

# CALCULS D'INVARIANTS EN THÉORIE DE GROMOV-WITTEN

JÉRÉMY GUÉRÉ, SOUS LA DIRECTION D'ALESSANDRO CHIDO

Introduction au domaine de recherche, ENS Paris

## Résumé

La première partie introduit la théorie de Gromov-Witten en partant d'un problème énumératif, de façon à être accessible à des étudiants en M1 de Mathématiques. Cette théorie fait apparaître de nouveaux invariants géométriques pour les variétés complexes projectives, mais on ne dispose pas actuellement de méthode générale pour en effectuer le calcul. Dans la deuxième partie, nous énoncerons les résultats obtenus dans le cas du point (la variété  $\text{Spec } \mathbb{C}$ ). Dans la dernière partie, nous introduirons les structures de niveau sur les courbes orbifolds et le modèle de Landau-Ginzburg. Des résultats récents ont montré une correspondance entre les deux théories mentionnées dans le cas de la quintique de  $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ . Mon projet de recherche sera d'étudier ce modèle et de développer une méthode de calcul similaire à celle qui est présentée dans la deuxième partie, puis d'en déduire des résultats sur les invariants de Gromov-Witten des variétés projectives.

Je remercie vivement Alessandro Chiodo pour m'avoir encadré pendant mon stage de M2 et pour me guider à travers ce domaine de recherche passionnant.

## 0. INTRODUCTION

La théorie des cordes utilise un espace-temps à 10 dimensions, produit de l'espace-temps standard  $\mathbb{R}^4$  de Minkowski et d'une variété de Calabi-Yau de dimension complexe 3, et des particules élémentaires de dimension 1, des *cordes*, pour décrire les interactions de la physique. Les trajectoires de ces particules sont des surfaces plongées dans l'espace-temps. De nombreux sujets de recherche en mathématiques ont émergé suite à cette nouvelle physique. La théorie de l'intersection en est un exemple important. Les intégrales sur l'espace de modules  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ , présentées dans la première section de ce texte, peuvent être interprétées en physique comme des fonctions de corrélation, c'est-à-dire des fonctions donnant la probabilité de passer d'un état initial donné à un état final donné. Nous prenons en général  $X$  de Calabi-Yau, de sorte que le cas de la dimension 3 soit en rapport direct avec la physique.

Les idées et intuitions de la théorie des cordes ont joué le rôle de fil conducteur dans ce domaine des mathématiques. Par-exemple, sur l'espace de modules des courbes stables  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , Edward Witten [8] a conjecturé en 1991 une formule de récurrence sur les intégrales des classes  $\psi_i$  (voir la fin de la sous-section 2.3.) en remarquant que la fonction de partition<sup>1</sup> vérifie une dynamique de type Virasoro. Cette conjecture a été démontrée la même année par Maxim Kontsevich [6].

Les bases mathématiques qui ont permis de traduire les inspirations de la physique ont été d'abord bien établies par Pierre Deligne et David Mumford [7] en 1969. Ils ont notamment introduit la notion de *champ algébrique de type Deligne-Mumford*, indispensable pour l'étude d'espaces de modules.

---

*Date:* 28 novembre 2011.

1. La fonction de partition est une série qui fait intervenir toutes les intégrales des classes  $\psi_i$  sur tous les espaces de courbes. Il s'agit donc d'un point de vue global et générique sur les espaces de courbes et non de s'intéresser aux particularités de chaque espace.

Les *invariants de Gromov-Witten* sont de nouveaux invariants géométriques d'une variété projective  $X$ . Ils définissent une nouvelle structure de produit sur l'anneau de la cohomologie de cette variété, appelée *produit quantique*. Cet anneau contient bien plus d'informations que l'anneau de cohomologie usuel. C'est pourquoi il est si important de savoir les manipuler. Pour le moment, le calcul de ces invariants dans le cas général est largement incomplet. En genre 0, il existe des résultats mais au-delà du genre 52, il n'y a plus aucune prédiction. Une des difficultés majeures réside dans la détermination d'une classe d'homologie de l'espace  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ , appelée classe virtuelle, qui remplace la classe fondamentale dans les cas où l'espace n'est pas de dimension constante. Elle est nécessaire pour donner un sens mathématique aux intégrales de Gromov-Witten et rend pour l'instant impossible leur calcul.

L'idée a été suggérée par Witten de s'intéresser à un autre espace de module qui classifie des fibrés en droites sur des surfaces de Riemann, satisfaisant certaines relations algébriques. Ceci a donné naissance au modèle de Landau-Ginzburg. Dans cette théorie, nous pouvons encore définir des classes  $\psi_i$  et des invariants de type Gromov-Witten. Récemment, des conjectures sur une dualité entre ces invariants, appelés *invariants de Fan-Jarvis-Ruan-Witten*, et ceux donnés par la théorie de Gromov-Witten ont été mises en évidence sur l'exemple de la quintique par Alessandro Chiodo et Yong-Bin Ruan [2].

Dans le modèle de Landau-Ginzburg, des classes virtuelles apparaissent aussi dans l'expression des intégrales, mais les calculs qui en résultent devraient être plus simples à réaliser, ne serait-ce que parce que l'espace de modules est lisse. Mon **projet de thèse** sera tout d'abord de comprendre la classe virtuelle dans ce cadre et de fournir une méthode de calcul pour les invariants, en s'inspirant de celle qui est présentée dans le cas de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ .

Le calcul des invariants de Gromov-Witten se fera peut-être à travers celui des invariants de Fan-Jarvis-Ruan-Witten. Cependant, l'étude de cette dualité et son importance au sein d'un phénomène mystérieux appelé symétrie miroir globale en font un sujet de recherche fondamentale dont la portée ira peut-être au-delà des mathématiques.

## TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction	1
1. La théorie de Gromov-Witten	3
1.1. Un problème énumératif	3
1.2. Les espaces de modules	3
1.3. Les invariants de Gromov-Witten	4
2. Le cas d'un point	5
2.1. L'espace de modules des courbes stables	5
2.2. Les classes tautologiques	6
2.3. Récurrences sur les nombres d'intersection	7
3. Le cas d'une hypersurface dans un espace projectif à poids	9
3.1. La correspondance Gromov-Witten/Landau-Ginzburg	9
3.2. Les structures de niveau	10
3.3. Conclusion	12
Références	12

## 1. LA THÉORIE DE GROMOV-WITTEN

Nous pouvons nous reporter à [5] comme référence pour ce qui suit.

**1.1. Un problème énumératif.** Deux droites du plan se coupent en général en un point, alors que deux droites de l'espace ne s'intersectent presque jamais. Combien y a-t-il de points d'intersection entre une quadrique et une cubique génériques dans le plan projectif complexe ? Combien un système d'équations polynomiales a-t-il de solutions ? Combien y a-t-il de courbes d'un type prescrit dans une variété complexe donnée ? Toutes ces questions appellent la même réponse : il s'agit de problèmes énumératifs en géométrie algébrique.

En essayant de les résoudre, nous faisons d'abord face à des questions conceptuelles. Quel sens donner à « générique » ? Existe-t-il un bon espace qui permette de paramétrer mes solutions ? Le nombre de solutions reste-t-il constant si je perturbe mon système d'équations ?

Ensuite seulement viennent les problèmes d'un calcul explicite du nombre de solutions. Celui-ci est difficile à traiter directement. Nous devons souvent faire face à des intégrations de classes cohomologiques qui ne s'écrivent pas en coordonnées de façon agréable. Une stratégie est de tirer profit de la géométrie du problème en utilisant les invariances de ces intégrales sous certaines applications. Changements de variables, intégrations par parties, symétries de l'espace, sont des techniques bien connues pour le calcul d'intégrales, conduisant dans certains cas à des relations de récurrence<sup>2</sup>.

Regardons pour commencer le problème énumératif suivant. Nous nous plaçons dans le plan projectif complexe  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  et nous tirons  $n$  points en position générale, c'est-à-dire qu'il n'y a *a priori* pas de relations particulières entre eux. Une première difficulté est d'exprimer mathématiquement ce que veut dire « position générale ». Ensuite, prenons un entier  $d$  et cherchons toutes les courbes rationnelles<sup>3</sup> de degré  $d$  qui passent par ces  $n$  points. Le but est de les dénombrer et nous notons  $N_d$  leur nombre.

Selon la valeur de  $n$ , il peut y avoir une infinité de telles courbes, ou bien même aucune. Il faut donc choisir proprement l'entier  $n$ , en prenant le plus petit entier pour lequel il n'y a pas une infinité de solutions. Heuristiquement, cette valeur pour  $n$  doit être égale à la dimension de l'espace qui paramètre l'ensemble des courbes rationnelles de degré  $d$  dans le plan projectif complexe. La valeur attendue est  $n = 3d - 1$ .

**1.2. Les espaces de modules.** Ce sont des espaces qui classifient des objets mathématiques d'un type donné. Nous les voyons également comme des espaces qui paramètrent les solutions d'un problème. Le premier exemple d'espace de modules est celui de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  qui paramètre les droites complexes de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Un deuxième exemple est la grassmannienne  $\mathbb{G}(m, \mathbb{E})$  qui classe les sous-espaces vectoriels de dimension  $m$  d'un espace vectoriel  $\mathbb{E}$  donné.

Les espaces de modules sont souvent attachés aux problèmes énumératifs. Pour trouver la valeur de  $N_d$ , nous sommes amenés à considérer l'ensemble dont chaque point correspond à une courbe rationnelle de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ; ou plutôt, à une telle courbe munie de  $n$  points marqués. Nous notons cet ensemble  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), d)$ .

De la même façon que l'ensemble des droites complexes  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  peut être muni d'une structure de variété complexe compacte, nous pouvons définir une structure sur l'ensemble  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), d)$  qui en fait un orbifold compact. Localement, un orbifold de dimension complexe  $m$  est isomorphe à un ouvert de  $\mathbb{C}^m$  modulo l'action d'un groupe fini sur cet ouvert. Certains points de cet ouvert peuvent

---

2. C'est le cas notamment pour les célèbres intégrales de Wallis  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ .

3. Nous dirons toujours courbes par la suite mais ce sont des courbes complexes, donc des surfaces réelles. Rationnelle signifie homéomorphe à la sphère  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ .

être fixés par ce groupe, ce qui amène à la notion de stabilisateur d'un point<sup>4</sup>. Ici, la dimension complexe de notre orbifold est  $m = 3d - 1 + n$ .

La notion d'orbifold apparait généralement dans les espaces de modules lorsque les objets à paramétrer ont un groupe d'automorphismes non trivial mais fini. En géométrie algébrique, nous parlons plutôt de champ algébrique de type Deligne-Mumford.

Enfin, il suffit de compter les points de cet orbifold dont les courbes représentées ont pour points marqués les  $n$  points donnés dans l'énoncé de notre problème. Notons  $x_1, \dots, x_n$  ces points de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ . La valeur de  $N_d$  se réduit au cardinal de l'ensemble

$$\text{ev}_1^{-1}(\{x_1\}) \cap \dots \cap \text{ev}_n^{-1}(\{x_n\})$$

où  $\text{ev}_i$  est l'application d'évaluation de  $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), d)$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  qui à une courbe marquée fait correspondre le point marqué  $i$ . En utilisant la dualité de Poincaré<sup>5</sup>, nous réécrivons ce résultat sous la forme d'une intégrale

$$N_d = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), d)} \text{ev}_1^*(P) \wedge \dots \wedge \text{ev}_n^*(P).$$

avec  $P$  la classe cohomologique correspondant à la classe homologique d'un point. En comparant le degré de la forme à intégrer ( $2n$ ) et la dimension de l'espace d'intégration ( $3d - 1 + n$ ), cette écriture a bien un sens lorsque  $n = 3d - 1$ .

