Fibrés vectoriels sur les courbes elliptiques

François Charles et Gabriel Giabicani
Sujet proposé par Olivier Schiffmann

Résumé

L'objet de ce mémoire est de présenter les notions de géométrie algébrique nécessaires à une étude élémentaire des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels sur une courbe algébrique. On arrivera à une classification précise dans le cas de la droite projective et des courbes elliptiques, et l'on essaiera de donner en conclusion une idée de résultats plus généraux.

Table des matières

1 Préliminaires

Cette partie est destinée à introduire le langage géométrique qui sera utilisé tout au long de ce mémoire. L'enjeu est essentiellement de transposer dans un cadre algébrique les définitions – et plus tard certains résultats – de la géométrie différentielle. Dans toute la suite, on travaillera sur un corps algébriquement clos k.

1.1 Généralités sur les variétés algébriques

1.1.1 Le point de vue élémentaire

Commençons par fixer quelques notations.

Définition 1.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'espace affine de dimension n sur k est $\mathbb{A}^n(k) = k^n$. Si I est un idéal de $k[X_1, \ldots, X_n]$, on note $V(I)$ l'ensemble $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n(k) | \forall P \in I, P(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$. La topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n(k)$ est la topologie dont les fermés sont les $V(I)$, I parcourant l'ensemble des idéaux de $k[x_1, \ldots, x_n]$. Si X est un sous-ensemble de $\mathbb{A}^n(k)$, on note $\mathcal{I}(X)$ l'idéal des éléments de $k[X_1, \ldots, X_n]$ qui s'annulent sur X.*

Une variété affine V est un fermé d'un espace affine. L'anneau des fonctions régulières de V est l'anneau quotient de $k[X_1, \ldots, X_n]$ par l'idéal $\mathcal{I}(V)$. Son corps des fractions est le corps de fonctions rationnelles sur V.

Cette définition, la plus simple, n'est pas entièrement satisfaisante à au moins deux égards.

Tout d'abord, une variété affine est rarement l'objet pertinent à étudier, essentiellement par défaut de compacité (en un sens à préciser, puisqu'il n'est pas difficile de montrer qu'un variété affine est effectivement quasi-compacte pour la topologie induite par la topologie de Zariski). On voit en effet sans trop de difficulté qu'une variété affine complexe qui n'est pas réduite à un nombre fini de points n'est jamais compacte pour la topologie usuelle. En conséquence, les théorèmes portant sur les variétés affines sont souvent peu aisés à énoncer du fait de la présence d'exceptions – qu'on pense au nombre de points d'intersection de deux courbes algébriques, ne serait-ce que dans le cas de deux droites qui peuvent bien être parallèles. L'introduction des variétés projectives résoud ce problème.

D'autre part, de même que la notion de variété différentielle abstraite est plus claire et plus maniable que celle de sous-variété de $\mathbb{R}^n$, la notion de variété affine, telle que l'on vient de la définir, n'est pas intrinsèque et, partant, plus difficile à manier.

Traitons d'abord le premier problème. Il nous faut «compactifier» d'une manière naturelle une variété affine. Commençons par le cas de l'espace affine lui-même.

Définition 1.2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'espace projectif de dimension n sur k, noté $\mathbb{P}^n(k)$, est l'ensemble des droites de k^{n+1}.*

On supposera connues les notions élémentaires sur les espaces projectifs : cartes locales, coordonnées homogènes... Le recouvrement de $\mathbb{P}^n(k)$ par des ouverts affines permet d'y définir de manière évidente la topologie de Zariski. On peut maintenant définir ainsi une variété projective :

Définition 1.3. *Soit X un sous-ensemble d'un espace projectif. X est une variété projective si sa trace sur tout ouvert affine est une variété affine.*

Dans le cas complexe, on vérifie qu'une variété projective est compacte pour la topologie usuelle.

Quelques définitions, enfin :

Définition 1.4. *La dimension d'une variété algébrique X est la dimension de X comme espace topologique, c'est-à-dire la longueur maximale d'une suite strictement décroissante de fermés de X.*

Toute variété algébrique est de dimension finie, et l'on appelle courbe algébrique une variété de dimension 1.

Définition 1.5. *Une variété algébrique est dite irréductible si elle n'est pas réunion de deux fermés non triviaux.*

Reste le second problème. On voudrait pouvoir transcrire la définition topologique d'une variété, mais ce n'est pas immédiat, la structure topologique d'une variété algébrique n'offrant qu'une description partielle de celle-ci. En fait, ce qui détermine la structure d'une variété algébrique, c'est la connaissance des fonctions que l'on peut y définir. Ce point est sans problème avec les définitions précédentes : une fonction régulière définie sur une variété algébrique sur le corps k est simplement une application à valeurs dans k qui, localement, est une fraction rationnelle en les coordonnées. Mais là encore, ce concept n'est pas intrinsèque. L'idée est donc d'intégrer à la définition même de variété algébrique l'ensemble des fonctions régulières qui y sont définies au moins localement. Pour y parvenir, c'est la notion de faisceau qui est adéquate.

1.1.2 La notion de faisceau

Définition 1.6. *Soit X un espace topologique. Un faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens*[1] *sur X est la donnée, pour tout ouvert U de X, d'un groupe abélien $\Gamma(U, \mathcal{F})$, le groupe des sections de $\mathcal{F}$ sur U, et pour chaque inclusion $V \subset U$, d'un morphisme de restriction ρ_{UV} de $\Gamma(U, \mathcal{F})$ dans $\Gamma(V, \mathcal{F})$, envoyant une section s de $\mathcal{F}$ sur U sur la section $s_{|V}$ de $\mathcal{F}$ sur V, tel que $\mathcal{F}$ vérifie*

1. $\Gamma(\emptyset, \mathcal{F}) = \{0\}$
2. *Pour tout ouvert U, $\rho_{UU} = Id_{\Gamma(U,\mathcal{F})}$*
3. *Pour toute inclusion $W \subset V \subset U$, $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$*
4. *Si U est un ouvert de X recouvert par la famille d'ouverts $(V_i)_{i \in I}$, et si $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ est telle que $\forall i \in I, s_{|V_i} = 0$, alors $s = 0$.*
5. *Soit U un ouvert de X recouvert par la famille d'ouverts $(V_i)_{i \in I}$. Pour tout i, soit $s_i \in \Gamma(V_i, \mathcal{F})$. Si $\forall i, j \in I, s_{i\,|V_i \cap V_j} = s_{j\,|V_i \cap V_j}$, alors il existe une section s de $\mathcal{F}$ sur U dont la restriction à V_i soit s_i pour tout i.*

Une section globale s de $\mathcal{F}$ est un élément de $\Gamma(X, \mathcal{F})$.

La topologie de X permet d'étudier la structure locale des faisceaux.

[1] On définirait de même un faisceau d'anneaux.

Définition 1.7. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur l'espace topologique X, et soit $x \in X$. Le germe de $\mathcal{F}$ en x, noté $\mathcal{F}_x$, est la limite inductive des $\mathcal{F}(U)$, où U parcourt les ouverts de X contenant x, via les applications de restriction.*

Un *espace annelé* est un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux. Un *faisceau d'anneaux locaux* est un faisceau d'anneaux dont les germes sont des anneaux locaux. Un *espace localement annelé* est un espace muni d'un tel faisceau.

On a une notion naturelle de morphismes de faisceaux, et donc d'espaces annelés ou localement annelés [2], que nous ne préciserons pas. Il n'est pas difficile de montrer l'existence d'une «bonne» – au sens catégorique – notion de noyau, d'image et de quotient pour les faisceaux. Nous ne traiterons pas les détails ici, nous contentant d'énoncer le résultat suivant, qui vaudra pour tous les types de faisceaux que nous envisagerons :

Proposition 1.8. *Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X. Un suite*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

est exacte si et seulement si, pour tout $x \in X$, la suite

$$0 \to \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x \to 0$$

est exacte. En particulier, la fibre du quotient de deux faisceaux est le quotient des fibres.

Donnons quelques exemples.

Exemple 1.9.

1. *Soit X une variété analytique complexe de dimension 2 (X est une surface de Riemann). Le* faisceau structural *de X est le faisceau $\mathcal{O}$ qui à un ouvert U de X associe l'ensemble des fonctions holomorphes sur U, et dont les applications de restriction sont les applications naturelles. C'est un faisceau de $\mathbb{C}$-algèbres. Le germe de $\mathcal{O}$ en un point x s'identifie à l'anneau local des séries entières convergentes au voisinage de 0, via une carte locale envoyant x sur 0.*
2. *Soit X une variété algébrique (affine ou projective)sur le corps k. Le* faisceau structural *de X est le faisceau $\mathcal{O}$ qui à un ouvert U de X associe l'ensemble des fonctions de U dans k qui s'écrivent localement comme des fractions rationnelles en les coordonnées, et dont les applications de restriction sont les applications naturelles. C'est un faisceau de k-algèbres, que l'on considèrera comme un faisceau d'anneaux. Le germe de $\mathcal{O}$ en un point X est un anneau local, qui s'identifie, un voisinage affine de x étant fixé, aux fractions rationnelles en les coordonnées qui n'ont pas de pôle en x. L'idéal maximal de $\mathcal{O}_x$ s'identifie aux telles fractions rationnelles s'annulant en x. On peut montrer que la dimension des anneaux locaux aux points de X est la dimension de X.*

Ce n'est pas par hasard que l'on a rapproché ces deux exemples : la proximité est grande entre géométrie analytique et géométrie algébrique, et l'on décrira plus bas en termes plus précis en quoi l'analogie entre ces deux domaines aurait pu nous permettre de remplacer, dans ce mémoire, l'étude des variétés algébriques complexes par celle des variétés analytiques.

[2] Un morphisme d'anneaux locaux de A dans B est un morphisme d'anneaux qui envoie l'idéal maximal de A dans celui de B.

L'exemple précédent munit toute variété algébrique d'un faisceau d'anneaux locaux. En particulier, on peut définir un morphisme de variété algébriques comme un morphisme d'espaces localement annelés. C'est cela qui pourrait nous permettre de définir une variété algébrique comme un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux locaux qui soit localement isomorphe à un sous-ensemble localement fermé d'un espace affine. C'est, à peu de choses près, ce que fait Serre dans [13]. Néanmoins, le concept de schéma facilite–et généralise–grandement l'étude des variétés algébriques. Sans parler de la théorie générale, on va maintenant introduire le schéma associé à une variété algébrique.

1.1.3 Schéma associé à une variété

Soit X une variété affine, et soit A la k-algèbre des fonctions régulières sur X. Le Nullstellensatz établit une correspondance bijective entre les idéaux maximaux de A et les points de X, un idéal maximal de A étant constitué des fonctions régulières sur X qui s'annulent en un point donné. Il est donc naturel d'identifier X à l'ensemble des idéaux maximaux de A. Il est plus commode d'associer à X l'ensemble des idéaux *premiers* de A, qui se comportent mieux vis-à-vis des opérations algébriques : par exemple, l'image réciproque d'un idéal premier par un morphisme d'anneaux est encore un idéal premier, tandis que ce n'est pas le cas pour les idéaux maximaux. Cela revient en fait à considérer non pas la variété X elle même, mais l'ensemble de ses sous-variétés irréductibles. Dans le cas général, si R est un anneau commutatif unifère, on note $\operatorname{Spec} R$ le spectre de R, c'est-à-dire l'ensemble de ses idéaux premiers.

On a souligné plus haut l'importance du faisceau structural dans la structure de variété algébrique. Il nous faut donc voir à quel faisceau sur $\operatorname{Spec} A$ correspond le faisceau $\mathcal{O}$ sur X. Pour ce faire, il faut d'abord introduire une topologie sur $\operatorname{Spec} A$.

Définition 1.10. *Soit R un anneau commutatif unitaire. La topologie de Zariski sur* $\operatorname{Spec} R$ *est la topologie dont les fermés sont les $V(I)$, I parcourant l'ensemble des idéaux de R, où l'on a noté $V(I)$ l'ensemble des éléments de* $\operatorname{Spec} R$ *contenant I.*

On a vu que si $x \in X$, $\mathcal{O}_x$ s'identifie aux fractions rationnelles en les coordonnées qui n'ont pas de pôle en x, c'est-à-dire au localisé en x de l'anneau A. Ceci nous amène à considérer un faisceau sur $\operatorname{Spec} A$ dont le germe en un idéal premier $\mathfrak{p}$ serait l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$, le localisé de A en $\mathfrak{p}$. Pour obtenir un faisceau, il faut «recoller» ces germes en tenant compte de la topologie de $\operatorname{Spec} A$, ce qui amène à la définition suivante :

Définition 1.11. *Soit R un anneau commutatif unitaire. Le faisceau structural sur* $\operatorname{Spec} R$ *est le faisceau d'anneaux locaux $\mathcal{O}$ dont l'anneau des sections sur un ouvert U de* $\operatorname{Spec} A$ *est l'ensemble des fonctions s de U dans $\Pi_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}}$ telles que $s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p}$, et telles que s soit localement le quotient de deux éléments de A.*

Un schéma $(S, \mathcal{O})$ est un espace localement annelé localement isomorphe au spectre d'un anneau muni de son faisceau structural. Un ouvert affine d'un schéma est un ouvert isomorphe à un tel spectre.

Dès lors, il n'est pas difficile d'associer à toute variété algébrique sur k, projective ou non, un schéma, que l'on qualifiera le cas échéant de projectif. On pourra trouver les détails dans [9].

Dans la suite, on identifiera souvent une variété et le schéma associé, étant entendu que, sauf mention explicite du contraire, le terme de schéma ne fera jamais référence qu'au schéma associé à une variété algébrique.

1.2 Faisceaux cohérents de modules

Dans cette partie, X est une variété algébrique, projective ou non, que l'on identifie à son schéma associé.

Les faisceaux de groupes et d'anneaux sur X étant définis, il est naturel de considérer des faisceaux de modules.

Définition 1.12. *Un faisceau de modules sur X est un faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens tel que pour tout ouvert U de X, le groupe $\mathcal{F}(U)$ soit muni d'une structure de $\mathcal{O}(U)$-module compatible avec les applications de restriction.*

Si $n \in \mathbb{N}$, le faisceau $\mathcal{O}^n$ est un faisceau de modules sur X. On dit que c'est un faisceau *libre*. Un faisceau de modules sur X est dit *localement libre* s'il est localement isomorphe à un faisceau libre. Un faisceau localement libre de rang 1 est dit *inversible*.

On définit sans difficulté les notions de morphisme, de dualité, de produit tensoriel, etc., pour les faisceaux de modules. Par exemple, si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X, le faisceau $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^*$ est isomorphe au faisceau structural $\mathcal{O}$. C'est cet isomorphisme qui justifie la terminologie.

Si $\mathfrak{p}$ est un point de X, et si $\mathcal{F}$ est un faisceau de modules sur X, alors $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$ est un $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$-module. En particulier, la connaissance de la structure d'anneau des $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$, c'est-à-dire la connaissance de la structure locale de la variété X, est cruciale pour comprendre la structure de ses faisceaux de modules.

Définition 1.13. *Soit R un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel K. On dit que R est régulier si la dimension du K-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est égale à la dimension de R.*

Soit X une variété algébrique. On dit que X est lisse si les anneaux locaux de X en tout point $\mathfrak{p}$ sont réguliers.

Dans le cas d'une courbe affine définie par un nombre fini d'équations, on vérifie que cette définition est bien équivalente à la définition naturelle concernant le rang de la matrice jacobienne.

Ainsi, le cas d'une courbe lisse est particulièrement agréable dans l'étude des faisceaux de modules, puisque l'on peut montrer qu'un anneau local régulier de dimension 1 est un anneau principal. Sur une courbe, tous les points, sauf celui correspondant à l'idéal nul (le point générique) sont fermés, c'est-à-dire qu'ils correspondent à des points de la variété. Les anneaux locaux sont donc bien de dimension 1, sauf au point générique où l'on obtient un corps. Le germe en un point d'un faisceau de modules sur une courbe lisse est donc somme directe de son module de torsion et d'un module libre, ce qui simplifie grandement leur étude.

La définition même d'un schéma fournit une façon commode de construire des faisceaux de modules sur une variété algébrique. Commençons par le cas d'un schéma affine.

Définition 1.14. *Soit $X = \operatorname{Spec} A$ un schéma affine, et soit M un A-module. On définit un faisceau de modules $\widetilde{M}$, le faisceau associé à M, comme le faisceau dont le germe en un point $\mathfrak{p}$ de $\operatorname{Spec} A$ est le $A_{\mathfrak{p}}$-module $M_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}} \otimes M$, et dont une section sur un ouvert U est une fonction s qui à un point $\mathfrak{p}$ associe un élément de $M_{\mathfrak{p}}$ de telle sorte que s soit localement le quotient d'un élément de M par un élément de A.*

Par exemple, le faisceau structural sur X est le faisceau associé au A-module A.

Cette construction amène à la définition suivante :

Définition 1.15. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules sur X. On dit que $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent s'il existe un recouvrement de X par des ouverts affines tel que, sur tout ouvert $U = \operatorname{Spec} A$ du recouvrement, $\mathcal{F}_{|U}$ soit un faisceau associé à un A-module M. On dit que $\mathcal{F}$ est cohérent si les modules M peuvent en outre être choisis de type fini.*

On peut montrer :

Proposition 1.16. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules sur X. $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent (resp. cohérent) sur X si et seulement si pour tout ouvert affine $U = \operatorname{Spec} A$ de X, $\mathcal{F}_{|U}$ est le faisceau associé à un A-module (resp. de type fini).*

Ce résultat montre qu'un faisceau cohérent sur X est un module essentiellement trivial sur tout ouvert affine. C'est cela qui fait l'intérêt de cette notion, puisqu'elle permet, comme expliqué dans l'appendice, de calculer les invariants cohomologiques des faisceaux cohérents à l'aide de la cohomologie de Čech.

La condition de cohérence d'un faisceau de modules est moins restrictive qu'il ne peut sembler, puisque [13] montre qu'un faisceau de modules sur une variété algébrique est cohérent si et seulement si il est localement de présentation finie. C'est d'ailleurs cette dernière propriété qui défini les faisceaux cohérents dès que les espaces topologiques considérés ne sont plus noethériens.

1.3 Fibrés algébriques

1.3.1 Définitions

On peut maintenant définir l'objet d'étude de ce mémoire. En mathématiques, un fibré $\mathcal{F}$ sur un objet X (muni d'une topologie) est un objet Y muni d'une application $p : y \mapsto X$ et de «trivialisations locales» de l'application p. Dans ce paragraphe, nous ne donnerons pas cette définition, que nous discuterons ultérieurement, préférant garder en tête une forme naïve de ce concept pour en déduire une définition plus simple.

