_x M$ . On définit une forme volume  $\alpha$  sur  $\hat{M}$  par

$$\alpha_{(x,\omega)} := d\pi_{(x,\omega)}^* \omega.$$

La variété  $\hat{M}$  est donc orientable. La seconde affirmation découle des propriétés ci-dessus.  $\square$

**Exercice 10.2.** Supposons  $M$  connexe. Montrer que  $M$  est orientable si et seulement si  $\hat{M}$  est connexe.

## 10.6 Domaines à bord et formule de Stokes

On note  $H^d$  le demi plan  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ .

**Définition 10.25.** Soit  $N$  une variété. On dit que  $M \subset N$  est un domaine à bord si pour tout  $x \in M$  il existe une carte  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  de  $N$  dont le domaine  $U$  contient  $x$  et telle que  $\phi(U \cap M) = \phi(U) \cap H^d$  (on ne demande pas que  $\phi(x) = 0$ ).

On appelle redressement à bord de  $M$  les cartes de  $M$  vérifiant la propriété ci-dessus.

Notons  $\overset{\circ}{M}$  l'intérieur de  $M$  dans  $N$  au sens topologique. Le point  $x \in M$  appartient à l'intérieur  $\overset{\circ}{M}$  si et seulement si il existe une carte  $\phi$  de  $N$  en  $x$  dont le domaine est contenu dans  $M$ . C'est aussi équivalent à l'existence d'un redressement à bord  $\phi$  de  $M$  tel que  $\phi(x)$  est dans l'intérieur de  $H^d$ .

Notons  $\partial M := M - \overset{\circ}{M}$  le bord de  $M$  en tant que domaine à bord. Attention, si  $M$  n'est pas fermé dans  $N$ ,  $\partial M$  n'est pas le bord topologique de  $M$  dans  $N$ . Considérer par exemple  $]0, 1[ \times ]0, 1]$ , qui est un domaine à bord difféomorphe à  $H^d$ , dont le bord en tant que domaine à bord est  $]0, 1[ \times \{1\}$  alors que son bord topologique est le carré.

**Propriété 10.26.** Les redressements à bords de  $M$  envoient le bord de  $M$  sur le bord de  $H^d$ . Plus précisément, si  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  est un redressement à bord de  $M$ , alors  $\phi(U \cap \partial M) = \phi(U) \cap \partial H^d$ .

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que  $\phi(U \cap \overset{\circ}{M}) = \phi(U) \cap \overset{\circ}{H}^d$ . C'est vrai car  $\phi : U \rightarrow \phi(U)$  est un homéomorphisme,  $U \cap \overset{\circ}{M}$  est l'intérieur topologique de  $U \cap M$  dans  $U$ ,  $\phi(U) \cap \overset{\circ}{H}^d$  est l'intérieur de  $H^d$  dans  $\phi(U) \cap H^d$ , et  $\phi(U \cap M) = \phi(U) \cap H^d$ .  $\square$

Les redressements à bord de  $M$  dont le domaine intersecte le bord de  $M$  sont donc des redressements du bord de  $M$ . Le bord de  $M$  est donc une sous variété de  $N$ , de dimension  $d - 1$ . L'espace tangent  $T_x N$  en un point du bord est découpé en trois parties : l'hyperplan  $T_x(\partial M)$  des vecteurs tangents à  $\partial M$ , qui sont ceux que les redressements de  $M$  envoient dans  $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$ , l'ouvert des vecteurs entrants dans  $M$ , qui sont ceux que les redressements envoient dans  $(-\infty, 0[ \times \mathbb{R}^{d-1}$ , et les vecteurs sortants (les termes entrant et sortant sont donc définis au sens strict).

On dit que  $M$  est orientable (orientée) si son intérieur l'est. Si  $M$  est orientée, tous les espaces tangents  $T_x M$ ,  $x \in M$  sont orientés.

Le bord de  $M$  est orientable (en tant que variété de dimension  $d - 1$ ) si  $M$  l'est. On va déterminer une orientation de  $\partial M$  en fonction d'une orientation de  $M$  (il y a la une convention arbitraire, mais universellement acceptée car elle permet de ne pas avoir de signe dans la formule de Stokes) :

On dit que la base  $(v_2, \dots, v_d)$  de  $T_x(\partial M)$  est orientée si  $(v, v_2, \dots, v_d)$  est une base orientée de  $T_x M$  pour tout vecteur sortant  $v$ .

Montrons pour commencer que ce choix est indépendant du choix du vecteur sortant  $v$ . En effet, si  $w$  est un autre vecteur sortant, alors il s'écrit  $av + a_2v_2 + \dots + a_dv_d$  avec  $a > 0$ . La base  $(w, v_2, \dots, v_d)$  est donc obtenue depuis la base  $(v, v_2, \dots, v_d)$  par la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ * & Id \end{pmatrix} \in Gl_d(\mathbb{R}),$$

qui est de déterminant  $a > 0$ .