Résumons en quelques mots comment nous avons traité notre problème. Tout d'abord, nous avons cherché un espace de modules qui paramètre les solutions. Ensuite, nous avons ré-exprimé le nombre de solutions comme une intégrale de classes cohomologiques, aussi appelée nombre d'intersection, sur notre espace de modules. Enfin, nous obtiendrons des résultats sur cette intégrale en étudiant ses propriétés géométriques d'invariance. Nous ne rentrons pas dans les détails ici mais c'est la procédure générale qui permet d'obtenir le

**Théorème 1.2.1** (Kontsevich). *Pour tout  $d > 1$ , nous avons*

$$N_d = \sum_{\substack{d_1 + d_2 = d \\ d_1, d_2 > 0}} N_{d_1} N_{d_2} \left( d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} - d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} \right).$$

Ceci nous permet de calculer toutes les valeurs de  $N_d$ , à partir de la condition initiale  $N_1 = 1$ .

**1.3. Les invariants de Gromov-Witten.** Nous venons de voir avec  $N_d$  notre premier exemple d'invariant de Gromov-Witten. De façon générale, prenons une variété complexe compacte projective  $X$ . A partir de maintenant, nous prenons  $X$  de Calabi-Yau<sup>6</sup>. Nous pouvons penser par exemple au lieu des zéros d'un polynôme homogène  $P(x_0, \dots, x_n)$  de degré  $n + 1$  dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Soit  $\beta \in H_2(X, \mathbb{Q})$  une classe d'homologie de  $X$ .

Nous cherchons à savoir combien de courbes complexes de genre<sup>7</sup>  $g$  et de type  $\beta$  passent par  $n$  points placés en position générale dans la variété  $X$ . Dans l'exemple précédent,  $X$  est le plan projectif,  $g = 0$  (courbes rationnelles) et la classe d'homologie  $\beta$  est égale à  $d$ .

Suivant la stratégie présentée dans la sous-section précédente, nous devons définir un espace de paramètres pour notre problème. Nous regardons l'ensemble des applications  $f$ , partant d'une

4. Un point ayant un stabilisateur d'ordre  $k$  peut être vu comme une fraction  $1/k$  de point. Un orbifold peut être vu comme une variété dont certains points sont munis de stabilisateurs non triviaux et comptent « moins que les autres ».

5. Bien que notre espace de modules soit un orbifold, la dualité de Poincaré s'applique du moment que l'orbifold est compact.

6. Cette condition est d'avoir le fibré canonique trivial. Pour une hypersurface de degré  $d$  dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , cela revient simplement à imposer  $d = n + 1$ .

7. Il s'agit du nombre de trous d'une surface. Par-exemple, le tore a un trou et est de genre 1 alors que la sphère est de genre 0.

courbe  $C$  de genre  $g$  et marquée de  $n$  points  $x_1, \dots, x_n$  et arrivant dans la variété  $X$ , pour lesquels nous avons  $f(C) = \beta$  dans le groupe d'homologie de  $X$ . Ces applications sont vues à isomorphismes près. Nous notons cet ensemble  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ .

Tout comme précédemment, nous voulons mettre une structure agréable sur cet ensemble. Pour en faire un orbifold, il faut rajouter une condition de stabilité sur les applications pour nous assurer que les stabilisateurs sont d'ordre fini. Même ainsi, nous avons des problèmes. Cet orbifold est compact et séparé mais n'est pas lisse. Il en est même très loin, avec des singularités aussi mauvaises que possibles, et par-dessus tout il n'est pas de dimension constante.

Ceci est très contrariant puisque même si nous arrivons à définir des classes de cohomologie pour traduire notre problème en un calcul d'intégrale, celle-ci n'aura aucun sens puisque l'espace sur lequel on intègre n'a pas une dimension fixée.

Oublions cet incident pour le moment et continuons notre étude. Nous avons les mêmes morphismes d'évaluation que dans l'exemple précédent, à savoir  $ev_1, \dots, ev_n$ , allant de notre espace de modules vers notre variété  $X$ . Prenons des classes de cohomologie  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de  $X$  et tirons-les en arrière sur l'espace de modules. Nous définissons les invariants de Gromov-Witten par les intégrales

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)} ev_1^*(\alpha_1) \dots ev_n^*(\alpha_n).$$

Ce sont des invariants géométriques de la variété  $X$ .

Comme nous venons de le dire, cette intégrale n'a pas de sens. Cependant, il est possible de lui en donner un en utilisant des résultats de la théorie de l'obstruction. Ils nous conduisent à définir une dimension virtuelle pour  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ , qui est égale<sup>8</sup> à  $\text{vdim} = (\dim X - 3)(1 - g) + n$ . Nous devons penser que « virtuellement » notre espace de modules est de dimension constante et que nous pouvons donc intégrer une forme de degré  $\text{vdim}$  sur cet espace. Tout ceci reste bien sûr approximatif et il y a du travail à faire pour définir correctement les invariants de Gromov-Witten. Ce travail ne sera pas fait dans ce texte. En revanche, il existe un cas dans lequel tout se passe bien et que nous allons désormais exposer en détails.

## 2. LE CAS D'UN POINT

Cette section présente les résultats obtenus lorsque nous prenons  $X = \text{Spec } \mathbb{C}$ , c'est-à-dire un point. Le livre [1] est une très bonne référence sur l'espace de modules des courbes stables.

**2.1. L'espace de modules des courbes stables.** L'idée est de classifier des courbes complexes. Le genre d'une courbe est un invariant topologique. Or, la structure complexe est plus fine que la structure topologique. Nous pouvons donc au préalable séparer nos courbes par genre. De plus, nous admettons des points marqués.

Définissons  $\mathcal{M}_{g,n}$  l'ensemble des classes d'isomorphismes des courbes lisses de genre  $g$  avec  $n$  points marqués tous distincts. Un isomorphisme entre une courbe marquée  $(C; x_1, \dots, x_n)$  et une courbe marquée  $(C'; x'_1, \dots, x'_n)$  est un biholomorphisme  $f$  entre  $C$  et  $C'$  pour lequel  $f(x_i) = x'_i$  pour tout  $i$ . En dehors des cas  $(g, n) = (0, 0), (0, 1), (0, 2)$  et  $(1, 0)$ , cet ensemble admet une structure d'orbifold de dimension complexe  $3g - 3 + n$ . Cependant, il n'est pas toujours compact.