Faisons d'abord quelques remarques dans le cas topologique. Soit G un groupe topologique d'automorphismes d'un espace topologique F muni d'une structure quelconque (par exemple vectorielle, ou orthogonale). Un fibré de groupe G va être un fibré de fibre F qui respecte l'action de G. Plutôt que de considérer l'objet Y formant le fibré, il est plus commode d'un point de vue de technique d'identifier le fibré à l'ensemble de ses trivialisations locales et aux relations entre celles-ci. Explicitons, en songeant au cas topologique : supposons Y et p donnés comme plus haut. On dispose d'un recouvrement ouvert de X et, pour chaque ouvert U de ce recouvrement, d'une trivialisation de p, c'est-à-dire d'un homéomorphisme $\psi_U : p^{-1}(U) \to U \times F$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\psi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

où π est la projection canonique. On impose en outre que les applications de transition $\psi_{UV} : (U \cap V) \times F \to F$, définies par la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} (U \cap V) \times F \arrow[rr, "Id \times \psi_{UV}"] & & (U \cap V) \times F \\ & p^{-1}(U \cap V) \arrow[ul, "\psi_U"] \arrow[ur, "\psi_V"'] & \end{tikzcd},$$

correspondent en fait à des morphismes $\varphi_{UV} : U \cap V \to G$, au sens où

$$\forall f \in F, \forall x \in U \cap V, \psi_{UV}(x, f) = (\varphi_{UV}(x))(f).$$

Les applications φ_{UV} vérifient une relation de cocycle :

$$\varphi_{UW} = \varphi_{WV} \circ \varphi_{UV}$$

et cela ne modifie rien, d'un point de vue géométrique, de les changer par un cobord, c'est-à-dire de remplacer φ_{UV} par $\varphi_{UV}.\varphi_V.(\varphi_U)^{-1}$, où φ_U va de U dans G. On vérifie enfin que les cocycles modulo les cobords sont en bijection avec les classes de fibrés de groupe G.

Tout cela motive, connaissant la cohomologie de Čech des faisceaux, la définition suivante :

Définition 1.17. *Soit X une variété algébrique sur un corps k, et G un groupe algébrique sur k. On note $\mathcal{G}$ le faisceau des germes de morphismes de X dans G. Un fibré de groupe structural G est un élément de $H^1(\mathcal{G})$.*

Exemple 1.18. *Un fibré en droites est un élément de $H^1(\mathcal{O}^*)$, où $\mathcal{O}^*$ est le faisceau de groupes multiplicatifs associé au groupe algébrique k^*. En général, un fibré vectoriel de rang r est un élément de $H^1(\mathrm{GL_r}(\mathcal{O}))$.*

Cet exemple, montre une différence essentielle entre le rang 1 et les rangs supérieurs dans l'étude des fibrés vectoriels. En effet, la commutativité du faisceau de groupes $\mathcal{O}^*$ permet de lui appliquer toutes les ressources de la cohomologie abélienne, en particulier la suite exacte longue, ce qui n'est pas possible dans le cas général. En conséquence, l'étude de la jacobienne d'une courbe, qui classifie ses fibrés en droites, est bien plus simple que celle de ses fibrés vectoriels généraux, nous en verrons des exemples plus tard.

Quand le groupe structural n'est pas abélien, la définition cohomologique n'est pas la plus commode à manipuler. Dans l'étude des fibrés vectoriels, il est souvent judicieux d'étudier plutôt leurs sections que l'élément d'un H^1 qu'ils définissent. Or il est clair que les germes de sections d'un fibré vectoriel définissent un faisceau de modules sur X, qui est localement libre. Réciproquement, on peut montrer qu'un faisceau localement libre sur X définit un fibré vectoriel, unique à isomorphisme près. C'est ainsi que nous verrons les fibrés vectoriels dans la suite de mémoire, posant la définition suivante :

Définition 1.19 (Une autre définition des fibrés vectoriels)**.** *Un fibré vectoriel sur la variété algébrique X est un faisceau localement libre sur X.*

Ce point de vue nous permettra d'appliquer des résultats cohomologiques à l'étude des fibrés vectoriels.

1.3.2 Position du problème et motivation

L'enjeu de ce mémoire est la classification des fibrés vectoriels sur les variétés algébriques. Bien entendu, le problème tel quel est bien trop large, et nous ne l'aborderons que dans le cas des courbes lisses (même le cas des fibrés sur le plan projectif est très difficile). Nous n'arriverons d'ailleurs à des résultats complets que dans le cas des courbes de genre 0 et 1.

S'il est clair que la notion mathématique de fibration est naturelle et souvent efficace, il n'est peut-être pas inutile de donner quelques indications quant aux questions qui peuvent motiver les tentatives de classification entreprises. Une direction au moins vient de la physique.

Considérons en effet une particule quantique, qui a à la fois une position dans l'espace et une structure interne, ses états internes s'identifiant aux éléments d'un espace F muni d'une action d'un groupe de Lie G. Par exemple, dans le cas d'une particule chargée de spin nul, que l'on identifie à sa fonction d'onde, le module de cette dernière nous fournit la position spatiale de la particule, et son argument, qui s'identifie à un élément du cercle S^1 sur lequel agit $G = U(1)$, correspond à un état interne de la particule. Dans la suite, pour éviter des complications inutiles, nous supposerons que la particule a une position bien déterminée. L'espace des états de la particule induit donc une fibration de $\mathbb{R}^4$ de fibre S^1.

En l'absence de champ extérieur, on sait bien que le choix d'une phase est arbitraire. Cela revient à dire que la fibration précédente est triviale : il suffit de fixer une phase de référence pour trivialiser la fibration. Mais les équations de l'électromagnétisme «déforment» cette fibration. En effet, on sait qu'une particule qui se déplace dans un champ électrique voit sa phase varier quand elle se déplace en fonction du potentiel vecteur, ce qui empêche de trivialiser la fibration : de manière informelle, la phase d'une particule dépend de son histoire. L'effet d'un champ électromagnétique est donc de déformer la géométrie du fibré que l'on considère. La théorie du champ de jauge formalise cette dernière remarque en identifiant l'action du potentiel vecteur sur la phase à une *connexion* d'un fibré sur la fibre duquel G agit, et en identifiant le champ lui-même à une forme de *courbure* de cette connexion.

Mais, sur un fibré vectoriel holomorphe, des trivialisations locales (un «choix de jauge») permettent de définir une connexion, puis une connexion unitaire–préservant une métrique hermitienne sur les fibres– sur ce fibré. Les calculs ne sont pas très difficiles. Essentiellement, on peut ainsi ramener l'étude de la théorie de jauge pour le groupe $\mathrm{GL_n}(\mathbb{C})$ à l'étude des fibrés holomorphes. On pourra trouver dans [2] une discussion de ces constructions, notamment aux chapitres 1 et 4.

Pour conclure, il suffit de citer les résultats de Serre dans [14] qui montre que sur une variété algébrique complexe, qui est munie naturellement d'une structure analytique, la classification des fibrés vectoriels holomorphes est équivalente à la classification des fibrés vectoriels algébriques. Ce résultat découle immédiatement d'un théorème établissant une correspondance bijective entre les points de vue algébrique et analytique pour les faisceaux cohérents sur une variété algébrique. Il est d'ailleurs à noter que ce résultat d'équivalence ne s'étend pas aux fibrés de groupe autre que le groupe linéaire.

Le but de la suite de ce mémoire sera donc de décrire de la manière la plus précise possible les fibrés vectoriels sur les courbes de petit genre.

2 Une étude élémentaire des fibrés vectoriels

Dans tout ce qui suit, on se donne une courbe lisse projective irréductible X sur le corps k. On identifiera toujours une variété et son schéma associé.

2.1 Généralités

L'enjeu est ici d'étudier quelques propriétés formelles des fibrés vectoriels sur une courbe algébrique.

2.1.1 Fibrés vectoriels géométriques

On commence par donner une définition équivalente, plus proche de la géométrie différentielle, de la notion de fibré vectoriel sur X (ce qui suit est valable en dimension quelconque, et sans hypothèse de lissité). Pour ce faire, il nous faut tout d'abord étudier plus précisément le schéma associé à un produit de variétés. Comme dans la définition d'un fibré n'interviennent que des trivialisations locales, on peut se restreindre au cas des variétés affines.

Proposition 2.1. *Soient $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$ deux variétés affines. Le produit de U et de V, c'est-à-dire le schéma associé au produit cartésien $U \times V$, qui est aussi le produit au sens catégorique de U et de V, est $\operatorname{Spec}(A \otimes B)$, le produit tensoriel étant pris sur k.*

Démonstration. Pour démontrer ce résultat, le plus simple est de remarquer que le produit cartésien $U \times V$ est une variété affine, et que c'est un produit de U et de V au sens de la catégorie des variétés affines. De même, $A \otimes B$ est le produit tensoriel de A et B dans la catégorie des algèbres de type fini sur k. Or les arguments esquissés dans la première partie permettent de prouver que $A \mapsto \operatorname{Spec} A$ est une équivalence entre les catégories en question, ce qui fournit un isomorphisme canonique[3] entre le schéma associé au produit cartésien de U et V et le spectre de $A \otimes B$. □

Définition 2.2. *Soit $U = \operatorname{Spec} A$ une variété affine sur k. L'espace affine sur U est la variété affine $\mathbb{A}^n(U)$ produit de U et de $\mathbb{A}^n(k)$.*

On a $\mathbb{A}^n(U) = \operatorname{Spec} A[X_1, \dots, X_n]$. Un endomorphisme linéaire de $\mathbb{A}^n(U)$ est un endomorphisme de $\mathbb{A}^n(U)$ induit par un endomorphisme de A-algèbre de $A[X_1, \dots, X_n]$ respectant le degré.

[3]Le foncteur Spec est contravariant, donc transforme les produits en sommes. Mais les sommes finies et les produits finis sont les mêmes dans une catégorie quelconque.

On peut maintenant transcrire en langage algébrique la définition différentielle :

Définition 2.3. *Un fibré vectoriel géométrique sur X est une variété Y munie d'un morphisme $p : Y \to X$, avec la donnée d'un recouvrement de X par des ouverts U_i affines et, pour chaque i d'isomorphismes $\psi_U : p^{-1}(U) \to \mathbb{A}^n(U)$ commutant à p, tels que les applications de transition $\mathbb{A}^n(U_i \cap U_j) \to \mathbb{A}^n(U_i \cap U_j)$ soient des automorphismes linéaires.*

Indiquons brièvement comment l'on peut relier la notion de fibré vectoriel géométrique et celle de faisceau localement libre. Tout d'abord, à un fibré vectoriel géométrique on peut associer son faisceau des sections, qui est bien localement libre.

Réciproquement, étant donné un faisceau localement libre $\mathcal{F}$ sur X, on peut considérer l'algèbre symétrique de $\mathcal{F}$, notée $\mathrm{S}(\mathcal{F})$, qui est un faisceau d'algèbres sur X. Or à tout faisceau $\mathcal{A}$ d'algèbres sur un schéma S on peut associé un schéma $\operatorname{Spec} \mathcal{A}$ et un morphisme $\operatorname{Spec} \mathcal{A} \to S$ qui, sur un ouvert affine U de S, se réduise au schéma $\operatorname{Spec} \Gamma(U, \mathcal{A})$ sur U. Cette construction effectuée, on vérifie que $\operatorname{Spec} \mathrm{S}(\mathcal{F})$ est un fibré géométrique dont le faisceau des sections est isomorphe au faisceau localement libre $\mathcal{F}^*$. Cette construction fournit donc bien une équivalence entre la notion de fibré géométrique et celle de faisceau localement libre. Néanmoins, cette équivalence n'est pas parfaite, et la notion de fibré géométrique rend plus claires les constructions algébriques que l'on souhaite effectuer sur les faisceaux localement libres. Pourtant, nous préférerons toujours, sauf mention explicite du contraire, identifier faisceaux localement libres et fibrés vectoriels, notamment du fait de la grande souplesse de la notion de faisceau cohérent.

2.1.2 Faisceaux cohérents sur les courbes lisses et quotients de fibrés vectoriels

Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel. Un sous-fibré vectoriel $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ est un sous-faisceau localement libre de $\mathcal{F}$. On voudrait pouvoir définir un fibré vectoriel quotient de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$. Il existe bien un quotient au sens des faisceaux cohérents, mais il n'est pas sûr que ce quotient soit localement libre et fournisse un quotient au sens des fibrés vectoriels. Commençons par montrer que la seule obstruction à la liberté d'un faisceau cohérent sur une courbe lisse est sa torsion.

Proposition 2.4. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Si $\mathcal{F}$ est sans torsion, alors il est localement libre. Un faisceau cohérent sur une courbe lisse est somme directe de son sous-faisceau de torsion et d'un faisceau localement libre.*

Démonstration. Prouvons d'abord la première assertion. Le problème est local, ce qui permet de se ramener au cas où X est une variété affine $\operatorname{Spec} A$. Dès lors, il existe un A-module M tel que $\mathcal{F} = \widetilde{M}$. $\mathcal{F}$ étant sans torsion, le germe de $\mathcal{F}$ en tout point est sans torsion. Les anneaux locaux sont principaux par lissité de X, donc le germe de $\mathcal{F}$ en tout point $\mathfrak{p}$ est un $A_{\mathfrak{p}}$-module libre.

Soit maintenant $\mathfrak{p} \in X$, et soit $(s_1, \ldots, s_r)$ une base de $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$. Pour tout i, s_i s'identifie à une section de $\mathcal{F}$ définie sur un voisinage de $\mathfrak{p}$, donc on peut trouver un ouvert affine U contenant $\mathfrak{p}$ sur lequel toutes les s_i sont définies. On voit sans difficultés que les sections s_i définissent une base de $\mathcal{F}_{|U}$, ce qui montre que $\mathcal{F}$ est libre au voisinage de tout point de X : c'est un faisceau localement libre.

Quant à la seconde assertion, elle peut se démontrer en remarquant que le théorème de structure des modules de type fini sur un anneau principal permet, en raisonnant comme on vient de le faire, d'écrire localement $\mathcal{F}$ comme somme de son faisceau de torsion et d'un faisceau libre. Il faut alors «recoller» ces faisceaux libres, ce que nous admettrons pouvoir faire, quoique la démonstration n'en soit pas très difficile. □

Considérons maintenant $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ comme plus haut. Le faisceau $\mathcal{H}$ quotient de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$ s'écrit de manière unique

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{libre} \oplus \mathcal{H}_{tor},$$

où $\mathcal{H}_{libre}$ est localement libre et $\mathcal{H}_{tor}$ est le faisceau de torsion de $\mathcal{H}$. La présence de ce dernier nous empêche dans le cas général d'obtenir directement un fibré vectoriel quotient de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$. Il nous faut donc comprendre d'où provient la torsion du faisceau quotient.

Un exemple donnera l'idée : supposons $\mathcal{G}$ isomorphe à $\mathcal{O}$. L'injection canonique de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{F}$ est alors équivalente à la donnée d'une section globale s de $\mathcal{F}$. On peut vérifier que dans ce cas, $\mathcal{G}$ est l'ensemble des sections localement multiples de s par $\mathcal{O}$. Supposons que $\mathcal{H}$ contienne un élément de torsion t, image d'une section de $\mathcal{F}$ sur un ouvert U. On dispose d'une section φ de $\mathcal{O}$ sur U telle que φt soit multiple de s sur U sans que t le soit. Mais cela empêche φ d'être inversible sur U, ce qui prouve que φ, et donc s, s'annule en un point de U. Réciproquement, on vérifie qu'un zéro de s est toujours à l'origine d'un élément de torsion dans le faisceau quotient.

Cet exemple montre que la torsion d'un faisceau quotient provient toujours d'un problème de nature géométrique. En effet, dans le cas particulier que l'on vient étudier, une section admettant des points d'annulation ne peut pas définir directement un sous-fibré de $\mathcal{F}$, puisque la fibre en un point d'annulation x devrait être le $\mathcal{O}_x$ module engendré par $s(x)$, c'est à dire le module nul. Il faut donc préciser la notion de sous-fibré vectoriel. Ici, c'est d'un argument géométrique dont on a besoin.

Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel sur X. On peut définir, par un procédé semblable à celui que l'on a esquissé plus haut, le *fibré projectif* associé à $\mathcal{F}$ comme le fibré géométrique associé à $\mathcal{F}$ dont on a remplacé les fibres, qui étaient des espaces affines, par les espaces projectifs associés (de dimension inférieure d'une unité). Une section de $\mathcal{F}$ qui ne s'annule nulle part définit de manière naturelle une section $[s]$ du fibré projectif. Mais il est possible d'obtenir plus : on peut vérifier que le fibré projectif d'un fibré défini sur une variété projective est encore une variété projective, ce qui n'est pas le cas du fibré géométrique associé, et l'on dispose du résultat suivant, que nous admettrons :

Proposition 2.5. *Soit V une variété projective, et soit W une variété quelconque. Tout morphisme de W dans V défini sur un ouvert dense de W se prolonge à W de manière unique.*

Dans le cas précédent, cela montre que $[s]$ est en fait définie pour toute section s de $\mathcal{F}$ sur un ouvert U. Voyons ce que l'on peut en tirer. Soit $\mathcal{G}$ un sous-faisceau localement libre de $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{F}_g$ un fibré géométrique de faisceau des sections $\mathcal{F}$. On peut considérer, dans le fibré projectif associé, la réunion des images des $[s]$, où s parcourt les sections locales de $\mathcal{G}$ sur X. L'image réciproque de cette réunion dans $\mathcal{F}_g$ définit, on le vérifie, un sous-fibré de $\mathcal{F}_g$ dont le faisceau des sections est, par définition, le sous-fibré *géométriquement associé* à $\mathcal{G}$, noté $[\mathcal{G}]$. On peut alors montrer à l'aide des résultats précédents :

Proposition 2.6. *Avec les notations précédentes,* $[\mathcal{G}]$ *est un faisceau localement libre de même rang que* $\mathcal{G}$*. Le faisceau* $\mathcal{F}/[\mathcal{G}]$ *est localement libre, et si* $\mathcal{F}/\mathcal{G} = \mathcal{H}_{libre} \oplus \mathcal{H}_{tor}$*, avec des notations évidents, alors* $\mathcal{F}/[\mathcal{G}]$ *est isomorphe à* $\mathcal{H}_{libre}$*.*

Dans la suite, en conséquence de cette analyse, nous ne parlerons de sous-fibré vectoriel que dans le cas d'un sous-faisceau localement libre égal à son fibré géométriquement associé, c'est-à-dire induisant un quotient sans torsion.

2.1.3 Filtration des fibrés vectoriels

On va maintenant appliquer les résultats précédents pour construire une décomposition des fibrés vectoriels.

Proposition 2.7. *Il existe une filtration de* $\mathcal{F}$ *en fibrés en droites, c'est-à-dire une suite croissante de sous-fibrés vectoriels* $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$*, où* $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ *est un fibré en droites.*

Démonstration. Prouvons d'abord l'existence d'un sous-fibré en droites de $\mathcal{F}$. Soit s une section de $\mathcal{F}$, pas nécessairement globale. Par irréductibilité de X, s est définie sur un ouvert dense, ce qui permet, comme on l'a vu, d'associer à s une section globale à valeurs dans le fibré projectif associé à $\mathcal{F}$, puis, par image réciproque, d'obtenir un sous-fibré en droites $\mathcal{F}_1 = \mathcal{L}_1$ de $\mathcal{F}$.

Pour construire $\mathcal{F}_2$, on choisit alors par le même procédé un sous-fibré en droites $\mathcal{L}_2$ du quotient $\mathcal{F}/\mathcal{F}_1$, que l'on relève en un sous-fibré de rang 2 $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{F}$. On conclut par récurrence sur le rang de $\mathcal{F}$. $\square$

On peut comprendre le résultat obtenu en termes de groupe structural des fibrés envisagés : si un fibré vectoriel de rang r est un fibré de groupe structural $\mathrm{GL}_r(k)$, une fibration comme on vient de la construire permet de ramener l'étude des fibrés vectoriels aux fibrés de groupe le groupe Δ_r des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans k.