Montrons maintenant que ce choix d'orientation est effectivement continu. On considère pour ceci des champs de vecteurs  $V_2, \dots, V_d$  tangents à  $\partial M$  et formant une base orientée en  $x_0 \in \partial M$ . On considère alors un champ de vecteurs  $V$  qui est sortant en  $x_0$ . Alors le champ de vecteurs  $V$  est sortant au voisinage de  $x_0$ , et  $(V(x), V_2(x), \dots, V_d(x))$  est une base orientée de  $T_x M$  pour tout  $x$  dans un voisinage de  $x_0$ . Ceci implique que  $(V_2(x), \dots, V_d(x))$  est une base orientée de  $T_x(\partial M)$  pour tout  $x$  voisin de  $x_0$  dans  $\partial M$ .

Par exemple, l'orientation de  $\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}$  en tant que bord de  $H^d$  est l'orientation donnée par  $(e_2, \dots, e_d)$  (c'est pour cette raison que nous avons travaillé avec le demi plan inférieur plutôt que supérieur). Ceci permet de donner une nouvelle définition de l'orientation du bord d'un domaine à bord : C'est l'unique orientation telle que la restriction au bord d'un redressement orienté de  $M$  est une carte orientée de  $\partial M$  (à valeurs dans  $\partial H^d$  muni de son orientation ci-dessus).

On peut utiliser cette convention pour orienter les faces du cube  $C^d = [0, 1]^d$ , (bien que celui-ci ne soit pas une variété à bord, il l'est quand on se restreint à la partie des points  $(x_i)$  dont au plus une coordonnée est égale à 0 ou 1). L'orientation de la face  $C_i^1$  est  $(-1)^{i+1}$  fois l'orientation donnée par  $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_d)$ . Ici,  $(-1)^{i+1}$  est la signature de la permutation circulaire  $1, \dots, i \mapsto i, 1, \dots, i - 1$ . L'orientation de la face  $C_i^0$  est  $(-1)^i$  fois l'orientation donnée par  $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_d)$ . Ceci coïncide avec les signes que nous avons mis dans la définition de  $\int_{\partial C} \alpha$ .

**Théorème 10.27 (Stokes).** Soit  $\alpha$  une  $(d - 1)$ -forme à support compact sur la variété  $N$  et  $M$  un domaine à bord orienté de  $N$ , alors

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_M d\alpha$$

si  $\partial M$  est muni de l'orientation induite de celle de  $M$ .

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord la formule dans le cas où  $M = H^d \subset N = \mathbb{R}^d$ . Elle prend la forme

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} (i_1)^* \alpha = \int_{H^d} d\alpha$$

où  $i_1 : (x_2, \dots, x_d) \mapsto (0, x_2, \dots, x_d)$  est la paramétrisation naturelle (et orientée) de  $\partial H^d$ . On pourrait se ramener au cas déjà fait du cube, mais on va plutôt refaire le calcul. On rappelle la notation  $\omega_i = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_d$ . Considérons d'abord une forme  $\alpha$  qui s'écrit  $\alpha_x = a(x)\omega_1$ . On a alors  $i_1^* \alpha(x_2, \dots, x_d) = a(0, x_2, \dots, x_d) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_d$  donc, par définition,  $\int_{\mathbb{R}^{d-1}} (i_1)^* \alpha = \int_{y \in \mathbb{R}^{d-1}} a(0, y) dy$ . Comme  $a$  est à support compact,

$$a(0, y) = \int_{-\infty}^0 \partial_1 a(t, y) dt$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} (i_1)^* \alpha = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} a(0, y) dy = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{(-\infty, 0]} \partial_1 a(t, y) dt dy = \int_{H^d} \partial_1 a = \int_{H^d} d\alpha$$

puisque  $d\alpha = da \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_d = \partial_1 a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$ . Dans le cas d'une forme  $\alpha_x = a(x)\omega_i$ ,  $i \geq 2$ , on a  $(i_1)^* \alpha = 0$ , et

$$\int_{H^d} d\alpha = \int_{H^d} (-1)^{i+1} (\partial_i a) dx = (-1)^{i+1} \int_{H^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_i a(x_1, \dots, x_d) dx_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_d = 0$$

car

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_i a(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_d) dt = 0$$

puisque  $a$  est à support compact. La formule est donc satisfaite aussi dans ce cas (les deux termes sont nuls). La formule est donc satisfaite pour toute forme à support compact.

Considérons maintenant un domaine à bord  $M \subset N$  général. Si  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow M$  est une paramétrisation orientée de  $N$  qui envoie  $H^d$  dans  $M$  et si  $\alpha$  est supportée sur l'image de  $\varphi$ , alors

$$\int_{\partial M} \alpha = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (\varphi \circ i_1)^* \alpha = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} i_1^* (\varphi^* \alpha) = \int_{H^d} d(\varphi^* \alpha) = \int_{H^d} \varphi^* (d\alpha) = \int_M d\alpha.$$

La formule de Stokes est donc satisfaite par la forme  $\alpha$ . Par linéarité, elle est donc satisfaite par toute forme  $\alpha$ . □