Explorons quelques exemples pour bien comprendre ce qui se passe. Prenons une courbe  $C$  de genre 0. Topologiquement, c'est une sphère. Or, il n'existe qu'une seule structure complexe sur la sphère de sorte que nous nous ramenons à  $C = \mathbb{CP}^1$ . Les automorphismes de  $\mathbb{CP}^1$  sont donnés par les applications  $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$  et nous avons la propriété suivante : étant donnés deux triplets de points distincts entre eux, il existe un et un seul automorphisme de  $\mathbb{CP}^1$  qui envoie le premier triplet sur le deuxième. Ainsi, une courbe de genre 0 marquée de deux points ou moins a une infinité d'automorphismes, c'est pourquoi les ensembles  $\mathcal{M}_{0,0}, \mathcal{M}_{0,1}$  et  $\mathcal{M}_{0,2}$  n'admettent pas

---

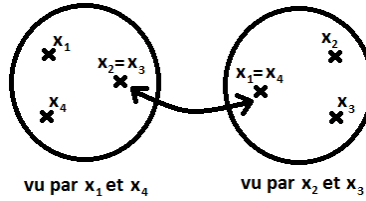
8. Plus généralement, si la variété  $X$  n'est pas de Calabi-Yau, nous avons  $\text{vdim} = (\dim X - 3)(1 - g) + n + \int_{\beta} c_1(TX)$ .

de structure orbifold<sup>9</sup>. Quand à  $\mathcal{M}_{0,3}$ , nous pouvons toujours ramener une courbe  $(\mathbb{CP}^1; x_1, x_2, x_3)$  au modèle  $(\mathbb{CP}^1; 0, 1, \infty)$ . Par conséquent,  $\mathcal{M}_{0,3}$  n'a qu'un seul point.

Passons à  $\mathcal{M}_{0,4}$ , nous pouvons toujours ramener  $(\mathbb{CP}^1; x_1, x_2, x_3, x_4)$  à  $(\mathbb{CP}^1; 0, 1, \infty, t)$  avec  $t$  un point quelconque de la sphère mais distinct des autres points marqués. Nous ne pouvons pas contrôler ce point  $t$  par des automorphismes, si bien que  $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$ . Cet espace n'est donc pas compacte.

Nous voyons clairement sur cet exemple que l'espace ainsi défini manque de trois points. Pour les rajouter, nous devons admettre davantage de courbes dans la définition de l'espace de modules  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ .

Poursuivons l'exemple de  $\mathcal{M}_{0,4}$ . Nous voudrions rajouter une courbe de genre 0 avec quatre points marqués dont deux sont superposés. Disons par exemple que  $x_4 = t$  tend vers  $x_1 = 0$ . Mais alors, du point de vue de  $x_1$  et de  $x_4$ , c'est  $x_2$  qui tend vers  $x_3$ . L'idée est alors de séparer les points  $x_1$  et  $x_4$  des points  $x_2$  et  $x_3$ . Nous prenons deux composantes  $C_1$  et  $C_2$  de genre 0. Sur  $C_1$ , nous plaçons  $x_1$  et  $x_4$  alors que sur  $C_2$ , nous plaçons  $x_2$  et  $x_3$ . Nous rajoutons sur  $C_1$  le point  $x_2 = x_3$  vu par  $x_1$  et  $x_4$  alors que sur  $C_2$ , nous rajoutons le point  $x_1 = x_4$  vu par  $x_2$  et  $x_3$ . Enfin, nous collons ces deux nouveaux points.



La courbe obtenue par cette recette possède une singularité de type point double ordinaire, encore appelée *noeud*<sup>10</sup>, sur le point de recollement de  $C_1$  et  $C_2$ . Nous l'appelons courbe nodale.

Dans l'exemple de  $\mathcal{M}_{0,4}$ , nous avons trois courbes nodales distinctes, selon que le point  $x_1$  se trouve sur la composante de  $x_2, x_3$  ou  $x_4$ . Celles-ci correspondent aux trois points manquants.

Définissons naïvement  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  comme l'ensemble des classes d'isomorphismes des courbes nodales de genre  $g$  à  $n$  points marqués, les points marqués devant être lisses. Cette fois, nous avons rajouté trop de points et l'espace de modules n'est plus séparé. En effet, dans l'exemple de  $\mathcal{M}_{0,4}$ , nous n'avons pas rajouté toutes les courbes nodales de genre 0, mais seulement celles qui avaient au moins trois points spéciaux<sup>11</sup> sur chaque composante. Ceci nous conduit à la notion de stabilité.

Une courbe nodale est stable si son groupe d'automorphismes est de cardinal fini. Ceci est équivalent à demander que toutes ses composantes de genre 0 ont au moins trois points spéciaux et toutes ses composantes de genre 1 ont au moins un point spécial.

Redéfinissons  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  avec des courbes nodales stables et nous pouvons ensuite mettre une structure d'orbifold sur cet ensemble. De plus, il est lisse, de dimension complexe  $3g - 3 + n$ , et il est compact et séparé.

**2.2. Les classes tautologiques.** Les nombres d'intersection qui nous intéressent sur l'espace de modules des courbes stables proviennent seulement de certains types de classes cohomologiques, appelées *classes tautologiques*. Ces classes apparaissent naturellement.

9. De même, le groupe des automorphismes d'un tore sans point marqué est de cardinal infini puisqu'il contient le groupe des translations.

10. Localement au voisinage d'un noeud, une courbe nodale s'écrit  $\{xy = 0\}$  dans  $\mathbb{C}^2$ .

11. Un point spécial est un point marqué ou un demi-noeud. Pour une courbe nodale, nous avons deux types de noeuds, les séparants et les non séparants. Un noeud séparant apporte un point spécial à la composante mais un noeud non séparant en apporte deux.