2.1.4 Un exemple important : les faisceaux $\mathcal{O}(n)$

Dans ce paragraphe, on construit une classe particulièrement importante de faisceaux sur les variétés projectives.

Commençons par l'espace projectif lui-même :

Définition 2.8. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Le faisceau* $\mathcal{O}(1)$ *est le faisceau défini sur* $\mathbb{P}^n(k)$ *dont les sections sur un ouvert* U *s'identifient aux polynômes homogènes de degré* 1 *en les coordonnées homogènes* $X_0, \ldots, X_n$ *réguliers sur* U*. Le faisceau* $\mathcal{O}(d)$ *est le faisceau* $\mathcal{O}(1)^{\otimes d}$*.*

Il n'est pas difficile de vérifier que les faisceaux $\mathcal{O}(d)$ sont des faisceaux inversibles. Le faisceau $\mathcal{O}(d)$ est isomorphe au faisceau dont les sections sur un ouvert U sont les polynômes homogènes de degré d réguliers sur U. On a $\mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}(d') \simeq \mathcal{O}(d + d')$. De plus, ces faisceaux sont deux à deux non isomorphes. En effet, on vérifie sans difficulté que le faisceau $\mathcal{O}(d)$ admet une section globale non nulle si et seulement si $d \geq 0$. Dès lors, le faisceau $\mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}(d')$ admet une section globale si et seulement si $d' \geq -d$, ce qui montre bien que $\mathcal{O}(d)$ et $\mathcal{O}(e)$ sont isomorphes si et seulement si $d = e$.

Si X est une variété projective, l'inclusion de X dans l'espace projectif induit donc, en tirant en arrière, un faisceau $\mathcal{O}(1)$ sur X. On dit que $\mathcal{O}(1)$ est un fibré inversible *très ample* sur X.

Dans la suite de l'exposé, si $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel, on notera $\mathcal{F}(n)$ le fibré $\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}(n)$.

2.2 Fibrés en droites et diviseurs

2.2.1 Diviseurs sur une courbe lisse

On se propose dans ce paragraphe de donner une description particulièrement simple des fibrés en droites.

Définition 2.9. *Un diviseur sur X est une application θ de X dans $\mathbb{Z}$, nulle au point générique, dont le support est fini. On note $\theta = \sum_{P\in X}\theta(P)P$. Le degré du diviseur θ est l'entier relatif $\sum_{P\in X}\theta(P)$. On dit qu'un diviseur est effectif, ou supérieur à 0, s'il est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Cela induit un ordre partiel sur le groupe des diviseurs.*

Nous admettrons le résultat suivant :

Proposition 2.10. *Soit f une fonction rationnelle sur X, c'est-à-dire une section du faisceau $\mathcal{O}$ sur un ouvert U dense dans X. Soit $\mathcal{M}$ le faisceau sur X dont les germes sont les corps des fractions des germes de X. Alors f se prolonge de manière unique en une section globale de $\mathcal{M}$ de telle façon que le germe de f en un point x soit un élément inversible de l'anneau $\mathcal{O}_x$ sauf peut-être en un nombre fini de points.*

Ce résultat relie la notion de fonction rationnelle à celle de fonction qui est localement le quotient de deux fonctions régulières. Cela permet de définir la notion d'ordre d'une fonction rationnelle en un point de X, comme on le ferait pour une fonction méromorphe. Nous ne donnerons pas de définition précise [4].

Définition 2.11. *Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction rationnelle. Le diviseur de f est* $\mathrm{div}(f) = \sum_{P\in X} v_P(f)P$*, où $v_P(f)$ est l'ordre de f en P. Un diviseur est dit principal s'il est de la forme* $\mathrm{div}(f)$*. Les diviseurs principaux forment un sous-groupe du groupe de diviseurs, et l'on note* $\mathrm{Pic}(X)$ *le quotient du groupe des diviseurs par celui des diviseurs principaux ; c'est le groupe de Picard. On dit que deux diviseurs sur X sont linéairement équivalents s'ils ont même image dans* $\mathrm{Pic}(X)$.

On a vu plus haut qu'étudier les fibrés en droites sur X, c'est étudier le groupe $H^1(\mathcal{O}^*)$. Or soit $\mathcal{M}$ le faisceau défini plus haut des germes de fonctions rationnelles sur X. On a une suite exacte de faisceaux :

$$0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M} \to \mathcal{D} \to 0,$$

où $\mathcal{D}$ est le faisceau des germes de diviseurs sur X et où l'application $\mathcal{M} \to \mathcal{D}$ est l'application qui a un germe de fonction rationnelle associe son diviseur.

Cette suite exacte nous fournit une suite exacte longue de cohomologie

$$0 \to \mathbb{C}^* \to \Gamma(X,\mathcal{M}) \to \Gamma(X,\mathcal{D}) \to H^1(\mathcal{O}^*) \to H^1(\mathcal{M}).$$

[4] Il suffirait pour cela de remarquer que l'anneau local de X en un point est un anneau de valuation discrète.

Sur une courbe irréductible, tout ouvert est dense. En particulier, le faisceau des germes de fonctions rationnelles sur une variété algébrique irréductible est flasque, donc $H^1(\mathcal{M}) = 0$. La suite exacte longue permet alors de conclure à l'existence d'un isomorphisme naturel entre le groupe de Picard de X est le groupe $H^1(\mathcal{O}^*)$. On peut alors énoncer, après examen du morphisme de cobords dans la suite exacte longue de cohomologie :

Théorème 1. *On dispose d'un isomorphisme naturel entre le groupe des fibrés en droites sur X, muni du produit tensoriel, et le groupe de Picard de X. Une section non nulle du fibré associé à un diviseur θ s'identifie à une fonction rationnelle dont le diviseur est supérieur à $-\theta$.*

2.2.2 Degré des fibrés vectoriels et application aux filtrations

On peut montrer que le diviseur d'une fonction rationnelle sur une courbe projective est toujours de degré nul. Cela permet de définir le *degré* d'un fibré en droites comme le degré d'un diviseur associé. Plus généralement, à un fibré $\mathcal{F}$ de rang r quelconque, on peut associer le fibré en droites $\bigwedge^r \mathcal{F}$, son *fibré déterminant*, dont le degré est par définition le degré de f. Montrons comment l'on peut calculer ce degré.

Lemme 2.12. *Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte de modules libres de rangs respectifs r, s et t. On a un isomorphisme canonique de $\bigwedge^r M' \otimes \bigwedge^t M''$ sur $\bigwedge^s M$.*

Démonstration. C'est un résultat simple d'algèbre linéaire. □

Proposition 2.13. *Le degré des fibrés vectoriels est additif dans les suites exactes.*

Démonstration. C'est une application immédiate du lemme et du fait que le degré du produit tensoriel de deux fibrés en droites est la somme de leurs degrés. □

Du fait de l'existence d'une filtration de tout fibré en fibrés en droites, et grâce au résultat précédent, on montre sans difficulté :

Proposition 2.14. *Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites de degré 1 sur X. Si $\mathcal{F}$ est un fibré de rang r et de degré d sur X, le fibré $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}$ est de rang r et de degré $d + r$. La correspondance est bijective, et induit une correspondance bijective entre les fibrés indécomposables de rang r et de degré d sur X et ceux de rang r et de degré $d + r$.*

Une conséquence importante de cette proposition est que l'on peut se limiter, dans les problèmes de classification qui nous occupent, à l'étude des seuls faisceaux dont le degré est positif et strictement inférieur au rang.

On dispose ainsi de deux invariants numériques d'un fibré vectoriel, son rang et son degré. Sur une courbe lisse, ce sont – en un sens à préciser – les deux seuls invariants dont on puisse avoir besoin. Le calcul du degré d'un fibré vectoriel sur une courbe nécessite une étude précise de sa géométrie, que nous allons mener plus loin. Essentiellement, au vu du théorème précédent, plus le degré d'un fibré est grand, plus il admet de sections.

Proposition 2.15. *Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur X. Si $\deg \mathcal{L} < 0$, alors $\mathcal{L}$ n'admet pas de section globale non nulle.*

Démonstration. Soit θ un diviseur associé à $\mathcal{L}$. S'il existe une section non nulle de $\mathcal{L}$, alors on peut trouver une fonction rationnelle f dont le diviseur est supérieur à $-\theta$. En particulier, le degré du diviseur de f, qui est 0, est supérieur au degré de $-\theta$, qui est l'opposé du degré de $\mathcal{L}$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

On en déduit la généralisation suivante :

Proposition 2.16. *Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux fibrés en droites sur X. Si $\deg \mathcal{L} < \deg \mathcal{L}'$, alors il n'y a pas de morphisme non nul de $\mathcal{L}'$ dans $\mathcal{L}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'un morphisme de $\mathcal{L}'$ dans $\mathcal{L}$ s'identifie à une section globale de de $\mathcal{L}'^* \otimes \mathcal{L}$. $\square$

On peut alors tirer une conclusion utile de l'existence de filtrations en fibrés en droites d'un fibré donné.

Proposition 2.17. *Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel sur X. L'ensemble des degrés des sous-fibrés en droites de $\mathcal{F}$ est borné.*

Démonstration. Soit $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$, où $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ une filtration de $\mathcal{F}$ en fibrés en droites, et soit $\mathcal{L}_i$ un sous-fibré de $\mathcal{F}$ de rang 1. On va montrer que le degré de $\mathcal{L}$ est inférieur au plus grand des degrés des $\mathcal{L}_i$. Soit i l'indice maximal tel que $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_{i-1}$. L'inclusion de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{F}$ induit un morphisme non nul de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}_i$, d'où une section non nulle de $\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{L}_i$. On a donc $\deg(\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{L}_i) \geq 0$, d'où $\deg \mathcal{L} \leq \deg\, \mathcal{L}_i$, ce qui conclut. $\square$

Cela permet de définir un type particulier de filtration pour les fibrés vectoriels :

Définition 2.18. *Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel sur X. Une filtration maximale de $\mathcal{F}$ est une filtration de $\mathcal{F}$ en fibrés en droites $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$, avec $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$, telle que*

1. *$\mathcal{L}_1$ est un sous-fibré en droites de $\mathcal{F}$ de degré maximal.*
2. *La filtration de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_1$ induite par la filtration initiale est maximale.*

On obtient donc :

Théorème 2. *Tout fibré vectoriel sur une courbe lisse admet une filtration maximale.*

Un peu de géométrie est maintenant nécessaire à l'étude quantitative des filtrations maximales.

3 La dualité de Serre

3.1 Les variétés algébriques

3.1.1 Le faisceau canonique

Définition 3.1. *Soit A un anneau, B une A-algèbre. Le module des formes différentielles de degré 1 est le B-module libre de base les symboles $dx, x \in B$, quotienté par le sous-module engendré par $\{d(x+y)-dx-dy, x, y \in B\} \cup \{d(xy)-xdy-ydx, x, y \in B\} \cup \{da, a \in A\}$. On le note $\Omega_{B/A}$.*

Définition 3.2. *Soit X une variété projective. On appelle faisceau des formes différentielles de degré 1 le faisceau Ω_X défini sur U ouvert de X par $\Omega_X(U) = \Omega_{\mathcal{O}_X(U)/k}$.*

On admet le résultat suivant (voir [9], [16]) :

Proposition 3.3. *Soit X une variété projective. Alors Ω_X est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre.*

Définition 3.4. *Supposons X de dimension n. Le faisceau canonique est $K_X = \bigwedge^n \Omega_X$. C'est un faisceau inversible.*

Définition 3.5. *Le genre d'une variété est la dimension de l'espace des sections du faisceau canonique : $g = \dim \Gamma(X, K_X)$.*

3.1.2 Le théorème algébrique

Soit X une variété, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux sur X. Fixons u dans $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Alors la composition nous donne un morphisme naturel $H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G})$ (rappelons que $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X), \mathcal{F})$). Alors pas naturalité du δ-foncteur universel $(H^n)_{n \geq 0}$, on a un morphisme naturel $H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{G})$ pour tout u. Ceci nous donne donc une application $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \times H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X, \mathcal{G})$ qui par naturalité est bien linéaire par rapport à la première variable : l'application est bien bilinéaire. Ceci nous invite à nous poser la question de savoir si le morphisme obtenu par dualité est un isomorphisme ou non. La dualité de Serre répond à cette question pour une large classe de variétés.

Théorème 3. *(Dualité de Serre) Soit X une variété lisse de dimension n, $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur X. Alors on a un isomorphisme canonique :*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F}^* \otimes K_X)^*.$$

On pourra trouver un démonstration de ce résultat dans [9].

3.2 Le point de vue des surfaces de Riemann

Nous nous proposons ici d'esquisser l'approche analytique sur les surfaces de Riemann, qui est essentiellement équivalent au point de vue algébrique. Nous renvoyons pour l'ensemble de cette section à [11] pour de plus amples détails.

3.2.1 Le fibré canonique

Soit donc X une surface de Riemann fixée, que l'on suppose compacte dans toute la suite. On s'intéresse aux fibrés vectoriels holomorphes de rang fini sur X.

Soit (U_i, ϕ_i) un atlas de cartes de X. Par la formule de changement de variables, on vérifie aisément qu'il existe des fonctions holomorphes $g_{ij} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ qui ne s'annulent pas vérifiant $d\phi_i = g_{ij} d\phi_j$. Les g_{ij} vérifient bien sûr la condition de cocycle $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ en dimension 1 : ceci définit donc un fibré en droites K_X sur X.

Soit alors W un ouvert de X, $s \in H^0(W, K_X)$ une section du fibré. s s'identifie à une famille f_i de fonctions où $f_i \in \mathcal{O}(W \cap U_i)$, qui correspond à la section lue après trivialisation locale. On a alors $f_i = g_{ij} f_j$ sur $W \cap U_i \cap U_j$. On peut donc définir, sur chaque $W \cap U_i$, une 1-forme différentielle par $\omega_i = f_i d\phi_i$, et on vérifie aisément que ces 1-formes coïncident sur tout $W \cap U_i \cap U_j$. Ceci nous permet donc de considérer la 1-forme ω dont la restriction à chaque $W \cap U_i$ est ω_i. Ce procédé est linéaire et bijectif : ceci nous permet d'identifier $H^0(W, K_X)$ à $\Omega_X(W)$ l'espace des 1-formes différentielles sur W. Autrement dit, le faisceau des sections de K_X est canoniquement isomorphe au faisceau des 1-formes différentielles sur X.

3.2.2 L'isomorphisme de Dolbeault

Il s'agit maintenant en premier lieu de définir une forme bilinéaire adéquate qui nous permettra d'obtenir la dualité de Serre.

Soit (U, ϕ) une carte locale de X. On peut décomposer ϕ en partie réelle p et partie imaginaire$q$, ce qui nous donne deux applications réelles de classe C^∞. Alors comme $d\phi = dp + idq$ et $d\bar{\phi} = dp - idq$, et comme toute forme différentielle sur U peut se décomposer sur dp et dq, on remarque que l'on peut donc aussi décomposer toute forme différentielle $\omega = ad\phi + bd\bar{\phi}$, où a et b sont des fonctions C^∞ à valeurs complexes. On peut par ailleurs vérifier que si l'on change de carte (V, ψ), alors si $b \equiv 0$, le coefficient de $\bar{\psi}$ est encore nul dans la nouvelle carte. On dit alors que ω est de type $(0, 1)$. On a une propriété analogue pour a, on parle alors de type $(1, 0)$. On note dans la suite $\mathcal{A}^{0,1}$ les 1-formes de type $(1, 0)$, et $\mathcal{A}^{1,0}$ les 1-formes de type $(0, 1)$. Si $f \in C^\infty(W)$, alors on a une écriture unique $df = \partial f + \bar{\partial} f$, où $\partial f \in \mathcal{A}^{0,1}$ et $\bar{\partial} f \in \mathcal{A}^{1,0}$.

Si $E|_W$ est trivial, alors $H^0(W, E) \otimes C^\infty(W)$ est canoniquement isomorphe à $C^\infty_E(W)$ par la multiplication.

Si $\pi : E \to X$ est un fibré vecteur holomorphe sur X, on note aussi $C^\infty_E(W)$ les sections C^∞ de E sur l'ouvert W, $\mathcal{A}^{1,0}_E(W) = C^\infty_E(W) \otimes_{C^\infty(W)} \mathcal{A}^{1,0}(W)$.

Si $E|_W$ est trivial, alors $H^0(W, E) \otimes_{\mathcal{O}(W)} C^\infty(W)$ est canoniquement isomorphe à $C^\infty_E(W)$ par la multiplication, et $\mathcal{A}^{1,0}_E(W) = H^0(W, E) \otimes_{\mathcal{O}(W)} \mathcal{A}^{1,0}(W)$.

Pour $E|_W$ trivial, ceci permet de définir $\bar{\partial}_{E,W} : C^\infty_E(W) \to \mathcal{A}^{1,0}_E(W)$, induit par $1 \otimes \bar{\partial} : H^0(W, E) \otimes_{\mathcal{O}(W)} C^\infty(W) \to H^0(W, E) \otimes_{\mathcal{O}(W)} \mathcal{A}^{1,0}(W)$ (notons que par définition, une fonction holomorphe est une fonction f telle que $\bar{\partial}(f) = 0$, donc $\bar{\partial}$ est bien $\mathcal{O}(W)$-linéaire). On peut alors étendre cette définition de manière unique à tout ouvert de X, et en particulier à X tout entier, ce qui donne un morphisme $\bar{\partial}_E : C^\infty_E(X) \to \mathcal{A}^{1,0}_E(X)$, que nous noterons $\bar{\partial}$.

Proposition 3.6. *(Isomorphisme de Dolbeault)*

Soit $\pi : E \to X$ est un fibré vecteur holomorphe sur X. On définit

$$\bar{\partial} : C_E^\infty(X) \to \mathcal{A}_E^{1,0}(X),$$

qui vérifie $\ker(\bar{\partial}) = H^0(X, E)$ *et* $\operatorname{coker}(\bar{\partial})$ *est naturellement isomorphe à* $H^1(X, E)$.

3.2.3 Le théorème analytique

On définit maintenant une forme bilinéaire sur $H^0(X, E^* \otimes K_X) \times \mathcal{A}_E^{1,0}(X)$ de la manière suivante. Soit $s \in H^0(X, E^* \otimes K_X)$, $\phi \in \mathcal{A}_E^{1,0}(X)$, (U, z) une carte locale de X, et ω une 1-forme holomorphe sur U qui ne s'annule pas. Alors il existe un unique couple $\lambda \in H^0(U, E^*), \alpha \in C_E^\infty(U)$ tel que

$$s|_U = \lambda \otimes \omega, \phi|_U = \alpha \otimes \bar{\omega} \text{ sur } U.$$

On définit alors une fonction C^∞ $(\lambda, \alpha)(x) = \lambda(x)(\alpha(x))$, et une 2-forme $(s|_U, \phi|_U) = (\lambda, \alpha)\omega \wedge \bar{\omega}$. On vérifie alors que cette 2-forme est indépendante de ω, ce qui nous permet de définir une 2-forme (s, ϕ) sur X tout entier. On pose alors

$$\langle s, \phi \rangle = \int_X (s, \phi).$$

Lemme 3.7. *Si* $s \in H^0(X, E^* \otimes K_X)$, $f \in C_E^\infty(X)$, *alors* $\left\langle s, \bar{\partial}(f) \right\rangle = 0$.

