Ens Paris, DMA **Algèbre 1** **2012/2013**

Sous -groupes d'ordre p^3, p impair

Soit p un nombre premier impair, et soit G un groupe de cardinal p^3. On suppose qu'il existe dans G un élément x d'ordre p^2 et on note H le groupe engendré par x.

1. Rappeler pourquoi H est distingué dans G.

2. Soit $y \notin H$. On suppose désormais que G n'est pas cyclique. Montrer que $y^p \in H$, puis en posant $y^p = x^m$, que p divise m.

3. On pose $y^{-1}xy = x^n$. Calculer $y^{-l}x^r y^l$ en fonction de l, r, n, x.

4. On cherche $k \in \mathbb{N}$ tel que yx^k est d'ordre p. Montrer que cela revient à résoudre en k l'équation suivante dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$:

$$m + k(1 + n + ... + n^{p-1}) = 0.$$

   Montrer que cette équation a toujours des solutions.

5. Donner la liste de tous les sous-groupes d'ordre p^3 à isomorphisme près.