Tout comme l'espace de modules  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  vient muni d'un fibré universel appelé fibré tautologique et noté  $\mathcal{O}(-1)$ , notre espace  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  est muni d'un espace universel, appelé *courbe universelle* et notée  $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$ . Nous pouvons penser à un point de cet espace comme à un couple  $([C; x_1, \dots, x_n], x)$  avec  $(C; x_1, \dots, x_n)$  une courbe stable de genre  $g$  marquée de  $n$  points,  $[C; x_1, \dots, x_n]$  le point de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  correspondant à cette courbe et  $x$  un point quelconque de  $C$ .

Cette courbe universelle vient avec un morphisme de projection  $\pi$  vers  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  et  $n$  sections de ce morphisme  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  qui correspondent aux repérages des points marqués.

Nous avons un choix canonique de fibré associé au morphisme  $\pi$ , appelé fibré cotangent relatif et noté  $\omega_\pi$ . C'est un fibré en droites sur la courbe universelle qui, au-dessus d'un point  $([C; x_1, \dots, x_n], x)$ , consiste en la droite  $T_x^\vee C$ .

C'est à partir de ce fibré en droites que nous allons construire les deux types de classes tautologiques qui vont entrer dans la définition de nos nombres d'intersection.

Premièrement, tirons en arrière par  $\sigma_i$  le fibré  $\omega_\pi$  afin d'obtenir un fibré en droites sur l'espace de modules. Enfin, prenons-en la première classe de Chern et définissons, pour tout  $i$  entre 1 et  $n$ ,

$$\psi_i = c_1(\sigma_i^*(\omega_\pi)) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}).$$

Deuxièmement, prenons l'image directe du fibré  $\omega_\pi$  par le morphisme de projection. Nous obtenons un faisceau dont le germe au point  $[C; x_1, \dots, x_n]$  est donné par  $H^0(C, \omega_C)$  qui est de dimension constante égale à  $g$ . Ainsi, ce faisceau est un fibré vectoriel de rang  $g$ , appelé fibré de Hodge et noté  $\Lambda$ . Nous pouvons donc définir, pour tout  $k$  entre 1 et  $g$ ,

$$\lambda_k = c_k(\pi_*(\omega_\pi)) \in H^{2k}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}).$$

Nous définissons pour finir, pour tous  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_g$  des entiers tels que

$$3g - 3 + n = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{k=1}^g k \cdot b_k$$

le nombre d'intersection

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \lambda_1^{b_1} \dots \lambda_g^{b_g}.$$

**2.3. Récurrences sur les nombres d'intersection.** Maintenant que nous avons donné un sens aux nombres d'intersection que nous souhaitons calculer, nous allons brièvement expliquer comment les calculer de façon récursive. C'est le sujet principal de mon mémoire de Master 2 [4].

La formule de Grothendieck-Riemann-Roch s'applique à notre morphisme  $\pi$  et à notre fibré  $\omega_\pi$  et s'énonce ainsi

$$\text{ch}(\pi_1 \omega_\pi) = \pi_*(\text{ch} \omega_\pi \text{Td} \omega_\pi).$$

$\text{ch}$  est le caractère de Chern et  $\text{Td}$  est la classe de Todd. Cette formule corrige le défaut de commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} K(\overline{\mathcal{C}}_{g,n}) & \xrightarrow{\text{ch}} & H^*(\overline{\mathcal{C}}_{g,n}) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_* \\ K(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) & \xrightarrow{\text{ch}} & H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \end{array}$$

en rajoutant la classe de Todd du morphisme. Dans ce diagramme,  $K$  représente la K-théorie de l'espace, c'est-à-dire, pour simplifier, l'ensemble des fibrés vectoriels sur cet espace.

A partir de cette formule, nous déduisons le

**Théorème 2.3.1.** *Les caractères de Chern du fibré de Hodge sont donnés par la formule*

$$\text{ch}_k(\Lambda) = \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \left( \pi_*(\psi_{n+1}^{k+1}) - \sum_{i=1}^n \psi_i^k \right) + \frac{1}{2} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \sum_{a+a'=k-1} \left( j_{g,n}^{\text{boucle}} * (\psi_{n+1}^a (-\psi_{n+2})^{a'}) + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \subset \mathbb{N}_n}} j_{(g_1, g_2), n, I}^{\text{arbre}} * (\psi_\alpha^a (-\psi_\beta)^{a'}) \right)$$

où les  $B_m$  sont les nombres de Bernouilli définis par

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} = \sum_{m \geq 0} B_m \frac{x^m}{m!}.$$

En particulier, nous remarquons que  $\text{ch}_0(\Lambda) = g - 1$  et que tout caractère de Chern de  $\Lambda$  de degré pair strictement positif est nul<sup>12</sup>.

Dans ce théorème, les morphismes  $j_{\text{arbre}}$  et  $j_{\text{boucle}}$  correspondent respectivement aux opérations de recollement de deux courbes marquées en leur dernier marquage et d'une courbe marquée avec elle-même en ses deux derniers marquages. De plus, nous pouvons montrer que le morphisme de projection  $\pi$  est isomorphe au morphisme d'oubli du dernier point marqué et que  $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$  est isomorphe à  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ .

En exprimant nos nombres d'intersection en fonction des caractères de Chern du fibré de Hodge au lieu de ses classes de Chern puis en utilisant le théorème ci-dessus, nous obtenons une combinaison linéaire d'intégrales dans lesquelles se trouvent des classes  $\psi_i$ , des classes  $\text{ch}_k(\Lambda)$  et des images directes de ces classes par les trois morphismes énoncés.

Nous utilisons successivement la formule de projection, la formule de changement de variable, la formule de functorialité du produit en cohomologie et enfin l'invariance des classes  $\psi_i$  et du fibré de Hodge par l'opération de tirer-en-arrière sous chacun des trois morphismes. De tout cela, il résulte une combinaison linéaire de nombres d'intersection du même type qu'au départ, mais avec strictement moins de classes  $\text{ch}_k(\Lambda)$ . De proche en proche, nous éliminons toutes ces classes et n'avons plus que des classes  $\psi_i$  dans nos intégrales. Nous prenons la notation suivante, pour un multi-indice  $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n)$ ,

$$\langle \tau_{\underline{d}} \rangle_{g,n} = \langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle_{g,n} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n}$$

Les formules de récurrence permettant le calcul de tous ces nombres d'intersection ont été conjecturées par Edward Witten dans [8] et démontrées par Maxim Kontsevich dans [6].