Ceci nous permet de voir que $\langle ., . \rangle$ induit une forme bilinéaire sur $H^0(X, E^* \otimes K_X) \times \left[\mathcal{A}_E^{1,0}(X)/\bar{\partial}C_E^\infty(X)\right]$, et donc une forme bilinéaire sur $H^0(X, E^* \otimes K_X) \times H^1(X, E)$ en utilisant l'isomorphisme de Dolbeault. On en déduit donc une application linéaire $\Delta_E : H^0(X, E^* \otimes K_X) \to H^1(X, E)^*$.

Proposition 3.8. *(Dualité de Serre)*

Pour toute surface de Riemann X et tout fibré vectoriel holomorphe E sur X, l'application $\Delta_E : H^0(X, E^* \otimes K_X) \to H^1(X, E)^*$ *est un isomorphisme.*

3.3 Le théorème de Riemann-Roch

Le théorème de Riemann-Roch est un résultat spécifique aux courbes. Soit X une courbe projective lisse de genre g. D'après la dualité de Serre, on a automatiquement que $g = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Rappelons que nous avons établi un isomorphisme naturel entre les fibrés en droites sur X, munis du produit tensoriel, et le groupe de Picard de X, muni de l'addition. Soit donc K un diviseur dont la classe dans $\operatorname{Pic}(X)$ correspond au faisceau canonique : on parle de diviseur canonique.

Soit D un diviseur de X : on note $l(D) = \dim H^0(X, \mathscr{L}(D))$, où $\mathscr{L}(D)$ désigne le fibré en droites associé au diviseur D.

Lemme 3.9. *Soit D un diviseur sur X. Si $l(D) \neq 0$, alors $\deg D \geq 0$. De plus, si $l(D) \neq 0$ et $\deg D = 0$, alors D est linéairement équivalent au diviseur nul, autrement dit $\mathscr{L}(D) \cong \mathcal{O}_X$.*

Ce résultat est une conséquence directe du lemme suivant, que nous admettons :

Lemme 3.10. *Soit D un diviseur sur X, $\mathscr{L}(D)$ le fibré en droites associé. Si s est une section non nulle de $\mathscr{L}(D)$, on peut définir le diviseur des zéros de s, noté $(s)_0$ en prenant des trivialisations locales , qui est un diviseur effectif.*

Alors D est linéairement équivalent à $(s)_0$.

Ce lemme est à rapprocher du résultat sur les fibrés géométriques suivant : si un fibré en droites admet une section jamais nulle, alors ce fibré est trivial. La non-trivialité d'un fibré se mesure donc par sa classe de diviseurs dans $\mathrm{Pic}(X)$, et on voit ici que le degré est un invariant puissant pour classifier les fibrés vectoriels (même s'il ne suffit en général pas, comme on le verra par exemple dans le cas des courbes elliptiques).

Démonstration. Si $l(D) \neq 0$, alors $\mathscr{L}(D)$ admet une section globale, donc d'après le lemme précédent, $\deg D$ est le degré d'un diviseur effectif, donc $\deg D \geq 0$. Si on rajoute l'hypothèse $\deg D = 0$, cela signifie donc que D est linéairement équivalent à un diviseur effectif de degré nul : D est équivalent à 0. □

On déduit aussi le résultat suivant :

Lemme 3.11. *Soit X une courbe lisse, D un diviseur sur X. Alors si $l(D) = 1$, D est linéairement équivalent à un unique diviseur effectif.*

Démonstration. Soit s une base de $H^0(X, \mathscr{L}(D))$. Alors on sait que D est équivalent à $(s)_0$. Si D_0 est un diviseur effectif équivalent à D, alors $D_0 = D + (f)$, où f est une fonction rationnelle sur X qui s'identifie à une section non-nulle s' de $\mathscr{L}(D))$ puisque $(f) \geq -D$, et $(s')_0 = D_0$. Or s' est proportionnelle à s donc leurs diviseurs de zéros sont les mêmes : $D_0 = (s)_0$. □

On désigne par χ la caractéristique d'Euler : $\chi(\mathcal{F}) = \dim H^0(X, \mathcal{F}) - \dim H^1(X, \mathcal{F})$.

Théorème 4. *(Théorème de Riemann-Roch) Soit X une courbe projective lisse de genre g, D un diviseur sur X. Alors*

$$\chi(\mathscr{L}(D)) = \deg D + 1 - g.$$

La forme de ce théorème que nous utiliserons est plutôt la suivante, qui se déduit aisément :

Corollaire 3.12. *(Théorème de Riemann-Roch) Soit X une courbe projective lisse de genre g, D un diviseur sur X. Alors*

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g.$$

Démonstration. Le diviseur $K - D$ correspond au fibré $K_X \otimes \mathscr{L}(D)^*$. Par dualité de Serre, $H^0(X, K_X \otimes \mathscr{L}(D)^*)$ est dual de $H^1(X, \mathscr{L}(D))^*$, et en particulier les dimensions de $H^0(X, K_X \otimes \mathscr{L}(D)^*)$ et $H^1(X, \mathscr{L}(D))$ sont égales. □

4 Calcul des extensions

4.1 Classification cohomologique des extensions dans une catégorie abélienne

On se propose ici de donner une interprétation naturelle du groupe $\mathrm{Ext}^1(M,N)$, où M et N sont deux objets d'une catégorie abélienne qui admet suffisament d'injectifs (dans la suite, nous appliquerons ce résultat à la catégorie des faisceaux cohérents sur une variété projective). On dispose en effet d'une bijection naturelle entre les classes d'isomorphisme des extensions de M par N et les éléments de $\mathrm{Ext}^1(M,N)$.

Plus précisément, on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 5. *Soit $0 \to N \to X \to M \to 0$ une extension de M par N, où M, N et X sont trois objets d'une catégorie abélienne ayant suffisament d'injectifs. On construit une application ϕ de l'ensemble des extensions de M par N dans $\mathrm{Ext}^1(M,N)$ comme suit : soit $0 \to N \to I \to K \to 0$ une suite exacte, où I est un objet injectif. Soit u un morphisme de X dans I faisant commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I \arrow[r] & K \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

On peut compléter ce dernier diagramme de manière unique en

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I \arrow[r] & K \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Le morceau de suite exacte longue

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(M,I) \to \mathrm{Hom}(M,K) \to \mathrm{Ext}^1(M,N)$$

fournit un élément e de $\mathrm{Ext}^1(M,N)$, image de v par le morphisme de cobords. Cet élément ne dépend que de la classe d'isomorphisme de l'extension considérée, et cette construction définit une bijection naturelle entre les classes d'extension de M par N et $\mathrm{Ext}^1(M,N)$.

Démonstration. Montrons d'abord que e ne dépend pas du choix de la suite exacte $0 \to N \to I \to K \to 0$. En effet, par fonctorialité de la suite exacte longue de cohomologie, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,N) \arrow[r] \arrow[d, "id"] & \mathrm{Hom}(M,X) \arrow[r] \arrow[d, "u_*"'] & \mathrm{Hom}(M,M) \arrow[r] \arrow[d, "v_*"'] & \mathrm{Ext}^1(M,N) \arrow[d, "id"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,I) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M,K) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(M,N). \end{tikzcd}$$

Clairement, Id_M s'envoie sur v par v_*, ce qui montre que e est l'image de Id_M par la suite exacte du haut, et prouve que e ne dépend que de l'extension considérée. Un argument tout à fait similaire montre que e ne dépend que de la classe d'isomorphisme de cette extension.

Il s'agit maintenant d'exhiber une réciproque ψ à l'application que l'on a construite. Soit donc $e \in \mathrm{Ext}^1(M,N)$. Comme I est injectif, $\mathrm{Ext}^1(M,I)=0$, d'où la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(M,I) \to \mathrm{Hom}(M,K) \to \mathrm{Ext}^1(M,N) \to 0,$$

qui permet de trouver un morphisme v de M dans K qui soit envoyé sur e par la construction décrite dans le théorème. On cherche donc à compléter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[d, "id"] & & M \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I \arrow[r] & K \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Soit X le noyau de l'application $v \oplus (-\pi) : M \oplus I \to K$, où π est la surjection de I dans K. On a des applications naturelles de N et de I dans X ainsi que de X dans M, qui fournissent le diagramme commutatif que l'on cherchait, avec la suite exacte

$$0 \to N \to X \to M \to 0.$$

La classe d'isomorphisme de l'extension ainsi construite ne dépend pas du choix d'un antécédent v de e dans $\mathrm{Hom}(M,K)$. En effet, si v' s'envoie lui aussi sur e, la suite exacte de cohomologie montre que l'on peut écrire $v' = v + d$, où d se factorise par I. Notons X_v et X'_v les sous-modules quotients de $M \oplus I$ obtenus à partir de v et v' respectivement. L'automorphisme de $M \oplus I$ qui envoie $x \oplus y$ sur $(x - d(y)) \oplus y$ induit un isomorphisme de X_v sur $X_{v'}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & X_v \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & X_{v'} \arrow[r] & M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Les deux extensions construites sont donc isomorphes, ce qui montre que ψ est bien définie.

Par construction, il est clair que $\psi \circ \phi$ se réduit à l'identité. Montrons que $\phi \circ \psi$ est aussi l'identité. D'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & I \arrow[r] & K \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

on déduit un morphisme $f : X \to M \oplus I$ qui, s'annulant par composition avec $v \oplus (-\pi)$: $M \oplus I \to K$, fournit un isomorphisme entre l'extension initiale de M par N et son image par $\phi \circ \psi$, ce qui termine la démonstration. $\square$

4.2 L'extension universelle

Maintenant que l'on sait qu'il y a une correspondance naturelle entre les classes d'extensions de M par N et le groupe $\mathrm{Ext}^1(M,N)$, on peut construire des extensions non triviales, quoique canoniques. Malheureusement, le groupe $\mathrm{Ext}^1(M,N)$ ne contient pas d'élément distingué autre que 0, qui correspond à l'extension triviale. Cela signifie que ce ne sont pas M et N eux-mêmes que l'on va utiliser.

Dans la suite, on se place, afin de simplifier les notations, dans la catégorie abélienne des modules de type fini sur un anneau commutatif A. Mais tout ce que l'on va faire se transposera sans modification aucune à la catégorie des faisceaux cohérents sur une variété projective. On indiquera dans ce qui va suivre les résultats à transposer.

S'il n'est pas possible de choisir canoniquement un élément de $\mathrm{Ext}^1(M,N)$, le module $\mathrm{Ext}^1(M,N)\otimes\mathrm{Ext}^1(M,N)^*$, qui s'identifie au module des endomorphismes de $\mathrm{Ext}^1(M,N)$, contient un élément distingué non trivial, correspondant à l'identité. On voudrait donc trouver deux modules dont le Ext^1 soit précisément $\mathrm{Ext}^1(M,N)\otimes\mathrm{Ext}^1(M,N)^*$. On est donc amené à étudier le lien entre cohomologie et produit tensoriel. Dans ce contexte, c'est la notion de platitude qui est pertinente.

Définition 4.1. *On dit qu'un A-module M est plat si pour toute suite exacte*

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0,$$

la suite

$$0 \to X\otimes M \to Y\otimes M \to Z\otimes M \to 0$$

est exacte.

On sait qu'un module libre est plat. Dans le cadre des faisceaux cohérents, cela se traduit par la

Proposition 4.2. *Soit X une variété projective sur un corps k. Un faisceau $\mathcal{F}$ localement libre de type fini est plat.*

Démonstration. L'exactitude d'une suite de faisceaux se vérifie aux germes. Il suffit donc, pour montrer qu'un faisceau cohérent est plat, de montrer la platitude des germes $\mathcal{F}_x$, pour $x \in X$. Mais $\mathcal{F}$ est localement libre, donc $\mathcal{F}_x$ est un $\mathcal{O}_x$-module libre, ce qui conclut à sa platitude. □

Proposition 4.3. *Soient M, N et X trois modules de type fini sur A. Si X est libre, on a, pour tout $i \in \mathbb{N}$,*

$$\mathrm{Ext}^i(M\otimes X, N) = \mathrm{Ext}^i(M, N\otimes X^*) = \mathrm{Ext}^i(M,N)\otimes X^*.$$

Démonstration. L'égalité

$$\mathrm{Hom}(M\otimes X, N) = \mathrm{Hom}(M, N\otimes X^*) = \mathrm{Hom}(M,N)\otimes X^*$$

est facile. Pour conclure à l'égalité des Ext^i pour tout i, un argument d'universalité suffit, en remarquant que prendre le tenseur par X conserve les suites exactes par platitude. Nous ne donnerons pas plus de détails. □

On a maintenant les outils pour construire l'extension annoncée. Soient en effet M et N deux modules de type fini sur A, et supposons que $\mathrm{Ext}^1(M,N)$ soit plat. Ce qui précède nous fournit une extension canonique de $M \otimes \mathrm{Ext}^1(M,N)$ par N : en effet, le théorème précédent montre que $\mathrm{Ext}^1(M \otimes \mathrm{Ext}(M,N), N)$ est égal à $\mathrm{Ext}^1(M,N) \otimes \mathrm{Ext}^1(M,N)^*$, et les remarques que l'on a fait plus haut permettent de construire l'extension désirée. L'extension obtenue est universelle au sens suivant :

Théorème 6. *Soient M et N deux A-modules de type fini tels que $\mathrm{Ext}^1(M,N)$ soit libre. L'extension canonique*

$$0 \to N \to P \to M \otimes \mathrm{Ext}^1(M,N) \to 0$$

est universelle, au sens où pour toute extension (E)

$$0 \to N \to Q \to M \to 0$$

définissant un élément $v \in \mathrm{Ext}^1(M,N)$, il existe un unique morphisme d'extensions

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & P \arrow[r] & M \otimes \mathrm{Ext}^1(M,N) \arrow[r] & 0\,, \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[u, "Id"] & Q \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

où la flèche $M \to M \otimes \mathrm{Ext}^1(M,N)$ est la flèche $m \mapsto m \otimes e$.

Démonstration. La preuve, qui n'est pas difficile, passe par un examen des morphismes canoniques construits abstraitement dans ce paragraphe et le précédent. Nous l'admettrons. $\square$

Appliquons ce qui précède à la catégorie des faisceaux cohérents sur une variété X sur un corps k. Le groupe $\mathrm{Ext}^1(M,N)$ est alors un k-espace vectoriel, sa liberté ne pose donc pas de problème. On a un faisceau $\mathrm{Ext}^1(M,N) \otimes \mathcal{O}$ canoniquement associé sur X, qui se réduit au faisceau $\mathrm{Ext}^1(M,N)^{\sim}$ sur tout ouvert affine de X. On vérifie immédiatement que les résultats précédents s'appliquent encore à la catégorie des faisceaux pour y fournir une notion d'extension universelle. En outre, on constate sans difficulté que si les faisceaux sont localement libres, il en va de même de l'extension universelle de l'un par l'autre, ce qui nous permettra de parler d'extension universelle de fibrés vectoriels sur une variété algébrique.

4.3 Cohomologie des filtrations en fibrés en droites

Dans ce paragraphe, on va préciser les résultats esquissés plus haut sur les filtrations des fibrés vectoriels. X est ici une courbe projective lisse de genre g sur le corps k algébriquement clos. Son faisceau canonique est noté K. Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel. De l'existence d'une filtration en fibrés en droites, on peut déduire une «formule de Riemann-Roch» sur les fibrés vectoriels de rang quelconque.

Proposition 4.4. *Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel de rang r sur X. On a*

$$\chi(\mathcal{F}) = \deg \mathcal{F} + r(1-g),$$

où $\chi(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F}) - h^1(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F}) - h^0(\mathcal{F}^* \otimes K)$ *est la caractéristique d'Euler de* $\mathcal{F}$[5].

Démonstration. Il suffit de considérer une suite exacte du type

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0,$$

que l'on sait exister, et de remarquer que degré et caractéristique d'Euler sont additifs dans les suites exactes, pour conclure par récurrence sur r grâce à la formule de Riemann-Roch pour les fibrés inversibles. □

On considère maintenant un fibré vectoriel $\mathcal{F}$, et l'on suppose que $\mathcal{F}$ est indécomposable, c'est-à-dire qu'il n'est pas somme directe de deux fibrés non triviaux. Supposons d'abord $\mathcal{F}$ de rang 2. Une filtration maximale est dans ce cas une suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}_2 \to 0.$$

Si $\mathcal{F}$ est indécomposable, la suite exacte ne se scinde pas, ce qui montre, on l'a vu, que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1) \neq 0$. Par dualité de Serre, cela signifie

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \otimes K) \neq 0,$$

d'où $\deg \mathcal{L}_2 \geq \deg \mathcal{L}_1 - (2g-2)$. On peut généraliser ce résultat. Dans la proposition suivante, qui généralise un résultat de [1],on supposera g au moins égal à 1 (le cas du genre 0 sera traité de manière exhaustive un peu plus loin).

Proposition 4.5. *Soit* $\mathcal{F}$ *un fibré vectoriel indécomposable sur* X*, et soit* $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$*, avec* $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ *une filtration maximale de* $\mathcal{F}$ *en fibrés en droites. On a*

$$\deg \mathcal{L}_i \geq \deg \mathcal{L} - (i-1)(2g-2).$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur i. On suppose que pour tout $j \leq i$, $\deg \mathcal{L}_j \geq \deg \mathcal{L} - (j-1)(2g-2)$. Soit $\mathcal{F}'_i = \mathcal{F}/\mathcal{F}_i$. En raisonnant comme précédemment, on trouve par dualité de Serre un morphisme f non nul de $\mathcal{F}_i$ dans $\mathcal{F}'_i \otimes K$. Soit $j \leq i$ tel que f induise un morphisme non nul $\bar{f} : \mathcal{L}_j \to \mathcal{F}'_i \otimes K$. l'image $\mathcal{I}$ de ce morphisme est un sous-faisceau localement libre de rang 1 de $\mathcal{F}'_i \otimes K$, isomorphe à $\mathcal{L}_j$. Le faisceau $\mathcal{I} \otimes K^*$ est un sous-faisceau inversible de $\mathcal{F}'_i$. Soit $\mathcal{L} = [\mathcal{I} \otimes K^*]$ le sous-fibré géométriquement associé.

Lemme 4.6. *Soit* $\mathcal{G}$ *un fibré vectoriel sur* X*, et soit* $\mathcal{H}$ *un sous-faisceau localement libre de rang* 1*.* $\mathcal{H}$ *définit un fibré sur* X *de degré* d*. On a*

$$\deg [\mathcal{H}] \geq d.$$

Démonstration. L'inclusion de $\mathcal{H}$ dans $[\mathcal{H}]$ induit un morphisme du fibré défini par $\mathcal{H}$ dans le sous-fibré $[\mathcal{H}]$ de $\mathcal{G}$. L'inégalité portant sur les degrés en résulte. □

[5]On note $h^i(\mathcal{F}) = \dim H^i(\mathcal{F})$

Le lemme permet d'écrire

$$\begin{array}{rcl}\deg \mathcal{L}_{i+1} & \geq & \deg \mathcal{L} \\ & \geq & \deg (\mathcal{I} \otimes K^*) \\ & \geq & \deg \mathcal{L}_j - \deg \mathcal{K} \\ & \geq & \deg \mathcal{L}_1 - (j-1)(2g-2) - (2g-2) = \deg \mathcal{L}_1 - j(2g-2) \\ & \geq & \deg \mathcal{L}_1 - i(2g-2),\end{array}$$

ce qui conclut la démonstration. □

Nous admettrons le résultat suivant, de démonstration tout à fait semblable, qui fournit une inégalité opposée et dont la preuve se trouve dans [1] et [5] (dans cet article, seul le cas du genre nul est traité, mais la preuve se généralise immédiatement) :

Proposition 4.7. *Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel indécomposable sur X, et soit $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$, avec $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ une filtration maximale de $\mathcal{F}$ en fibrés en droites. Pour i compris entre 2 et r, on a*

$$\deg \mathcal{L}_i - \deg \mathcal{L}_{i-1} \leq 2g.$$

5 Un théorème de Grothendieck

On dispose maintenant des outils nécessaires à un premier résultat de classification.