12. Nous avons tout simplement  $B_k = 0$  pour tout  $k$  impair et différent de 1.



**Théorème 2.3.2** (Kontsevich-Witten). *Les nombres d'intersection ne faisant intervenir que des classes  $\psi_i$  vérifient les relations de récurrence suivantes<sup>13</sup> pour tout  $k \geq -1$*

$$\begin{aligned} (2k+3)!! \langle \tau_{k+1} \tau_{\underline{d}} \rangle_{g,n+1} &= \sum_{j=1}^n \frac{(2k+2d_j+1)!!}{(2d_j-1)!!} \langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_j+k} \cdots \tau_{d_n} \rangle_{g,n} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r+s=k-1} (2r+1)!! (2s+1)!! \\ &\left( \langle \tau_r \tau_s \tau_{\underline{d}} \rangle_{g-1,n+2} + \sum_{I \subset \mathbb{N}_n} \langle \tau_r \tau_{\underline{d}_I} \rangle_{p,a+1} \langle \tau_s \tau_{\underline{d}_I^c} \rangle_{q,b+1} \right). \end{aligned}$$

Nous renvoyons à [9] pour une discussion détaillée sur l'origine physique de cette conjecture et pour savoir comment intervient la dynamique de type Virasoro.

### 3. LE CAS D'UNE HYPERSURFACE DANS UN ESPACE PROJECTIF À POIDS

Pour cette dernière section, nous nous baserons sur [3]. Nous regardons maintenant la théorie de Gromov-Witten d'une hypersurface  $X$  définie par un polynôme quasi-homogène  $W = \sum_{i=1}^s \gamma_i \prod_{j=1}^N x_j^{m_{i,j}}$ . Plus précisément, nous disons que  $W$  est quasi-homogène de charges  $q_1, \dots, q_N \in \mathbb{Q}$  lorsque  $\sum_{j=1}^N m_{i,j} q_j = 1$ . Si nous écrivons les  $q_j$  sous un même dénominateur commun  $w_1/d, \dots, w_N/d$ , alors les  $w_j$  sont appelés poids de  $W$  et  $d$  est le degré. Nous voyons que  $W(\lambda^{w_1} x_1, \dots, \lambda^{w_N} x_N) = \lambda^d W(x_1, \dots, x_N)$  et donc l'équation  $W = 0$  définit une hypersurface  $X$  dans l'espace projectif à poids  $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_N)$ <sup>14</sup>. Cette hypersurface est en général un orbifold. De plus, la condition d'être de Calabi-Yau se traduit par la relation supplémentaire

$$\sum_{i=1}^n q_i = 1.$$

**3.1. La correspondance Gromov-Witten/Landau-Ginzburg.** Nous voulons calculer les invariants de Gromov-Witten de cette hypersurface. Cependant, nous avons des difficultés à définir ces invariants et encore davantage de difficultés à les manipuler. Une stratégie pour les contourner a été suggérée par Edward Witten. Il s'agit de non plus regarder les morphismes de courbes complexes vers cet orbifold mais de se concentrer sur des fibrés en droites sur les courbes complexes, avec certaines relations algébriques dictées par le polynôme  $W$  qui définit  $X$ . Nous appelons cela le modèle de Landau-Ginzburg. Les invariants qui seront définis dans ce cadre sont appelés *invariants de Fan-Jarvis-Ruan-Witten*. Il est attendu qu'il existe une dualité entre ce modèle et celui de la théorie de Gromov-Witten, et que nous puissions exprimer de façon simple les invariants de l'un à partir de ceux de l'autre. Mentionnons qu'il y a déjà un résultat établi par Alessandro Chiodo et YongBin Ruan dans [2] qui démontre cette conjecture pour la quintique, c'est-à-dire  $X = \{x_1^5 + \cdots + x_5^5 = 0\} \in \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ .

Tout ceci va nous motiver par la suite pour définir proprement le modèle de Landau-Ginzburg associé au polynôme  $W$ . Fixons  $g, n$  et  $l$  des entiers. Nous voulons prendre comme espace de modules l'ensemble des classes d'isomorphismes de  $N$ -uplets  $(L_1, \dots, L_N)$  où les  $L_i$  sont des fibrés en droites sur une même courbe marquée  $(C; x_1, \dots, x_n)$  de genre  $g$ , avec pour conditions supplémentaires

13. Rappelons que le symbole  $(2p+1)!!$  signifie  $\prod_{i=0}^p (2i+1)$ .

14. Il s'agit par définition du quotient de  $\mathbb{C}^N - \{0\}$  par l'action de  $\mathbb{C}^*$  donnée par  $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_N) = (\lambda^{w_1} x_1, \dots, \lambda^{w_N} x_N)$ . Nous remarquons que cette action possède des points fixes et que, par conséquent, les espaces projectifs à poids sont en général des orbifolds.

que

$$L_j^{\otimes l} = \omega_{\log}^{\otimes l q_j} \quad \text{et} \quad \bigotimes_{j=1}^N L_j^{\otimes m_{i,j}} = \omega_{\log}$$

où les égalités signifient « isomorphe à » et où le fibré en droites  $\omega_{\log}$  est le fibré cotangent (de la courbe) tensorisé par le diviseur des points marqués  $\sum_{i=1}^n [x_i]$ .

Il reste des zones d'ombres dans cette définition. Quel choix doit-on prendre pour  $l$ ? Quelles courbes  $C$  admettre? Seulement les courbes lisses, ou bien aussi les courbes nodales? Cela nous donnerait-il un orbifold compact, lisse et séparé?

Afin de mieux comprendre ces questions, concentrons-nous sur un cas très simple, le polynôme de Fermat  $x_1^N + \dots + x_N^N$ . Pour un tel polynôme, les fibrés en droites  $L_i$  n'ont pas de relations les uns avec les autres. Ainsi, nous allons juste considérer un seul fibré en droites  $L$  sur une courbe  $C$  de genre  $g$  avec  $n$  points marqués. C'est ce que nous appelons une structure de niveau.

**3.2. Les structures de niveau.** Fixons des entiers  $g, n, a$  et  $r$ . Prenons une courbe  $(C; x_1, \dots, x_n)$  de genre  $g$  avec  $n$  points marqués. Nous appelons *structure de niveau* sur  $C$  la donnée d'un fibré en droites  $L$  sur  $C$  et d'un isomorphisme  $\phi: L^{\otimes a} \rightarrow \omega_{\log}^{\otimes r}$ . Nous notons  $\mathcal{R}_{g,n}^{a,r}$  l'espace de modules qui en résulte. De plus, nous avons un morphisme  $f$  d'oubli de la structure de niveau, allant de  $\mathcal{R}_{g,n}^{a,r}$  vers  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ .

Nous regardons d'abord le cas où  $r = 0$ . Un tel fibré en droites est appelé une racine de l'unité puisque sa puissance  $a$ -ième doit être isomorphe au fibré trivial  $\mathcal{O}_C$ , qui joue le rôle d'unité dans le groupe de Picard<sup>15</sup> de  $C$ .

Pour  $a = 1$ , l'espace de modules cherché est  $\mathcal{R}_{g,n}^{1,0} = \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  donc nous devons au moins admettre pour  $(C; x_1, \dots, x_n)$  de prendre des courbes nodales stables. Ce choix suffit-il? Clairement oui pour  $a = 1$  mais voyons les autres cas.

Prenons une courbe nodale  $C$  avec un seul noeud et sans point marqué. Nous pouvons « défaire » ce noeud par l'opération de désingularisation. Nous obtenons une courbe lisse  $\tilde{C}$  avec deux points marqués  $x_\alpha$  et  $x_\beta$ . Par exemple, si  $C = \mathbb{C}\mathbb{P}^1/(0 = \infty)$ , alors  $\tilde{C} = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ,  $x_\alpha = 0$  et  $x_\beta = \infty$ .

Par définition, un fibré en droites sur une telle courbe  $C$  est alors la donnée d'un fibré en droites sur  $\tilde{C}$  avec une identification des droites au-dessus de  $x_\alpha$  et de  $x_\beta$ , c'est-à-dire la donnée d'un élément de  $\mathbb{C}^*$ .

Regardons de plus près l'exemple de  $C = \mathbb{C}\mathbb{P}^1/(0 = \infty)$  et prenons  $a = 2$  et  $n = 1$  (nous prenons  $x_1 = 1$  comme point marqué de  $C$ ). Soit  $L$  un fibré en droites sur  $C$  tel que  $L^{\otimes 2}$  soit trivial. Alors  $L$  doit être trivial en dehors du noeud et la donnée de recollement ne peut être que  $+1$  ou  $-1$ . Il y a donc deux solutions au problème. Prenons maintenant le tore  $C = \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ , muni du point marqué  $x_1 = 0$ . Nous savons que les fibrés en droites sont donnés par les diviseurs  $[x]$  avec  $x \in C$  et que l'opération de tensorisation entre fibrés correspond à la loi de groupe dans  $C$ . Nous cherchons donc à résoudre l'équation

$$2 \cdot (x + iy) \equiv 0 \quad [\mathbb{Z}^2].$$

Nous avons quatre solutions, données par  $0, 1/2, i/2$  et  $(1+i)/2$ .

Ainsi, les fibres du morphisme d'oubli  $f: \mathcal{R}_{1,1}^{2,0} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{1,1}$  ne sont pas de cardinal constant. Puisque  $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}$  est compact, nous ne pouvons pas en dire autant pour  $\mathcal{R}_{1,1}^{2,0}$ .

Dès que la courbe n'est plus lisse, il nous manque des points dans notre espace de modules. Nous devons donc admettre davantage de fibrés en droites.

Regardons bien ce qui se passe pour  $g = 0$  et  $r = 1$ . Les fibrés en droites sur  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  sont de la forme  $\mathcal{O}(p)$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et le produit tensoriel correspond à l'addition dans  $\mathbb{Z}$ . Le fibré canonique

15. Le groupe de Picard d'une variété est l'ensemble de ses fibrés en droites avec la loi de groupe donnée par le produit tensoriel.

est  $\mathcal{O}(-2)$  et donc  $\omega_{\log} = \mathcal{O}(n - 2)$ . Ainsi, nous cherchons à résoudre l'équation

$$a \cdot p = n - 2.$$

Cette équation a pour solution  $p = (n - 2)/a$ , qui peut ne pas être entier. Nous avons envie de considérer des fibrés en droites donnés par des diviseurs « rationnels », ou encore, si nous préférons, par des points qui comptent comme  $1/a$ . Ceci nous conduit naturellement à introduire des courbes orbifolds, munies de fibrés orbifolds.

Nous définissons finalement l'espace de modules  $\mathcal{R}_{g,n}^{a,r}$  comme l'ensemble des classes d'isomorphismes des triplets  $(L, (C; x_1, \dots, x_n), \phi)$  avec

- $C$  est une courbe nodale stable orbifold avec des stabilisateurs triviaux en dehors des points marqués et des noeuds, et des stabilisateurs  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  sur les points marqués  $x_i$  et sur les noeuds.
- au voisinage d'un point marqué  $x_i$ , en coordonnées centrées sur  $x_i$ , l'action de  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  est engendrée par  $z \mapsto \zeta_a z$  avec  $\zeta_a$  une racine primitive de l'unité d'ordre  $a$
- au voisinage d'un noeud, en coordonnées centrées sur le noeud, l'action de  $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$  est engendrée par  $(x, y) \mapsto (\zeta_a x, \zeta_a^{-1} y)$ .
- $L$  est un fibré en droites sur  $C$
- $\phi$  est un isomorphisme entre  $L^{\otimes a}$  et  $\omega_{\log}^{\otimes r}$ .

L'ensemble  $\mathcal{R}_{g,n}^{a,r}$  ainsi défini admet une structure orbifold de dimension complexe  $3g - 3 + n$ . De plus, il est lisse, compact, séparé et est un revêtement de l'espace de modules des courbes (orbifolds) stables.