Théorème 7. *(Grothendieck, [5]) Soit k un corps algébriquement clos, et soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel de rang r sur $\mathbb{P}^1(k)$. $\mathcal{F}$ est isomorphe à un unique fibré de la forme $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$, avec $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$.*

L'unicité est facile : si $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}(a_i)$, on vérifie sans difficulté que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la dimension de $H^0(\mathcal{F}(-n))$ est égale au nombre des a_i qui sont supérieurs ou égaux à n, ce qui montre que $\mathcal{F}$ détermine la suite des a_i.

5.1 Une preuve élémentaire

Démonstration. On note $X = \mathbb{P}^1(k)$, (x_0, x_1) les coordonnées homogènes, $z = \frac{x_0}{x_1}$, et $U = \operatorname{Spec} k[z]$ (resp. $V = \operatorname{Spec} k[z^{-1}]$) l'ouvert affine défini par $x_1 \neq 0$ (resp. $x_0 \neq 0$). On considère $\mathcal{F}$ comme un faisceau localement libre sur X.

Lemme 5.1. *La restriction de $\mathcal{F}$ aux ouverts affines U et V est un fibré trivial de rang r.*

Démonstration. La proposition 1.15 fournit un module M sur l'anneau $k[z]$ tel que $\mathcal{F}_{|U}$ soit le faisceau associé à M. $\mathcal{F}_{|U}$ est sans torsion, car localement libre, donc M aussi, ce qui montre que c'est un $k[z]$-module libre car $k[z]$ est principal. $\mathcal{F}$ est donc un fibré associé à un module libre sur U : il est trivial sur U. De même, $\mathcal{F}$ est trivial sur V. □

Puisque le fibré $\mathcal{F}_{|U}$ est trivial, si X est un ouvert de U, toute section de $\mathcal{F}_{|U}$ sur X est le quotient d'une section globale de $\mathcal{F}_{|U}$ par un élément de $k[z]$ ne s'annulant pas sur X. En particulier, l'ensemble des sections de $\mathcal{F}$ sur $U \cap V$ s'identifie à la fois aux éléments du localisé de M_U en z et à ceux du localisé de M_V en z^{-1}. Ce sont tous deux des modules libres sur l'anneau principal $k[z, z^{-1}]$. Le fibré $\mathcal{F}$ est entièrement déterminé par son application de transition, qui à un élément de M_U localisé en z^{-1} associe l'élément de M_V localisé en z correspondant à la même section sur $U \cap V$.

Ce qu'affirme le théorème, c'est que l'on peut choisir des bases $(e_1, \ldots, e_r)$ (resp. $(f_1, \ldots, f_r)$) du $k[z]$-module M_U des sections globales de $\mathcal{F}_{|U}$ (resp. $k[z^{-1}]$-module M_V des sections globales de $\mathcal{F}_{|V}$) de façon à ce que pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, on ait $e_i = z^{n_i} f_i$ sur $U \cap V$, où les n_i sont des entiers relatifs.

Montrons ce dernier résultat par récurrence sur r. Il n'y a rien à montrer pour $r = 0$. Si $r \geq 1$, soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de M_U. Pour i entre 1 et n, soit x_i l'entier minimal tel que la section $z^{-x_i} e_i$ de $\mathcal{F}$, définie sur l'ouvert $U \cap V$, se prolonge en une section de $\mathcal{F}$ sur V, c'est-à-dire définisse un élément de M_V. On peut supposer x_1 minimal. Soit g_1 l'élément de M_V ainsi défini. D'après le théorème de la base adaptée, il existe une base $(f_1, \ldots, f_r)$ de M_V, et un élément $P(z^{-1})$ de $k[z^{-1}]$ tel que $g_1 = P(z^{-1}) f_1$. Sur $U \cap V$, on a $e_1 = \frac{z^{x_1}}{P(z^{-1})} f_1$. e_1 est une section de $\mathcal{F}$ régulière sur $U \cap V$, et f_1 ne s'annule pas sur V, donc P n'a pas de racine non nulle dans k, ce qui signifie, k étant supposé algébriquement clos, que P est un monôme. On peut donc finalement écrire $e_1 = z^{n_1} f_1$, $n_1 \in \mathbb{Z}$. Enfin, on vérifie sans difficulté que $n_1 = x_1$.

Ces bases de M_U et M_V étant choisies, la matrice de l'application de transition entre U et V est triangulaire par blocs, de la forme

$$\begin{pmatrix} z^{n_1} & R_{12} & \ldots & R_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{M} & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

où les R_{1i} sont des fractions rationnelles en z.

L'hypothèse de récurrence permet de trouver des bases de M_U et M_V dans lesquelles la matrice associée à l'application de transition en question s'écrit

$$\begin{pmatrix} z^{n_1} & P_{12} & \ldots & \ldots & P_{1n} \\ 0 & z^{n_2} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \text{\Large 0} & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & z^{n_r} \end{pmatrix},$$

où les n_i sont des entiers relatifs. On vérifie sans difficulté, vue la définition de n_1, que n_1 est le plus petit des n_i. D'autre part, la matrice de transition étant régulière sur $U \cap V$, les R_{1i} sont des polynômes en z et z^{-1}. Écrivant

$$R_{1i}(z) = z^{n_1} P_i(z) + z^{n_i} Q_i(z^{-1}),$$

où les P_i et les Q_i sont des polynômes, ce qui est possible car $n_1 \leq n_i$, on peut définir des éléments $e'_i = e_i - P_i(z) e_1$ et $f'_i = f_i + Q_i(z^{-1}) f_1$ de M_U et M_V. Dans les bases (e'_i)

et (f_i'), la matrice de l'application de transition s'écrit

$$\begin{pmatrix} z^{n_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & z^{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \text{\huge 0} & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & z^{n_r} \end{pmatrix},$$

ce qui achève la démonstration du théorème. □

Cette démonstration permet de se rendre compte des difficultés qui se produisent lors de la classification des fibrés vectoriels sur les espaces projectifs de dimension supérieure. Tout d'abord, la combinatoire du problème est plus complexe, du fait du plus grand nombre d'ouverts affines nécessaires pour recouvrir l'espace projectif. D'autre part, l'argument du lemme ne fonctionne plus : si la restriction d'un fibré à un espace affine est toujours un faisceau associé à un module sans torsion, les anneaux en jeu ne sont plus principaux, ce qui empêche de conclure directement à la trivialité de la restriction. De fait, la géométrie des fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}^2$ est beaucoup plus complexe, et n'est pas entièrement comprise à l'heure qu'il est.

5.2 Une preuve cohomologique

Les notions de cohomologie des faisceaux introduites plus haut permettent de donner une démonstration plus géométrique – et plus rapide – du théorème de Grothendieck.

On commence par étudier les fibrés en droites sur $V = \mathbb{P}^1(k)$.

Proposition 5.2. *Si $d \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{O}(d)$ est, à isomorphisme près, l'unique fibré en droites de degré d sur V.*

Démonstration. On a vu que l'on a une correspondance biunivoque entre les fibrés en droites et les diviseurs sur V. Soit $D = \sum_{i \in I} n_i P_i$ un diviseur de degré 0 sur V. On définit une fonction rationnelle sur V par $f(X,Y) = \Pi_{i \in I}(Xy_i - Yx_i)^{n_i}$, où les $[x_i, y_i]$ sont les coordonnées homogènes des P_i. Comme la somme des n_i est nulle, f définit bien une fraction rationnelle sur V, et il est clair que le diviseur de f est D. Ainsi, tout fibré de degré 0 sur V est trivial.

Dans le cas général, si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites de degré $d \in \mathbb{Z}$, le fibré $\mathcal{L}(-d)$ est de degré 0, donc trivial, ce qui prouve que $\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{O}(d)$. □

On peut maintenant conclure la démonstration du théorème. Il suffit de montrer qu'un fibré vectoriel de rang $r > 1$ sur V ne peut pas être indécomposable. Soit $\mathcal{F}$ un fibré de rang $r > 1$ sur V. On considère une filtration maximale de $\mathcal{F}$ en fibrés en droites $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$, avec $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$. D'après ce qui précède, puisque l'on se trouve en genre 0, la suite des degrés des $\mathcal{L}_i$ est décroissante. Mais il suffit de regarder la démonstration de la proposition 4.5 pour se convaincre, si $\mathcal{F}$ est indécomposable, que l'on dispose de l'inégalité suivante, pour tout $i \geq 2$:

$$\deg \mathcal{L}_i \geq \deg \mathcal{L}_1 + 2.$$

Si $r > 1$, c'est une contradiction, qui termine la démonstration.

6 Le cas des courbes elliptiques

On dispose maintenant des outils nécessaires à la classification des fibrés vectoriels sur une courbe elliptique. Dans ce qui suit, X est une courbe elliptique, c'est-à-dire une courbe lisse projective de genre 1 sur un corps k algébriquement clos, munie d'un point P_0 distingué. Les démonstrations sont largement inspirées de [1] et du deuxième exposé de [12].

6.1 Généralités sur les courbes elliptiques et classification des fibrés en droites

6.1.1 Loi de groupe, fibrés en droites

Nous allons définir ici ce que seront pour nous les courbes elliptiques, les différents points de vue que l'on peut adopter et les propriétés essentielles qui nous seront utiles par la suite.

Définition 6.1. *Une courbe elliptique est un couple (X, P_0) où X est une courbe lisse de genre 1, et où P_0 est un point de X appelé point base ou origine.*

Le point base P_0 étant fixé, il devient particulièrement aisé, grâce au théorème de Riemann-Roch, de décrire les fibrés en droites sur X de degré 0, qui correspondent au sous-groupe noté $\mathrm{Pic}^0(X)$ de $\mathrm{Pic}(X)$:

Proposition 6.2. *Soit (X, P_0) une courbe elliptique. Alors l'application $P \mapsto \mathscr{L}(P-P_0)$ établit une bijection entre X et $\mathrm{Pic}^0(X)$.*

Démonstration. Soit D un diviseur de degré 0 sur X. D'après le théorème de Riemann-Roch, on a $l(D+P_0) - l(K-D-P_0) = 1$. Or $\deg K = 0$ en appliquant Riemann-Roch à K, donc $\deg(K-D-P_0) = -1$, et $l(K-D-P_0) = 0$. Donc $l(D+P_0) = 1$, et on sait qu'alors il existe un unique diviseur effectif linéairement équivalent à $D+P_0$. Comme le degré est 1, il s'agit obligatoirement d'un point P. □

Ceci permet de définir une loi de groupe sur X :

Corollaire 6.3. *Soient P, Q des points de X. Alors il existe un unique point R tel que le diviseur $P+Q$ soit linéairement équivalent à $R+P_0$.*

Démonstration. $P+Q-2P_0$ est de degré nul, donc est équivalent à un unique $R-P_0$. On conclut par linéarité. □

Définition 6.4. *Soit (X, P_0) une courbe elliptique, P, Q des points de la courbe : alors $P+Q$ est l'unique point R tel que $P+Q$ soit linéairement équivalent à $R+P_0$.*

Remarquons qu'ici, P_0 est l'élément neutre.

Le dernier corollaire montre en fait que via cette bijection, on peut tirer en arrière la structure de groupe de $\mathrm{Pic}^0(X)$ sur X. La définition que l'on donne de la somme est donc compatible avec le produit tensoriel des faisceaux inversibles : le fibré en droites associé à $P+Q$ est le produit de ceux associés à P et à Q.

Ceci nous permet d'énoncer le théorème suivant, résultat préliminaire essentiel à l'objet de ce travail :

Théorème 8. *Soit (X, P_0) une courbe elliptique, d un entier. Alors il existe une bijection canonique entre X et les fibré en droites de degré d.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel de degré d, associé à un diviseur D. Alors $D - dP_0$ est de degré 0, donc il existe un unique point R tel que $D - dP_0$ soit linéairement équivalent à $R - P_0$: $\mathcal{F}$ est donc caractérisé de manière unique par son diviseur $R + (d-1)P_0$. $\square$

6.1.2 Autres représentations

On trouvera les démonstrations des résultats qui suivent dans [9] et [16].

Proposition 6.5. *Soit (X, P_0) une courbe elliptique sur k. Alors il existe une immersion fermée $X \to \mathbb{P}^2(k)$ dont l'image est donnée par une équation homogène de la forme $y^2z + a_1xyz + a_3yz^2 = x^3 + a_2x^2z + a_4xz^2 + a_6z^3$.*

Remarque 6.6. *Ceci signifie que l'on peut voir une courbe elliptique comme une courbe dans le plan affine (par exemple le plan de coordonnées homogènes $z = 1$), à laquelle on rajoute un point à l'infini, ici le point $[0, 1, 0]$.*

Cette écriture est l'équation de Weierstrass de la courbe elliptique X. Ceci nous autorise donc à prendre la définition essentiellement équivalente suivante :

Définition 6.7. *On dit qu'une courbe elliptique est définie par son équation de Weierstrass si elle est l'ensemble des zéros dans $\mathbb{P}^2(k)$ d'un polynôme homogène irréductible de degré 3.*

De manière générale, il existe une notion de régularité de telle courbes. Dans ce cas précis, il existe une grandeur Δ, appelé le discriminant, qui est polynomial en les coefficients de l'équation, qui vérifie la propriété suivante : la courbe X est régulière si et seulement si $\Delta \neq 0$. Ainsi, l'identification est réellement légitime si l'on considère les équations de Weierstrass à déterminant non-nul.

Proposition 6.8. *Toute courbe elliptique définie par son équation de Weierstrass est isomorphe à une courbe elliptique.*

Ceci permet donc de faire le lien entre les deux définitions que nous avons données des courbes elliptiques : sous la restriction de lissité (régularité), ces deux définitions sont équivalentes.

Nous en énonçons ici une troisième encore équivalente qui permet de faire le lien avec la notion de genre topologique et de mettre en avant la loi de groupe de X.

Définition 6.9. *Soit τ un nombre complexe non réel. Le réseau associé à τ est $\Lambda = \{a + b\tau, a, b \in \mathbb{Z}\}$. Le tore associé à τ est la variété $\mathbb{C}/\Lambda$.*

Proposition 6.10. *Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$. Alors il existe une application bijective de $\mathbb{C}/\Lambda$ sur une courbe elliptique X qui identifie le corps des fonctions elliptiques (i.e. les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ Λ-périodiques) et le corps des fonctions de X. Sous cette identification, la loi de groupe sur X correspond à l'addition sur $\mathbb{C}/\Lambda$.*

Théorème 9. *Le faisceau canonique d'une courbe elliptique est trivial.*

Démonstration. On reprend les notations précédentes de l'équation de Weierstrass. On admet alors le lemme suivant :

Lemme 6.11. *Soit ω la forme différentielle définie par $\omega = dx/(2y + a_1x + a_3) = dy/(3x^2 + 2a2x + a_4 - a_1y)$ avec les notations précédentes. Alors ω est régulière et ne s'annule jamais.*

Comme on est en dimension 1, le faisceau canonique correspond au faisceau des 1-formes différentielles : ω est donc une section jamais nulle[6]. $\square$

6.1.3 La dualité de Serre sur les courbes elliptiques

Cette dualité prend un caractère particulièrement simple et agréable dans le cas d'une courbe elliptique :

Proposition 6.12. *(Dualité de Serre) Soit X une courbe elliptique, $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur X. Alors pour tout $iin\{0,1\}$, on a ;*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{1-i}(X, \mathcal{F}^*)^*.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du fait que le faisceau canonique est trivial sur une courbe elliptique. $\square$

Corollaire 6.13. *Soit X une courbe elliptique, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des faisceaux localement libres sur X. Alors :*

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F})^*.$$

6.2 Le cas du degré zéro

6.2.1 Un premier résultat

Commençons par examiner les conséquences de la formule de Riemann-Roch dans le cas du genre 1. Elle s'écrit, pour un fibré $\mathcal{F}$ de degré d :

$$\chi(\mathcal{F}) = \deg \mathcal{F}.$$

Donnons aussi la forme explicite des résultats que l'on a obtenu sur les filtrations des fibrés indécomposables :

Proposition 6.14. *Soit $\mathcal{F}$ un fibré vectoriel indécomposable sur X, et soit $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$, avec $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ une filtration maximale de $\mathcal{F}$ en fibrés en droites. On a, pour tout i entre 2 et r*

$$\deg \mathcal{L}_{i-1} + 2 \geq \deg \mathcal{L}_i \geq \mathcal{L}_1.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des résultats obtenus plus haut et de leur preuve. $\square$

On en déduit alors :

[6]Ce résultat est aussi une conséquence facile du théorème de Riemann-Roch.

Proposition 6.15. *Soit $\mathcal{F}$ un fibré indécomposable de rang r et de degré d sur X. Alors*

1. *Si $d < 0$, alors $h^0(\mathcal{F}) = 0$ et $h^1(\mathcal{F}) = -d$.*
2. *Si $d > 0$, alors $h^0(\mathcal{F}) = d$ et $h^1(\mathcal{F}) = 0$.*
3. *Si $d = 0$ et $h^0(\mathcal{F}) > 0$, alors $h^0(\mathcal{F}) = 1$.*

Démonstration. Soit $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$, avec $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ une filtration maximale de $\mathcal{F}$ en fibrés en droites. On a $\deg \mathcal{F} = \sum_i \deg \mathcal{L}_i$.

Si $h^0(\mathcal{F}) > 0$, alors $\mathcal{F}$ admet une section globale, donc $\deg \mathcal{L}_1 \geq 0$. La proposition précédente montre alors que $\deg \mathcal{F} \geq r \deg \mathcal{L}_1 \geq 0$, ce qui prouve le premier point. Le deuxième se déduit du premier par dualité de Serre.

Supposons les hypothèses du troisième point vérifié. On est dans le cas d'égalité de l'inégalité $\deg \mathcal{F} \geq r \deg \mathcal{L}_1 \geq 0$, ce qui n'est possible que si tous les $\mathcal{L}_i$ sont triviaux. Montrons le résultat cherché par récurrence sur r. Soit $s = h^0(\mathcal{F}) > 0$.

Lemme 6.16. *On garde les notations précédentes. Il existe un sous-fibré $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ qui est trivial de rang s. En d'autres termes, la suite exacte canonique*

$$0 \to \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to 0,$$

est une suite exacte de fibrés vectoriels.