Pour finir, essayons de comprendre ce qu'est un fibré en droites sur une courbe orbifold et pourquoi cela résout-il notre problème. Nous savons que localement un orbifold est la donnée d'un ouvert muni d'une action par un groupe fini. Dans notre cas, nous avons déjà décrit l'action, au voisinage des points marqués et au voisinage des noeuds<sup>16</sup>. Localement, un fibré en droites sur une telle courbe est la donnée d'un fibré en droites muni d'un relevé de l'action. Par exemple, en coordonnées locales centrées sur un noeud, un fibré en droites est donné par  $(x, y, \lambda)$  muni de l'action  $(x, y, \lambda) \mapsto (\zeta_a x, \zeta_a^{-1} y, \zeta_a^k \lambda)$ . De même, au voisinage d'un point marqué  $x_i$ , nous avons l'action  $(z, \lambda) \mapsto (\zeta_a z, \zeta_a^{m_i} \lambda)$ . Les valeurs de  $k$  sur chaque noeud et des  $m_i$  sont des données supplémentaires à prendre en compte pour un fibré sur une courbe orbifold par-rapport à un fibré sur une simple courbe.

De plus, il est facile de comprendre comment se comporte un tel fibré par produit tensoriel : par exemple, si l'action de  $L$  au-dessus de  $x_i$  est donnée par  $(z, \lambda) \mapsto (\zeta_a z, \zeta_a^{m_i} \lambda)$ , alors l'action de  $L^{\otimes 2}$  au-dessus de  $x_i$  sera donnée par  $(z, \lambda) \mapsto (\zeta_a z, \zeta_a^{2m_i} \lambda)$ .

Revenons à notre exemple  $C = \mathbb{CP}^1/(0 = \infty)$ ,  $a = 2$  et  $r = 0$  pour conclure. Nous avons placé une structure orbifold sur  $C$  en plaçant un stabilisateur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  sur le noeud et sur le point marqué  $x_1 = 1$ . Nous rappelons que nous avons deux fibrés en droites racines de l'unité, donnés par le fibré trivial sur  $\mathbb{CP}^1$  avec la donnée de recollement  $+1$  ou  $-1$  au-dessus du noeud. Nous devons maintenant relever l'action à chacun de ces fibrés. Nous avons quatre choix pour chaque fibré, donnés par  $(m_1, k) = (0, 0), (0, 1), (1, 0)$  et  $(1, 1)$ . Au total, nous avons donc 8 points dans notre espace de modules.

Pour le tore  $C = \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ , nous avons quatre fibrés en droites et nous avons deux choix pour chacun pour relever l'action, à savoir  $x_1 = 0$  ou  $x_1 = 1$ . Au total, nous avons également 8 points dans notre espace de modules.

Ainsi, nous pouvons être rassurés sur le fait qu'en admettant des courbes avec une structure orbifold comme décrite ci-dessus, nous avons rajouté le bon nombre de points manquants dans notre espace de modules.

---

16. Pour les autres voisinages, nous rappelons que l'action est triviale.

**3.3. Conclusion.** La sous-section sur les structures de niveau permet de mieux comprendre le modèle de Landau-Ginzburg. En particulier, les courbes dont il est question dans ce modèle sont des courbes nodales stables orbifold et les fibrés qui définissent l'espace de modules sont des fibrés en droites sur ces courbes, avec les relations algébriques souhaitées.

L'espace de modules  $W_{g,n}$  associé au polynôme quasi-homogène  $W$  est un orbifold lisse de dimension complexe  $3g - 3 + n$  et est donc plus facile à manipuler que l'orbifold  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$  qui est dangereusement singulier. Nous pouvons définir les invariants de Fan-Jarvis-Ruan-Witten avec des méthodes similaires à celles qui ont été proposées dans la seconde section. Nous voyons en particulier réapparaître des classes  $\psi_i$  mais il reste une zone d'ombre autour des classes  $\lambda_k$  qui ne sont définies que de façon « virtuelle ».

L'objectif de mon sujet de recherche est dans un premier temps d'éclaircir la définition de  $\lambda_k$  dans les « mauvais cas », que nous appelons *non concaves*. Dans un deuxième temps, j'essaierai de développer une technique de calcul similaire à celle de la section 2, afin d'être en mesure de donner les valeurs de tous les invariants de façon récursive. Enfin, dans un troisième temps, j'étudierais la correspondance avec la théorie de Gromov-Witten afin de voir ce que la méthode de calcul peut nous apprendre sur la détermination des invariants de Gromov-Witten et le calcul de la cohomologie quantique des variétés.

#### RÉFÉRENCES

- [1] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip A. Griffiths. *Geometry of Algebraic Curves. Volume II* - Volume 268 Springer-Verlag, N.Y.
- [2] Alessandro Chiodo, Yong-Bin Ruan. *Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence for quintic three-folds via symplectic transformations*. - arXiv :math/0812.4660
- [3] Alessandro Chiodo. *Des structures de niveau à la symétrie miroir globale*. - Thèse d'Habilitation à Diriger des Recherches.
- [4] Jérémy Guéré. *Calculs des nombres d'intersection dans l'espace de modules des courbes stables*. - Mémoire de Master 2.
- [5] Kentaro Hori, Sheldon Katz, Albrecht Klemm, Rahul Pandharipande, Richard Thomas, Cumrun Vafa, Ravi Vakil, Eric Zaslow. *Mirror Symmetry*. - Clay Mathematics Monographs. Chap. 21 à 27.
- [6] Maxim Kontsevich. *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*. - Communications in Mathematical Physics vol. 147 (1992), pages 1 – 23.
- [7] David Mumford. *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curve*. - Arithmetic and Geometry II (M. Artin and J. Tate eds). Progress in Mathematics 36, Birkhäuser, Boston, 1983, pp. 271 – 328.
- [8] Edward Witten. *Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space*. - Surveys in Differential Geometry, vol. 1 (1991), p. 243 – 310.
- [9] Dimitri Zvonkine. *An introduction to moduli spaces of curves and its intersection theory*. - Ecole d'été de l'institut Fourier de Grenoble. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/Course-notes,1097.html>