Démonstration. Soit $\mathcal{G}$ le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ engendré par ses sections globales. C'est un faisceau trivial de rang s. D'après les remarques générales que l'on a faites plus haut, montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-fibré de $\mathcal{F}$, revient à montrer que le faisceau quotient est sans torsion. On voit sans difficulté, et l'on en a déjà fait la remarque de manière informelle, que cela est équivalent au fait que les sections globales de $\mathcal{F}$ ne s'annulent en aucun point. Mais si ϕ est une section globale de $\mathcal{F}$, son diviseur est positif, donc nul puisque $\mathcal{L}_1 \simeq \mathcal{O}$ est un sous-fibré de $\mathcal{F}$ de degré maximal, et que ce degré est 0. Cela conclut la preuve du lemme. □

Le lemme nous fournit une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}^s \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to 0.$$

L'additivité des degrés montre que l'on a $\deg \mathcal{H} = 0$. Par dualité, on obtient la suite exacte

$$0 \to \mathcal{H}^* \to \mathcal{F}^* \to \mathcal{O}^s \to 0.$$ [7]

On peut alors utiliser le résultat général suivant :

Lemme 6.17. *Soit $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{O}^s \to 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels sur X. Si $\mathcal{B}$ est indécomposable, alors le morphisme induit $H^0(\mathcal{B}) \to H^0(\mathcal{O}^s)$ est nul.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une section globale ϕ de $\mathcal{B}$ telle que la section ψ induite sur $\mathcal{O}^s$ soit non nulle. Le diviseur de ψ est nul, donc celui de ϕ, qui est supérieur, est nul lui aussi. La section ϕ engendre donc un sous-fibré inversible trivial $[\phi]$ de $\mathcal{B}$, qui s'envoie sur le sous-fibré inversible trivial $[\psi]$ de $\mathcal{O}^s$ par la projection canonique. La

[7] L'exactitude de cette suite est claire, puisqu'elle est scindée aux germes, comme les remarques que l'on a faites sur les quotients, jointes au théorème de la base adaptée, le montrent sans difficulté.

restriction de la projection canonique à $[\phi]$ est un isomoprhisme. Soit q une projection quelconque de $\mathcal{O}^s$ sur $[\psi]$ (il n'est pas difficile de montrer qu'une telle projection existe). L'extension

$$0 \to \mathcal{A}' \to \mathcal{B} \to [\psi] \to 0,$$

induite par composition par q, se scinde via l'isomorphisme entre $[\phi]$ et $[\psi]$. Le fibré $\mathcal{B}$ se décompose donc en somme directe non triviale, ce qui conclut la preuve. □

La dualité de Serre nous permet de conclure. En effet, cette dualité étant fonctorielle, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathcal{O}^s) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(\mathcal{F}) \arrow[d] \\ H^0(\mathcal{O}^s)^* \arrow[r] & H^0(\mathcal{F}^*)^*, \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les isomorphismes induit par la dualité de Serre, et où les flèches horizontales sont induites par les suites exactes ci-dessus. La flèche inférieure étant nulle grâce au lemme, il en va de même de la flèche du dessus. Dès lors, on peut écrire le morceau suivant de suite exacte longue de cohomologie associée à l'extension $0 \to \mathcal{O}^s \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to 0$:

$$0 \to H^0(\mathcal{O}^s) \to H^0(\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{H}) \to H^1(\mathcal{O}^s) \to 0.$$

Passant aux dimensions des espaces de cohomologie en jeu, et utilisant la formule de Riemann-Roch pour obtenir $h^1(\mathcal{O}^s) = h^0(\mathcal{O}^s)$, on en déduit

$$h^0(\mathcal{H}) = h^0(\mathcal{F}) = s.$$

Pour conclure, il nous suffit donc de montrer :

Lemme 6.18. *Avec les notations précédentes, le fibré $\mathcal{H}$ est indécomposable.*

Mais une décomposition de $\mathcal{H}$ correspond à une décomposition du groupe $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{H}, \mathcal{O}^s)$. La structure particulièrement simple du faisceau $\mathcal{O}^s$ permet, en utilisant des arguments déjà évoqués, de conclure à une décomposition de $\mathcal{F}$ en somme directe non triviale, ce qui est contradictoire et achève la démonstration. □

6.2.2 Extensions universelles

On va dans cette partie construire une classe particulière de fibrés indécomposables. Sur une courbe elliptique, la forme particulièrement simple du théorème de dualité de Serre rend la notion d'extension universelle très facile à exploiter. En effet, soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux fibrés sur X. Le théorème de dualité s'écrit $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F})^* \simeq H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}^*)^*$. L'extension universelle de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{G}$ est donc de la forme

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{P} \to \mathcal{F} \otimes H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}^*)^* \to 0.$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{G} = \mathcal{O}$, on obtient la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{P} \to \mathcal{F} \otimes H^0(\mathcal{F})^* \to 0.$$

Dès que $\mathcal{F}$ admet une section globale non nulle, on peut donc obtenir une extension non triviale de $\mathcal{F}$ par $\mathcal{O}$.

On utilise cette construction pour construire récursivement une suite $(\mathcal{F}_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ de fibrés sur X, où $\mathcal{F}_1 = \mathcal{O}$ et où $\mathcal{F}_{r+1}$ est l'extension universelle de $\mathcal{F}_r$ par $\mathcal{O}$.

Proposition 6.19. *Les fibrés $\mathcal{F}_r$ sont des fibrés indécomposables de rang r et de degré 0. Pour tout r, on a $H^0(\mathcal{F}_r) \neq 0$, et $H^0(\mathcal{F}_r)$ est de dimension 1 d'après ce qui précède.*

Démonstration. On raisonne bien sûr par récurrence sur r. L'assertion de la proposition est claire pour $r = 1$. Si $r > 1$, on a une extension non triviale

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{F}_r \to \mathcal{F}_{r-1} \otimes H^0(\mathcal{F}_{r-1})^* \to 0.$$

Par hypothèse de récurrence, $H^0(\mathcal{F}_{r-1})^*$ est de dimension 1, donc la partie sur le rang et le degré est claire. On a la suite exacte longue de cohomologie associée au foncteur $\mathrm{Hom}(.,\mathcal{O})$

$$0 \to H^0(\mathcal{F}_{r-1}^*) \otimes H^1(\mathcal{F}_{r-1}^*)^* \to H^0(\mathcal{F}_r^*) \to H^0(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{F}_{r-1}^*) \otimes H^1(\mathcal{F}_{r-1}^*)^* \to \dots$$

La définition de l'extension universelle montre que le morphisme

$$H^0(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{F}_{r-1}^*) \otimes H^1(\mathcal{F}_{r-1}^*)^*$$

envoie 1 sur l'élément correspondant à l'identité dans l'espace vectoriel

$$H^1(\mathcal{F}_{r-1}^*) \otimes H^1(\mathcal{F}_{r-1}^*)^*,$$

qui est isomorphe à $\mathrm{End}(H^1(\mathcal{F}_{r-1}^*))$. Cette flèche est donc injective, ce qui permet d'obtenir l'isomorphisme

$$H^0(\mathcal{F}_{r-1}^*) \otimes H^1(\mathcal{F}_{r-1}^*)^* \simeq H^0(\mathcal{F}_r^*),$$

dont on déduit bien, puisque $H^1(\mathcal{F}_{r-1}^*)^*$ est de dimension 1, l'égalité $h^0(\mathcal{F}_r^*) = 1$, puis $h^1(\mathcal{F}_r) = 1$ par dualité de Serre, et enfin $h^0(\mathcal{F}_r) = 1$ par Riemann-Roch, puisque $\mathcal{F}_r$ est de degré 0.

Reste à montrer l'indécomposabilité de $\mathcal{F}_r$. Raisonnons par l'absurde en écrivant $\mathcal{F}_r = \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$, où $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont deux fibrés non triviaux sur X. On a $H^0(\mathcal{F}_r) = H^0(\mathcal{G}) \oplus H^0(\mathcal{H})$. D'après ce qui précède, un de ces deux fibrés a une section non nulle. Cette section définit nécessairement le fibré $\mathcal{O}$ qui s'inclut dans $\mathcal{F}_r$ via l'extension universelle. Pour fixer les idées, on peut donc supposer $\mathcal{O} \subset \mathcal{G}$. La décomposition de $\mathcal{F}_r$ en somme directe induit donc une décomposition

$$\mathcal{F}_{r-1} = ((\mathcal{G}/\mathcal{O}) \otimes H^0(\mathcal{F}_{r-1})) \oplus (\mathcal{H} \otimes H^0(\mathcal{F}_{r-1})).$$

Le fibré $\mathcal{F}_{r-1}$ étant indécomposable, on en déduit $\mathcal{G} = \mathcal{O}$, ce qui est une contradiction puisque l'extension qui définit $\mathcal{F}_r$ est non triviale. □

6.2.3 Le premier théorème d'Atiyah

On peut maintenant prouver un premier résultat de classification.

Théorème 10. *(Atiyah,[1])*

1. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Il existe un fibré indécomposable $\mathcal{F}_r$ sur X, de rang r et de degré 0, tel que $H^0(\mathcal{F}_r) \neq 0$. Un tel fibré est unique à isomorphisme près.*
2. *Soit $\mathcal{F}$ un fibré indécomposable de rang r et de degré 0 sur X. On a $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ est un fibré en droites, unique à isomorphisme près, tel que $\mathcal{L}^r \simeq \det \mathcal{F}$.*

Démonstration. On a déjà prouvé le résultat d'existence du premier point. Prouvons l'unicité par récurrence sur r. Si $r = 0$, le résultat suit de la classification des fibrés en droites sur X. Supposons $r > 1$. Soit $\mathcal{F}$ un fibré vérifiant les conditions du premier point. Comme plus haut, on a une suite exacte canonique

$$0 \to H^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to 0.$$

On a déjà prouvé au cours de la précédente démonstration que dans ce cas, $\mathcal{F}'$ est indécomposable, de rang $r-1$ et de degré d, et que $h^0(\mathcal{F}') = 1$. Par hypothèse de récurrence, on a $\mathcal{F}' \simeq \mathcal{F}_{r-1}$. Maintenant, il suffit d'examiner les flèches canoniques en jeu – en remarquant que $h^0(\mathcal{F}) = 1$ – pour prouver que l'extension canonique ci-dessus est en fait isomorphe à l'extension universelle de $\mathcal{F}_{r-1}$ par $\mathcal{O}$, et conclure à $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_r$.

Prouvons maintenant le second résultat. Soit $\mathcal{F}$ un fibré de rang r et de degré 0 sur X. Soit $\mathcal{A}$ un fibré inversible de degré 1 sur X. Le fibré $\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$ est de rang r et de degré $r > 0$, donc on a $h^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}) = r$. Soit $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$, avec $\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ une filtration maximale de $\mathcal{F}$ en fibrés en droites. La suite $0 = \mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{A} \subset \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{A} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{A} = \mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$ est une filtration maximale, dont les quotients sont les $\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{A}$. Si $\deg \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{A} = 0$, le raisonnement du lemme 3 s'applique pour montrer que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$ est trivial, ce qui est impossible car $\mathcal{F}$ est indécomposable.

Le fibré $\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$ admettant des sections globales non nulles, on a donc $\deg \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{A} = 1$ – c'est une conséquence immédiate de la formule de Riemann-Roch et de la croissance des degrés des $\mathcal{L}_i$ – soit $\deg \mathcal{L}_1 = 0$. Dès lors, le fibré $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_1^*$ est de rang r et de degré 0, et il admet clairement une section globale non nulle. Ce qui précède prouve donc

$$\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_r \otimes \mathcal{L}_1.$$

L'unicité de $\mathcal{L}_1$ ne fait pas problème (il suffit de considérer la filtration maximale de $\mathcal{F}$ qu'induit l'égalité ci-dessus).

Enfin, le fibré déterminant de $\mathcal{F}_r$ est $\mathcal{O}$, grâce au lemme 2.12 et par une récurrence sur r immédiate, ce qui prouve la dernière assertion du théorème. □

6.3 Mutations de fibrés et fin de la classification

Nous pouvons maintenant achever la description des fibrés vectoriels sur X. Dans la suite, nous fixons comme plus haut un fibré inversible de degré 1 sur X. On notera $\mathcal{E}(r, d)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés indécomposables de rang r et de degré d sur X.

Explicitons d'abord les constructions de la partie précédente. Elles se décrivent de manière agréable en termes de mutations, constructions formelles sur les fibrés qui reflètent des opérations catégoriques dont l'étude est développée dans [12] ; le premier exposé en propose d'ailleurs une axiomatisation, via la notion d'hélice.

Théorème 11. *Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{E}(r,d)$. Alors le fibré $\mathcal{F} \otimes \mathcal{A}$ est dans $\mathcal{E}(r, d+r)$. Si en outre $H^0(\mathcal{F}) \neq 0$, alors*

1. *On a une suite exacte canonique*

$$0 \to \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to 0,$$

où $\mathcal{F}' \in \mathcal{E}(r+d,d)$ si $d \neq 0$, et $\mathcal{F}' \in \mathcal{E}(r+1,0)$ si $d=0$. On a $H^0(\mathcal{F}) \simeq H^0(\mathcal{F}')$, et l'on dit que l'on a effectué une mutation à droite *du couple $(\mathcal{F}, \mathcal{O})$.*

2. *Si $0 \leq d < r$, alors on a une suite exacte canonique*

$$0 \to \mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{F}') \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to 0,$$

où $\mathcal{F}' \in \mathcal{E}(r-d,d)$ si $d \neq 0$, et $\mathcal{F}' \in \mathcal{E}(r-1,0)$ si $d=0$. On a $H^0(\mathcal{F}) \simeq H^0(\mathcal{F}')$, et l'on dit que l'on a effectué une mutation à gauche *du couple $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$.*

En outre, mutations à droite et à gauche sont inverses l'une de l'autre.

Démonstration. Il suffit d'examiner les résultats précédents et leur preuve pour se convaincre de la validité de ce théorème. □

La classification des fibrés sur X est maintenant achevée : l'algorithme d'Euclide permet en effet de conclure maintenant sans difficulté aucune au deuxième théorème d'Atiyah :

Théorème 12. *(Atiyah, [1]) Soit $\mathcal{A}$ un fibré en droites de degré 1 sur X. Le fibré $\mathcal{A}$ détermine une correspondance biunivoque et canonique*

$$\alpha_{r,d} : \mathcal{E}(h,0) \to \mathcal{E}(r,d),$$

où h est le pgcd de r et de d. On peut définir $\alpha_{r,d}$ récursivement par, $\mathcal{F}$ appartenant à $\mathcal{E}(h,0)$

1. $\alpha_{r,0} = \mathrm{Id}$
2. $\alpha_{r,d+r}(\mathcal{F}) = \alpha_{r,d}(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{A}$
3. *Si $0 < d < r$, $\alpha_{r,d}(\mathcal{F})$ est la mutation à droite du couple $(\alpha_{r-d,d}(\mathcal{F}), \mathcal{O})$.*

Joint au premier théorème, ce résultat permet de paramétrer de manière canonique les fibrés indécomposables de rang r et de degré d par les fibrés en droites définis sur X, c'est-à-dire par X elle-même. L'ensemble $\mathcal{E}(r,d)$ est ainsi muni d'une structure de variété algébrique : c'est une courbe elliptique. On dit que X est un *espace de modules* pour $\mathcal{E}(r,d)$ (nous donnerons plus bas une définition plus précise de la notion d'espace de modules).

7 Espaces de modules de fibrés vectoriels

Les résultats d'Atiyah permettent de paramétrer les fibrés vectoriels sur une courbe elliptique par des variétés algébriques. Ce phénomène n'est pas particulier au genre 1. Dans cette partie, on se propose, sans donner de démonstrations ni parfois même d'hypothèses précises, d'expliquer d'une part quelles notions sont appropriées pour décrire les fibrés sur les courbes de genre quelconque, et de donner d'autre part une idée des résultats de classification que l'on peut obtenir.

En particulier, ne souhaitant pas développer la notion de platitude, nous supposerons toujours que les morphismes de schémas intervenant dans les différentes fibrations considérées sont plats, sans plus le préciser. D'autre part, nous ne rappellerons pas toujours les définitions utilisées.

Dans la suite, nous abandonnerons le point de vue sur les fibrés vectoriels consistant à les identifier aux faisceaux localement libres pour ne considérer que des fibrés vectoriels géométriques.

7.1 La notion d'espace de modules

Avant de présenter des résultats généraux, il est nécessaire d'avoir une idée plus précise de ce que peut être un résultat de classification. La notion pertinente dans ce cas est celle d'espace de modules.

On commence par une définition générale :

Définition 7.1. *Soit* $\mathbf{F}$ *un foncteur d'une catégorie* $\mathfrak{C}$ *dans la catégorie des ensembles. On dit qu'un objet* M *de* $\mathfrak{C}$ *représente le foncteur* $\mathbf{F}$ *si ce dernier est isomorphe au foncteur* $X \mapsto \mathrm{Hom}(X, M)$*. On dit alors que* $\mathbf{F}$ *est représentable.*

Dans la suite, on se place dans la catégorie des schémas sur un corps k algébriquement clos. Représenter un foncteur $\mathbf{F}$ commme ci-dessus, c'est en d'autres termes se donner un isomorphisme entre $\mathbf{F}$ et le *foncteur des points* d'un schéma M. Via le lemme de Yoneda, le schéma M est alors unique.

Définition 7.2. *On dit que le schéma* M *est un bon espace de modules pour* $\mathbf{F}$ *si* M *représente* $\mathbf{F}$*.*

Quels foncteurs devons-nous envisager ? Ce que l'on veut définir précisément, c'est un espace qui paramètre de façon canonique une certaine famille d'objets, par exemple, l'ensemble des fibrés vectoriels sur une courbe lisse X donnée. Paramétrer une famille de tels fibrés sur X, c'est se donner un schéma S sur k, et une fibration $M \to S \times X$ telle que pour tout point s de S, la fibration induite sur $\{s\} \times X$ soit un fibré vectoriel de rang r et de degré d.

Dire qu'un paramétrage $M_0 \to S_0 \times X$ de l'ensemble des fibrés vectoriels sur X est canonique permet de définir, pour tout paramétrage $M \to S \times X$, un morphisme canonique de S dans S_0 : on veut tout d'abord que tout fibré vectoriel apparaisse une et une seule fois comme une fibre du paramétrage considéré ; dès lors, si $s \in S$, la fibre M_s, image réciproque de $\{s\} \times X$, définit un unique point de S_0, d'où le morphisme que l'on avait annoncé. Réciproquement, un morphisme de S dans S_0 doit permettre de définir un paramétrage $M \to S \times X$ d'une famille de fibrés vectoriels sur X. Ces considérations nous amènent à définir un (bon) espace de modules pour les fibrés vectoriels sur X comme un bon espace de modules pour le foncteur qui à un schéma S associe l'ensemble des paramétrages d'une famille de fibrés vectoriels sur X. Bien entendu, en restreignant la classe de fibrés considérés (par exemple en fixant le rang ou le degré), on définirait de même d'autres espaces de modules.

Les remarques que l'on vient de faire permettent d'utiliser une nouvelle terminologie pour décrire les résultats obtenus plus haut dans le mémoire :

Théorème 13. *On peut décrire de la manière suivante les théorèmes de Grothendieck et d'Atiyah démontrés ci-dessus :*

1. *La variété réduite à un point* $\operatorname{Spec} k$ *est un bon espace de modules pour les fibrés indécomposables de rang r et de degré d sur $\mathbb{P}^1(k)$.*
2. *Si X est une courbe elliptique, X est un bon espace de modules pour les fibrés indécomposables de rang r et de degré d sur X.*

Ce résultat montre en particulier qu'un fibré vectoriel indécomposable sur X est caractérisé par deux invariants discrets, son rang et son degré, et par un invariant continu, le point de la courbe elliptique auquel il est associé. Ce phénomène n'est pas propre au genre 1, comme on va l'expliquer maintenant.

7.2 Le schéma de Hilbert

On commence par un résultat élémentaire, qui peut se prouver par récurrence sur la dimension de l'espace considéré :

Proposition 7.3. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur une variété projective X munie d'un plongement dans un espace projectif, et soit $\mathcal{O}(1)$ le faisceau très ample induit sur X par ce plongement. La fonction*

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} n \mapsto \chi(\mathcal{F}(n))$$

est polynômiale à coefficients rationnels pour n assez grand. Le polynôme ainsi défini est appelé le polynôme de Hilbert de $\mathcal{F}$.

La correspondance entre fibrés vectoriels et faisceaux localement libres permet dès lors de définir le polynôme de Hilbert d'un fibré vectoriel sur une courbe. On peut vérifier facilement que si X est une courbe, et si $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel de rang r et de degré d sur X, alors le polynôme de Hilbert de $\mathcal{F}$ est $n \mapsto r\, n \deg(X) + \chi(\mathcal{F}) = r\, n \deg(X) + d + r(1-g)$, où g est le genre de X, et $\deg(X)$ est le degré de $\mathcal{O}(1)$. Ainsi, la donnée du polynôme de Hilbert d'un fibré vectoriel sur une courbe projective est équivalente à la donnée de son rang et de son degré. L'intérêt du polynôme de Hilbert, qui fixe les invariants numériques d'un fibré, est que sa constance dans les fibres d'un paramétrage défini comme plus haut est équivalente à une hypothèse cruciale de régularité de ce paramétrage (la platitude). Cette hypothèse est essentielle à la preuve du théorème que nous allons maintenant énoncer, dont on pourra trouver la preuve, sous une forme un peu différente, esquissée dans [8], et plus détaillée dans [10].

Théorème 14. *(Grothendieck, [7]) Soit X une variété projective. Il existe une variété projective $\mathcal{H}_P(\mathcal{F})$ qui est un bon espace de modules pour les fibrés vectoriels sur X quotients de $\mathcal{F}$ et de polynôme de Hilbert P. La variété $\mathcal{H}_P(\mathcal{F})$ est appelée schéma de Hilbert ou schéma de Grothendieck.*

La définition du foncteur envisagé pour parler d'espace de modules est tout à fait semblable à celles proposées plus haut dans d'autre cas, et nous ne la préciserons pas. Ce théorème, de démonstration technique, même si l'idée générale de la preuve est assez simple, donne un sens à ce que l'on indiquait plus haut : sur une courbe, il suffit de fixer deux invariants numériques, le rang et le degré, pour n'avoir plus qu'à paramétrer de manière continue les fibrés vectoriels. En ce sens, le théorème de classification dans le cas du genre 1 est exemplaire (même si la famille de fibrés classifiés–les fibrés indécomposables–n'est pas la même que dans le théorème précédent). On se propose maintenant d'expliquer comment le théorème de Grothendieck permet d'étudier la classification d'une classe particulière de fibrés vectoriels vérifiant des hypothèses de stabilité.

7.3 Stabilité et semi-stabilité des fibrés vectoriels

On pourra trouver plus de détails sur cette partie dans [10] et [15], première partie.

7.3.1 Définition et résultats généraux

Soit X une courbe lisse projective irréductible. Plus que la notion de fibré indécomposable, peu maniable dès que le théorème de dualité de Serre ne prend plus la forme particulièrement simple qu'il a dans le cas du genre 1, c'est celle de fibré stable, ou semi-stable, qu'il convient de considérer.

Définition 7.4. *Si $\mathcal{F}$ est un fibré vectoriel de rang r et de degré d sur X, sa pente est le rationnel $\mu = \mu(\mathcal{F}) = \frac{d}{r}$. On dit que $\mathcal{F}$ est semi-stable (resp. stable) si la pente de tout sous-fibré strict de $\mathcal{F}$ est inférieure ou égale (resp. strictement inférieure) à celle de $\mathcal{F}$.*

Remarquons tout d'abord que si r et d sont premiers entre eux, $\mathcal{F}$ est stable si et seulement si il est semi-stable. C'est une première indication, au vu des théorèmes d'Atiyah qui font intervenir le pgcd de r et de d, que la notion de stabilité est naturelle. Les propositions suivantes montrent la maniabilité des notions de stabilité. Soit $\mathcal{F}$ comme plus haut.

Lemme 7.5. *Il existe un unique sous-fibré $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$ de pente maximale et de rang maximal parmi les sous-fibrés de pente égale à $\mu(\mathcal{F}_1)$. C'est, par définition, le sous-fibré semi-stable maximal de $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Comme les degrés des sous-fibrés de $\mathcal{F}$ sont bornés, l'existence est claire. Montrons l'unicité : si $\mathcal{F}_1'$ vérifie les mêmes propriétés, on peut construire une suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}_1' \to \pi^{-1}(\mathcal{G}) \to \mathcal{G} \to 0,$$

où $\pi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{F}_1'$ est la projection canonique et où $\mathcal{G}$ est le sous-fibré de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_1'$ engendré par $\pi(\mathcal{F}_1)$. Le rang de $\mathcal{F}_1'$ est inférieur au rang de $\pi^{-1}(\mathcal{G})$, donc on a $\mu(\pi^{-1}(\mathcal{G})) < \mu(\mathcal{F}_1')$. L'additivité des degrés et des rangs dans la suite exacte précédente permet alors de conclure, par un calcul immédiat, à $\mu(\mathcal{G}) < \mu(\mathcal{F}_1') = \mu(\mathcal{F}_1)$, ce qui contredit la semi-stabilité de $\mathcal{F}_1$. $\square$

Le résultat suivant, qui justifie les définitions précédentes, suit immédiatement de ce qui précède.

Théorème 15. *(Harder-Narasimhan) Il existe une unique filtration de* $\mathcal{F}$ *par des sous-fibrés vectoriels*

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_r = \mathcal{F}$$

telle que pour tout i*, le fibré* $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ *soit le sous-fibré semi-stable maximal de* $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{i-1}$*. On appelle cette filtration la filtration de Harder-Narasimhan de* $\mathcal{F}$*.*

La démonstration du résultat suivant est facile.

Proposition 7.6. *Soient* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *des fibrés semi-stables sur* X*. Alors si* $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{G})$*, on a* $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \{0\}$.

On peut alors en déduire :

Corollaire 7.7. *Sur une courbe elliptique, la filtration de Harder-Narasimhan de tout fibré vectoriel est scindée.*

Des raisonnements semblables permettraient de montrer qu'un fibré stable est simple, c'est-à-dire que ses seuls endomorphismes sont des homothéties. Or on déduit sans trop de difficulté des théorèmes d'Atiyah qu'un fibré indécomposable sur une courbe elliptique est simple si et seulement si son degré et son rang sont premiers entre eux. Le corollaire précédent permet alors de conclure au résultat suivant :

Proposition 7.8. *Sur une courbe elliptique, les fibrés simples sont exactement les fibrés stables.*

On a donc des indices forts de l'importance de la notion de stabilité des fibrés vectoriels sur les courbes. Les résultats suivant vont confirmer ce qui précède.

7.3.2 Espaces de modules des fibrés stables et semi-stables

On va maintenant utiliser le schéma de Hilbert pour donner une idée de la façon dont on peut trouver des espaces de modules pour les fibrés stables ou semi-stables.

Commençons par un résultat négatif, dont on trouvera la preuve dans [15] :

Proposition 7.9. *Il n'existe pas d'espaces de modules pour les fibrés semi-stables de rang* r *et de degré* d *si* r *et* d *ne sont pas premiers entre eux.*

Essentiellement, si r et d ne sont pas premiers entre eux, on peut trouver des fibrés stables de pente $\frac{r}{d}$ et de rang strictement inférieur à r. Des résultats élémentaires sur la semi-stabilité permettent alors de construire des paramétrages «non continus» de famille de fibrés semi-stables de rang r et de degré d, ce qui rend impossible l'existence d'espaces de modules en quelque sens que ce soit.

Passons maintenant à des résultats positifs. Des arguments évoqués plus haut dans le mémoire permettent toujours de supposer les fibrés étudiés de degré aussi grand qu'on le souhaite, quitte à prendre le produit tensoriel par un fibré en droite de degré adéquat. Le lemme suivant, joint à cette remarque, est la clef de la construction d'espaces de modules de fibrés stables à partir du schéma de Hilbert :

Lemme 7.10. *Soit (r,d) un couple d'entiers tel que $r \geq 2$ et $d > r(2g-1)$. Si $\mathcal{F}$ est un fibré semi-stable sur X de rang r et de degré d, alors*

1. *Le fibré $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections globales.*
2. $h^1(X,\mathcal{F}) = 0$.

Démonstration. La preuve est une application du théorème de Riemann-Roch pour les fibrés de rang quelconque et de quelques manipulations élémentaires. □

Le lemme précédent montre que, sous les mêmes hypothèses, le fibré $\mathcal{F}$ est un quotient de $\mathcal{O} \otimes H^0(\mathcal{F})$, c'est-à-dire un quotient de $\mathcal{O} \otimes k^p$, où $p = d + r(1-g)$. D'autre part, on a déjà vu que le polynôme de Hilbert P est le même pour tous les fibrés semi-stables de rang r et de degré d. Dès lors, il est naturel de penser que le schéma de Hilbert $\mathcal{H}_P(\mathcal{O} \otimes k^p)$, vue sa définition, va permettre de construire un espace de modules pour les fibrés stables ou semi-stables.

Pourtant, il reste deux opérations à faire pour arriver au résultat souhaité. Il faut d'abord, pour n'obtenir que de «bonnes» fibres, se restreindre à un ouvert R du schéma de Hilbert. Ensuite, et c'est là le point le plus technique, on remarque que deux fibrés isomorphes en tant que fibrés vectoriels peuvent correspondre à deux fibres différentes de $\mathcal{H}_P(\mathcal{O} \otimes k^p)$, n'étant pas isomorphes en tant que quotients de $\mathcal{O} \otimes k^p$. Il faut alors faire agir le groupe $\mathrm{PGL}(k^p)$ sur l'ouvert U de $\mathcal{H}_P(\mathcal{O} \otimes k^p)$ que l'on considère pour identifier les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels aux orbites de U sous cette action. Pour construire explicitement un espace de modules, il faut donc savoir construire des quotients de variétés algébriques, ce qui est possible via la «géométrie invariante» de Mumford (voir [15] et [10]). Citons quand même le résultat final :

Théorème 16. *Soit (r,d) un couple d'entiers, avec $r \geq 2$. Il existe un espace de modules grossier [8] pour les fibrés stables de rang r et de degré d, dont le schéma sous-jacent est une variété quasi-projective lisse sur k.*

Si r et d sont premiers entre eux, il existe un bon espace de modules pour les fibrés semi-stables de rang r et de degré d.

Ce dernier résultat nous montre donc que les théorèmes d'Atiyah sont le reflet de phénomènes très généraux sur la classification des fibrés sur les courbes algébriques.

[8] C'est une notion un peu plus faible que celle de bon espace de modules, mais qui est analogue. On pourra consulter [8] pour une définition.

A Appendice : cohomologie des faisceaux sur une variété algébrique

Cet appendice a pour intérêt de présenter les notions catégoriques que nous utilisons continuellement dans ce mémoire. Nous y définissons le vocabulaire de base des catégories, puis l'outil puissant qu'est la cohomologie des faisceaux en vue de l'appliquer aux faisceaux de modules.

A.1 Le vocabulaire des catégories

A.1.1 Catégories, foncteurs

Une *catégorie* $\mathfrak{A}$ est une collection d'*objets* $\mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$, avec pour tous $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$, un ensemble $\mathrm{Hom}(A, B)$, appelé ensemble des *homomorphismes* (ou simplement *morphismes*) de A dans B, et une *loi de composition*, i.e. pour tous $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$, une application :

$$\mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$$

vérifiant les trois axiomes suivants :

1. Si $A \neq A'$ ou $B \neq B'$, alors $\mathrm{Hom}(A, B)$ et $\mathrm{Hom}(A', B')$ sont disjoints.
2. Pour tout $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$, il existe un homomorphisme $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ appelé *identité* qui est neutre pour la composition.
3. La loi de composition est associative : si $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$, $f \in \mathrm{Hom}(A, B), g \in \mathrm{Hom}(B, C), h \in \mathrm{Hom}(C, D)$, alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Remarque A.1. *Lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, on écrira souvent* $A \in \mathfrak{A}$ *au lieu de* $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$.

Remarque A.2. *On notera souvent* $f : A \to B$ *au lieu de* $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$.

Si $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$, $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ est un *isomorphisme* si il existe $h \in \mathrm{Hom}(B, A)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Si $A = B$, on parle d'*automorphisme.*

Si $\mathfrak{A}$ est une catégorie, on lui associe sa *catégorie duale* $\mathfrak{A}^*$ qui a les mêmes objets, et pour tous $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$, $\mathrm{Hom}^*(A, B) = \mathrm{Hom}(B, A)$.

Un *foncteur covariant* $\mathrm{F} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est la donnée, pour tout $A \in \mathfrak{A}$, d'un objet $\mathrm{F}(A) \in \mathfrak{B}$, et pour tout $u : A \to B$ d'un homomorphisme $\mathrm{F}(u) : \mathcal{F}(A) \to \mathrm{F}(B)$, tels que :

$$\mathrm{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathrm{F}(A)}\ ,\ \mathrm{F}(u \circ v) = \mathrm{F}(u) \circ \mathrm{F}(v).$$

Pour deux foncteurs covariants $\mathrm{F}, \mathrm{G} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, une *transformation naturelle* de F dans G est la donnée, pour tout $A \in \mathfrak{A}$, d'un homomorphisme $\mathrm{T}(A) : \mathrm{F}(A) \to \mathrm{G}(A)$ tels que, pour tous $A, B \in \mathfrak{A}$, pour tout $u \in \mathrm{Hom}(A, B)$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}(A) \arrow[r, "\mathrm{F}(u)"] \arrow[d, "\mathrm{T}(A)"'] & \mathrm{F}(B) \arrow[d, "\mathrm{T}(B)"] \\
\mathrm{G}(A) \arrow[r, "\mathrm{G}(u)"] & \mathrm{G}(B).
\end{tikzcd}$$

De même, un *foncteur contravariant* est un foncteur covariant $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}^*$, ce que l'on peut aussi voir en prenant la condition : $F(u \circ v) = F(v) \circ F(u)$.

A.1.2 Catégories abéliennes

Une catégorie $\mathfrak{A}$ est dite *additive* si pour tout $A, B \in \mathfrak{A}$, $\mathrm{Hom}(A, B)$ est muni d'une structure de groupe abélien telle que la composition soit bilinéaire.

On peut alors définir la notion de suite exacte comme suit.

Soit $u : A \to B$ fixé.

Un *noyau* de u est un couple (N, j), avec $N \in \mathfrak{A}$ et $j : N \to A$ tel que pour tout $X \in \mathfrak{A}$, la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, N) \xrightarrow{j} \mathrm{Hom}(X, A) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}(X, B)$$

soit exacte comme suite de groupes.

Un *conoyau* de u est un couple (j^*, N^*) avec $n^* \in \mathfrak{A}$ et $j^* : B \to N^*$ tel que pour tout $Y \in \mathfrak{A}$, la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}(N^*, Y) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Hom}(B, Y) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}(A, Y)$$

soit exacte.

AB 1 Si pour $u : A \to B$, il existe une suite

$$0 \to N \xrightarrow{j} A \xrightarrow{p} I \xrightarrow{p^*} B \xrightarrow{j^*} N^*$$

avec (N, j) noyau de u, (j^*, N^*) conoyau de u, (I, p^*) noyau de j^*, (I, p) conoyau de j, et $u = p^* \circ p$, on dit alors que (I, p^*) est une *image* de u et (I, p) est une *coimage* de u.

Proposition A.3. *Pour $u : A \to B$, le noyau (respectivement, conoyau, image, coimage),s'il existe, est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Montrons-le par exemple pour le noyau. Par définition, si $X \in \mathfrak{A}$, $f : X \to A$, alors $u \circ f = 0$ si et seulement si il existe $f' : X \to N$ tel que $f = j \circ f'$, et une telle factorisation est alors unique. Il vient que si (N', j') est un autre noyau, comme $u \circ j = 0$, il existe $i : N \to N'$ tel que $j' \circ i = j$. De même, on trouve $i' : N' \to N$ tel que $j \circ i' = j'$. Alors $j \circ i' \circ i = j$, ou encore $j \circ (i' \circ i - \mathrm{id}_N) = 0$, et donc $i' \circ i = \mathrm{id}_N$. De même, on vérifie que $i \circ i' = \mathrm{id}'_N$: (N, j) est isomorphe a (N', j') via i, de réciproque i'. □

u est dit *injectif* si son noyau est nul, *surjectif* si son conoyau est nul.

On suppose dans la suite que l'existence d'une suite **AB 1** comme décrite ci-dessus est toujours vérifiée.

Considérons maintenant une suite

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

telle que $g \circ f = 0$. Soit I une image de f, N un noyau de g.

L'hypothèse $g \circ f = 0$ montre que f se factorise en $A \xrightarrow{f_1} N \xrightarrow{j} B$ (j tel que (N, j) noyau de g), et j étant injectif, f_1 annule le noyau de f. Il vient alors que f_1 se décompose en $A \xrightarrow{p} I \xrightarrow{f_2} N$ (p tel que (I, p) coimage de f, i.e. conoyau du noyau de f), ce qui nous donne finalement la factorisation

$$A \to \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{f_2} \mathrm{Ker}(g) \to B$$

pour f.

On dit alors que la suite est *exacte* si $g \circ f = 0$ et si f_2 est un isomorphisme. Une suite de longueur quelconque est dite exacte si elle est exacte en chaque point.

$f : A \to B$ est un *monomorphisme* si la suite $0 \to A \xrightarrow{f} B$ est exacte, un *épimorphisme* si la suite $A \xrightarrow{f} B \to 0$ est exacte.

On rajoute enfin un dernier axiome :

AB 2 Pour tous $A, B \in \mathfrak{A}$, il existe $C \in \mathfrak{A}$, $p : C \to A$ et $q : C \to B$ tels que, pour tout $X \in \mathfrak{A}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(X, C) & \to & \mathrm{Hom}(X, A) \times \mathrm{Hom}(X, B) \\ u & \mapsto & (p \circ u, q \circ u) \end{array}$$

soit bijective.

Cet axiome permet de définir les *sommes directes finies*.

Une catégorie qui vérifie les axiome **AB 1** et **AB 2** est dite *abélienne*, ce que nous pouvons résumer comme suit :

- Pour tout $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$, $\mathrm{Hom}(A, B)$ a une structure de groupe abélien, et la composition est linéaire.
- Les sommes directes finies existent.
- Tout morphisme a un noyau et un conoyau.
- Tout monomorphisme est le noyau de son conoyau, tout épimorphisme est le conoyau de son noyau.
- Tout morphisme est le produit d'un épimorphisme suivi d'un monomorphisme.

Exemple A.4. *Les catégories suivantes sont abéliennes :*

- $\mathfrak{Ab}$, *la catégorie des groupes abéliens ;*
- $\mathfrak{Mod}(A)$, *les modules sur un anneau A ;*
- $\mathfrak{Mod}(X)$, *les faisceaux des $\mathcal{O}_X$-modules sur un espace annelé $(X, \mathcal{O}_X)$;*
- $\mathfrak{Qco}(X)$, *les faisceaux quasi-cohérents de $\mathcal{O}_X$-modules sur une variété algébrique X.*

Il est important de noter que la catégorie des fibrés vectoriels sur une variété algébrique n'est *pas* abélienne (voir 2.1.2).

Remarque A.5. *La notion de catégorie est utile en particulier pour définir la notion d'objet quotient. Typiquement, dans une catégorie où les objets sont des ensembles, on dira que* A *est un sous-objet de* B *dans la catégorie* $\mathfrak{A}$ *si* $A \subset B$ *et si l'on peut voir l'inclusion comme un élément de* $\mathrm{Hom}(A, B)$*. On définit alors le quotient de* A *par* B *comme le co-noyau de l'inclusion.*

A.2 Foncteurs dérivés

Définition A.6. *Soit* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{B}$ *des catégories abéliennes,* $\mathrm{F} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *un foncteur covariant. On dit que* F *est additif si l'application induite* $\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{F}(A), \mathrm{F}(B))$ *est un morphisme de groupes.* F *est dit exact à gauche s'il est additif et si pour toute suite courte dans* $\mathfrak{A}$

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

la suite induite

$$0 \to \mathrm{F}(A) \to \mathrm{F}(B) \to \mathrm{F}(C)$$

est exacte dans $\mathfrak{B}$.

On définit de même l'exactitude à droite, et les notions analogues pour un foncteur contravariant.

Exemple A.7. *Si* $A \in \mathfrak{A}$ *est fixé, le foncteur* $\mathrm{Hom}(A, .)$ *est covariant exact à gauche, tandis que le foncteur* $\mathrm{Hom}(., A)$ *est contravariant exact à gauche.*

Définition A.8. *Un objet* $I \in \mathfrak{A}$ *est dit injectif si le foncteur* $\mathrm{Hom}(., I)$ *est exact. Un objet* $P \in \mathfrak{A}$ *est dit projectif si le foncteur* $\mathrm{Hom}(P, .)$ *est exact.*

Si $A \in \mathfrak{A}$*, on dit que la suite d'injectifs* $I^0, I^1, \ldots$ *munie de morphismes* $d^i : I^i \to I^{i+1}$ *et le morphisme* $\epsilon : A \to I^0$ *forment une résolution injective de* A *si la suite*

$$0 \to A \xrightarrow{\epsilon} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \ldots$$

est exacte. On dit que la catégorie $\mathfrak{A}$ *a assez d'injectifs si tout objet de* $\mathfrak{A}$ *admet une résolution injective.*

Définition A.9. *Soit* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{B}$ *des catégories abéliennes. Un* δ*-foncteur est une suite de foncteurs* $(T^i)_{i \geq 0}$ *munie, pour toute suite exacte* $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ *et tout* $i \geq 0$*, d'un morphisme* $\delta^i : T^i(A'') \to T^{i+1}(A')$ *telle que :*

1. *Pour toute telle suite exacte, la suite :*

$$0 \to T^0(A') \to T^0(A) \to T^0(A'') \xrightarrow{\delta^1} T^1(A') \to \ldots$$

$$\ldots \to T^i(A) \to T^i(A'') \xrightarrow{\delta^i} T^{i+1}(A') \to T^{i+1}(A) \to \ldots$$

   soit exacte.

2. *Pour tout morphisme de suites exactes vers une autre* $0 \to B' \to B \to B'' \to 0$*, le le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} T^i(A'') \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & T^{i+1}(A') \arrow[d] \\ T^i(B'') \arrow[r, "\delta^i"] & T^{i+1}(B') \end{tikzcd} .$$

Définition A.10. *Un δ-foncteur tel que ci-dessus est universel si, pour tout autre δ-foncteur T' et toute tranformation de foncteurs $f^0 : T^0 \to T'^0$, il existe une unique suite de transformations $f^i : T^i \to T'^i$, $i \geq 0$ qui commute avec les δ^i pour toute suite exacte.*

Ainsi, pour tout foncteur $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, il existe au plus un δ-foncteur universel qui commence par F.

Définition A.11. *Un foncteur additif $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ est dit effaçable si pour tout A dans $\mathfrak{A}$, il existe un objet M et un monomorphisme $u : A \to M$ avec $F(u) = 0$, et est dit coeffaçable si pour tout A dans $\mathfrak{A}$, il existe u objet P et un épimorphisme $u : P \to A$ tel que $F(u) = 0$.*

On trouvera dans [6] la preuve du résultat suivant :

Théorème 17. *Soit $T = (T^i)_{i \geq 0}$ un δ-foncteur covariant (r. contravariant) de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$. Si T^i est effaçable (r. coeffaçable) pour tout $i > 0$, alors T est universel.*

Théorème 18. *Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie ayant assez d'injectifs. Alors pour tout foncteur $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ exact à gauche, il existe un unique δ-foncteur universel $(T^i)_{i \geq 0}$ vérifiant $F \cong T^0$.*

Si I est un injectif, alors $T^i(I) = 0$ dès que $i > 0$.

Démonstration. Pour A objet de $\mathfrak{A}$, on choisit une résolution injective de A :

$$0 \xrightarrow{\epsilon} A \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \xrightarrow{d^2} \dots$$

Cette suite est exacte, mais ne l'est a priori plus après application du foncteur F : on obtient une suite

$$0 \to F(A) \xrightarrow{F(\epsilon)} F(I^0) \xrightarrow{F(d^0)} F(I^1) \xrightarrow{F(d^1)} \dots$$

Alors en posant $R^iF(A) = \ker(d^{i+1})/\mathrm{im}(d^i)$, on peut vérifier que cela ne dépend pas de la résolution choisie (notion d'homotopie) et que cette définition convient. $\square$

Définition A.12. *Les $(T^i), i \geq 0$ sont notés $(R^iF), i \geq 0$ et sont appelés les foncteurs dérivés de F.*

Remarque A.13. *On définit de même les éléments projectifs, les résolutions projectifs, le δ-foncteurs contravariants, les foncteurs dérivés à droite,etc.*

Comme on le voit dans la démonstration, les foncteurs dérivés permettent donc de mesurer le défaut d'exactitude d'un foncteur.

Dans le langage des complexes, cela revient à prendre un complexe $I^\cdot$ et ϵ tel que $0 \xrightarrow{\epsilon} A \to I^\cdot$ est une résolution injective, et à considérer les éléments de cohomologie du complexe $F(I^\cdot)$. Mentionnons donc une dernière proposition qui nous sera utile par la suite :

Proposition A.14. *Soit $0 \to A^\cdot \to B^\cdot \to C^\cdot \to 0$ une suite exacte de complexes. Alors il existe des morphismes naturels $\delta^i : h^i(C^\cdot) \to h^{i+1}(A^\cdot)$ tels que la suite longue*

$$0 \to h^0(A^\cdot) \to h^0(B^\cdot) \to h^0(C^\cdot) \to \dots$$

$$\dots \to h^i(A^\cdot) \to h^i(B^\cdot) \to h^i(C^\cdot) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\cdot) \to \dots$$

soit exacte.

A.3 Les foncteurs Hom et Ext dans la catégorie des faisceaux de modules

Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie abélienne ayant assez d'injectifs. Si on fixe $A, B \in \operatorname{Ob} \mathfrak{A}$, le foncteur $\operatorname{Hom}(A, .)$ est covariant exact à gauche, tandis que le foncteur $\operatorname{Hom}(., B)$ est contravariant exact à gauche. On peut donc considérer les foncteurs dérivés $\operatorname{Ext}^i(A, .)$. On ne peut en revanche pas considérer les foncteurs dérivés de $\operatorname{Hom}(., B)$ (pas assez de projectifs a priori), mais on obtient quand même un résutat satisfaisant :

Proposition A.15. *Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte de $\mathfrak{A}$. Alors pour tout Y, on a une suite exacte longue :*

$$0 \to \operatorname{Hom}(C, Y) \to \operatorname{Hom}(B, Y) \to \operatorname{Hom}(A, Y) \to \operatorname{Ext}^1(C, Y) \to \dots$$

$$\dots \to \operatorname{Ext}^i(C, Y) \to \operatorname{Ext}^i(B, Y) \to \operatorname{Ext}^i(A, Y) \to \operatorname{Ext}^{i+1}(C, Y) \to \dots$$

Ainsi, la famille $(\operatorname{Ext}^i(., Y))_{i \geq 0}$ est un δ-foncteur contravariant.

Démonstration. Soit $0 \to Y \to I^{\cdot}$ une résolution injective de Y. On obtient alors une suite de complexes

$$0 \to \operatorname{Hom}(C, I^{\cdot}) \to \operatorname{Hom}(B, I^{\cdot}) \to \operatorname{Hom}(A, I^{\cdot}) \to 0$$

qui est exacte puisque pour tout injectif I, le foncteur $\operatorname{Hom}(., I)$ est exact. Par conséquent, on obtient directement le résultat en prenant la suite longue des h^i. □

Corollaire A.16. *Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte de $\mathfrak{A}$. Alors on a le diagramme suivant, qui commute et dont les lignes et les colonnes sont exactes :*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(C,A) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(C,B) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(C,C) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(C,A) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(C,B) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(C,C) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(B,A) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(B,B) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(B,C) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(B,A) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(B,B) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(B,C) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(A,A) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}(A,C) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(A,A) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(A,C) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(C,A) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(C,B) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(C,C) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(B,A) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(B,B) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(B,C) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & & & \\
\cdots \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(A,A) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(A,C) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & & & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & & & &
\end{tikzcd}$$

Nous souhaitons maintenant examiner le comportement de ces notions en application sur les variétés algébriques. Il est tout d'abord nécessaire de vérifier qu'elles sont bien utilisables. Le lemme suivant est prouvé dans [3].

Lemme A.17. *Soit A un anneau. Alors tout A-module est sous-module d'un A-module injectif.*

Nous admettons le résultat suivant, qui dit que la cohomologie commute aux limites inductives (voir [9]) :

Lemme A.18. *Soit X un espace topologique noethérien, $(\mathcal{F}_\alpha)$ un système inductif de faisceaux de groupes abéliens. Alors il existe des isomorphismes canoniques tels que, pour tout $i \geq 0$, on a :*

$$\varinjlim H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) = H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha)$$

Démontrons tout de même le résultat élémentaire suivant (la première égalité est une conséquence directe du lemme qui précède appliqué au cas particulier des sommes finies) :

Proposition A.19. *La cohomologie commute aux sommes directes : pour tous faisceaux $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$, et pour tout $i \geq 0$, on a :*

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{H}) \oplus \mathrm{Ext}^i(\mathcal{G}, \mathcal{H})$$

et

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}) = \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \oplus \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{H}).$$

Démonstration. Dans le premier cas : les foncteurs $(\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, .))_{i \geq 0}$ et $(\mathrm{Ext}^i(\mathcal{G}, .))_{i \geq 0}$ forment deux δ-foncteurs universels, donc c'est aussi le cas de $(\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, .) \oplus \mathrm{Ext}^i(\mathcal{G}, .))_{i \geq 0}$. Comme $(\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}, .))_{i \geq 0}$ aussi est universel et qu'il y égalité en degré 0, ces deux foncteurs sont isomorphes.

Dans le second cas : la somme d'une résolution injective de $\mathcal{G}$ et d'une résolution injective de $\mathcal{H}$ donne une résolution injective de la somme : comme le foncteur $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, .)$ est additif, on obtient le résultat voulu en prenant les objets de cohomologie du complexe construit. □

Proposition A.20. *Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé. Alors la catégorie $\mathfrak{Mod}(X)$ des faisceaux des $\mathcal{O}_X$-modules a assez d'injectifs.*

Démonstration. soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules. D'après le lemme précédent, chaque germe $\mathcal{F}_x$ se plonge dans un $\mathcal{O}_{x,X}$-module I_x. Considérant alors, pour tout $x \in X$, l'injection j du singleton $\{x\}$ dans X, on peut tout d'abord former le faisceau image $j_*(I_x)$ (en voyant I_x comme un faisceau sur $\{x\}$) puis de prendre le produit $\mathcal{I} = \prod_{x \in X} j_*(I_x)$. Nous allons montrer que $\mathcal{I}$ est injectif.

Pour un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{G}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{I}) = \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_*(I_x))$. On vérifie par ailleurs que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, j_*(I_x)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{x,X}}(\mathcal{G}_x, I_x)$. On voit alors que si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, on obtient naturellement un morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{I}$ induit par les inclusions $\mathcal{F}_x \to I_x$, qui est manifestement injectif. Par ailleurs, le foncteur $\mathrm{Hom}(., \mathcal{I})$ est donc le produit direct sur les $x \in X$ du foncteur $\mathcal{G} \to \mathcal{G}_x$ suivi du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{x,X}}(., I_x)$ qui sont tous deux exacts (le deuxième par injectivité de I_x). Par conséquent, $\mathrm{Hom}(., \mathcal{I})$ est exact. On a donc plongé $\mathcal{F}$ dans un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{I}$ injectif. □

Pour des faisceaux $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sur un espace annelé, et donc en particulier sur une variété algébrique, on pourra donc considérer les groupes abéliens $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

On notera en particulier $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ les sections du faisceau $\mathcal{F}$, et $H^i(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ les groupes de cohomologie du faisceau $\mathcal{F}$ sur l'espace $(X, \mathcal{O}_X)$.

Proposition A.21. *La cohomologie commute aux sommes directes : pour tous faisceaux $\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}$, et pour tout $i \geq 0$, on a :*

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{H}) \oplus \mathrm{Ext}^i(\mathcal{G}, \mathcal{H})$$

et

$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G} \oplus \mathcal{H}) = \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \oplus \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{H}).$$

Démonstration. Dans le premier cas : les foncteurs $(\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, .))_{i\geq 0}$ et $(\mathrm{Ext}^i(\mathcal{G}, .))_{i\geq 0}$ forment deux δ-foncteurs universels, donc c'est aussi le cas de $(\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, .) \oplus \mathrm{Ext}^i(\mathcal{G}, .))_{i\geq 0}$. Comme $(\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}, .))_{i\geq 0}$ aussi est universel et qu'il y égalité en degré 0, ces deux foncteurs sont isomorphes.

Dans le second cas : la somme d'une résolution injective de $\mathcal{G}$ et d'une résolution injective de $\mathcal{H}$ donne une résolution injective de la somme : comme le foncteur $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, .)$ est additif, on obtient le résultat voulu en prenant les objets de cohomologie du complexe construit. □

A.4 Cohomologie de Čech

Nous nous proposons ici de définir la cohomologie de Čech des faisceaux.

Soit X un espace topologique. On fixe pour l'instant un recouvrement ouvert $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X. On fixe aussi un bon ordre sur I. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur X. On définit, pour $q \geq 0$, le *groupe des q-cochaines* de $\mathcal{F}$, relativement à $\mathfrak{U}$, par

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \ldots < i_q} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p}.$$

On définit ensuite un morphisme de cobord $d : C^q \to C^{q+1}$ de la manière suivante :

$$(d\alpha)_{i_O, \ldots, i_{q+1}} = \sum_{k=0}^{q+1} (-1)^k \alpha_{i_0, \ldots, \hat{i_k}, \ldots, i_{q+1}}|_{U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_{p+1}}}.$$

On vérifie que $d^2 = 0$, donc on a défini un complexe de groupes abéliens $C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$.

On peut donc définir les objets de cohomologie du complexe :

Définition A.22. *Le q-ème groupe de cohomologie de Čech de $\mathcal{F}$ relativement à $\mathfrak{U}$ est :*

$$\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = h^q(C^{\cdot}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})).$$

De cette définition, on déduit immédiatement le résultat suivant :

Lemme A.23. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

Démonstration. La condition de cobordisme dit exactement que des sections sur les U_i se recollent sur les intersections. □

L'intérêt de la cohomologie de Čech est qu'elle est facilement calculable.

Par exemple, c'est elle qui permet de calculer la cohomologie des faisceaux $\mathcal{O}(d)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(k)$, calcul qui est à la base de la démonstration de la dualité de Serre.

On trouvera également les démonstrations des résultats suivants dans [9] :

Lemme A.24. *Soit X une variété projective, $\mathfrak{U}$ un recouvrement par des ouverts affines, $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. Alors il existe pour tout $q \geq 0$ un mophisme naturel*

$$\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^q(X, \mathcal{F}).$$

Théorème 19. *Soit X une variété projective, $\mathfrak{U}$ un recouvrement par des ouverts affines, $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X. Alors pour tout $q \geq 0$, il existe un isomorphisme naturel :*

$$\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^q(X, \mathcal{F}).$$

Définition A.25. *Un recouvrement ouvert $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ muni d'une application $\lambda : J \to I$ est un raffinement de $\mathfrak{U}$ si pour $j \in J$, on a $V_j \subseteq U_{\lambda(j)}$.*

Proposition A.26. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X un espace topologique, $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$, λ un raffinement de $\mathfrak{U}$. Alors pour tout $q \geq 0$, λ induit un morphisme canonique*

$$\lambda^q : \check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^q(\mathfrak{V}, \mathcal{F}).$$

Comme le raffinement permet de définir un ordre partiel sur les recouvrements ouverts on peut donc considérer la limite :

Définition A.27. *Le q-ème groupe de cohomologie de Čech du faisceau $\mathcal{F}$ est*

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Lemme A.28. *Les applications naturelles $\check{H}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to H^q(X, \mathcal{F})$ sont compatibles avec le raffinement.*

Théorème 20. *Soit X un espace topologique, $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens. Alors le morphisme naturel*

$$\check{H}^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

Notons que c'est ce résultat qui est utilisé pour étudier $H^1(\mathcal{O}^*)$ (théorème 2).

Mentionnons enfin un dernier résultat qui justifie notamment l'existence du théorème de Riemann-Roch :

Proposition A.29. *Soit X une variété algébrique, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors tous les espaces de cohomologie sont de dimension finie sur k.*

Références

[1] M. F. Atiyah, *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc. (3) 7, (1957), 414–452.

[2] M. F. Atiyah, *Geometry of Yang-Mills Fields*, Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale dei Lincei e Scuola Normale Superiore, Pisa (1979).

[3] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris (1958).

[4] A. Grothendieck, *A General Theory of Fibre Spaces with Structure Sheaf*, University of Kansas (1955).

[5] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J. Math. 79 (1957), 121–138.

[6] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. (2) 9 (1957) 119–221.

[7] A. Grothendieck, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV : Les schémas de Hilbert* Sém. Bourbaki 221 (1960).

[8] J. Harris et I. Morrison, *Moduli of curves*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 187 (1998).

[9] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 52 (1977).

[10] J. Le Potier, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Publications mathématiques de l'université Paris 7 - Denis Diderot (1995).

[11] R. Narasimhan, *Compact Riemann Surfaces*, Basel Boston MA Berlin : Birkhäuser (1992).

[12] A. N. Rudakov, *Helices and vector bundles*, London Math. Soc. Lecture Note Series, vol. 148, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990).

[13] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. (2) 61 (1955), 197–278.

[14] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 6 (1955–1956), 1–42.

[15] C. S. Seshadri, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Astérisque 96 (1982).

[16] J. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 106 (1986).