

# Systèmes dynamiques et billards polygonaux

Alexandre Kikolski et François Guéritaud

15 juin 2001

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Billards mathématiques . . . . .	2
1.2	Réduction à un système à temps discret et conservation de la mesure d'aire . . . . .	2
1.3	La transformation du billard dans l'espace des rayons du plan . .	3
1.4	Le langage de la géométrie symplectique . . . . .	5
1.5	Propriétés symplectiques du billard . . . . .	7
1.6	Le théorème de récurrence de Poincaré . . . . .	11
1.7	Propriétés stochastiques des systèmes dynamiques . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Billards polygonaux</b>	<b>16</b>
2.1	Développement des trajectoires . . . . .	16
2.2	Le billard carré . . . . .	16
2.3	Codage des trajectoires dans un billard carré . . . . .	18
2.4	Fonction de complexité . . . . .	20
2.5	Stabilité des trajectoires périodiques dans des polygones généraux	21
2.6	Réalisation d'une trajectoire de code donné . . . . .	23
2.7	Polygones rationnels . . . . .	26
2.8	Un théorème de finitude . . . . .	29
2.9	Un contre-exemple . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Annexes</b>	<b>32</b>
3.1	Un théorème de densité . . . . .	32
3.2	Qu'est-ce que c'est? . . . . .	37
	<b>Références</b>	<b>37</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Billards mathématiques

Une table de billard est une variété riemannienne  $M$  dont le bord est lisse par morceaux. Le système dynamique du billard est généré par le mouvement libre d'un point matériel (la boule de billard) soumis à des réflexions élastiques sur le bord. C'est-à-dire que le point se déplace le long d'une géodésique de  $M$  à vitesse constante (prenons-la unitaire) jusqu'à ce qu'il rencontre le bord. En un point régulier du bord, la boule repart de sorte que sa vitesse ait même composante tangentielle et une composante normale changée en son opposée (lois de l'optique géométrique). Si la boule rencontre un coin, sa trajectoire n'est plus définie.

La transformation du billard  $T_t$  agit sur les couples  $(x, \vec{v})$  où  $x \in M$ ,  $\vec{v} \in T_x M$ ,  $\|\vec{v}\| = 1$ , dont la trajectoire effectue un nombre fini de réflexions et ne rencontre aucun coin durant l'intervalle de temps  $[0, t]$ . L'espace des phases est le fibré tangent unitaire de  $M$ , et l'espace des configurations est la variété  $M$ .

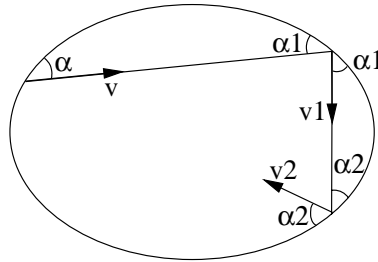
## 1.2 Réduction à un système à temps discret et conservation de la mesure d'aire

On a défini les billards comme des systèmes dynamiques à temps continu, on peut en fait réduire le problème à un système à temps discret.

Soit  $M$  une table de billard plane et bornée. Considérons la variété  $V$  des vecteurs unitaires tangents  $(x, \vec{v})$  où  $x \in \partial M$ , et  $\vec{v}$  pointe vers l'intérieur de  $M$ . Si le bord a une seule composante connexe, alors  $V$  est un cylindre  $\mathbb{S}^1 \times I$ .

Définissons la transformation du billard  $T$  sur  $V$ . Un vecteur  $(x, \vec{v}) \in V$  se déplace en ligne droite dans la direction de  $v$  jusqu'au point d'intersection  $x_1$  avec  $\partial M$ , et  $\vec{v}$  se réfléchit sur  $\partial M$  en un nouveau vecteur  $\vec{v}_1$ . On pose  $T(x, \vec{v}) = (x_1, \vec{v}_1)$ .

Une propriété très remarquable de  $T$  est l'existence d'une mesure d'aire invariante par  $T$ . Paramétrons  $\partial M$  par la longueur  $t$ , et notons  $\alpha$  l'angle entre  $\vec{v}$  et la direction du bord en  $x(t)$ ,  $\alpha \in [0, \pi]$ . Utilisons sur  $V$  les coordonnées  $(t, \alpha)$ .



**Proposition** – La forme  $\sin \alpha \, d\alpha \wedge dt$  est préservée par  $T$

*Preuve.* Soit  $T(t, \alpha) = (t_1, \alpha_1)$

On veut montrer que

$$\sin \alpha \, d\alpha \wedge dt = \sin \alpha_1 \, d\alpha_1 \wedge dt_1$$

Soit  $H(t, t_1)$  la distance entre les points  $x(t)$  et  $x(t_1)$ . On a facilement que

$$\frac{\partial H(t, t_1)}{\partial t} = -\cos \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial H(t, t_1)}{\partial t_1} = \cos \alpha_1.$$

Il vient

$$(\cos \alpha)dt - (\cos \alpha_1)dt_1 = \frac{\partial H(t, t_1)}{\partial t_1}dt + \frac{\partial H(t, t_1)}{\partial t}dt = dH$$

et en passant aux différentielles :

$$(\sin \alpha_1)d\alpha_1 \wedge dt_1 - (\sin \alpha)d\alpha \wedge dt = 0 \quad \square$$

**Remarque.** On a vu que

$$\frac{\partial H(t, t_1)}{\partial t_1} = \cos \alpha_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H(t_1, t_2)}{\partial t_1} = -\cos \alpha_1$$

d'où

$$\frac{\partial H(t, t_1)}{\partial t_1} + \frac{\partial H(t_1, t_2)}{\partial t_1} = 0$$

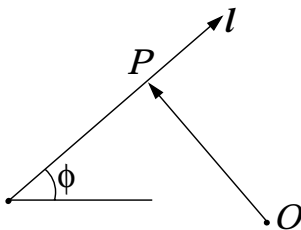
On peut faire de cette formule l'interprétation suivante. Supposons que l'on veuille lancer la boule de billard d'un point  $x$  de sorte qu'après une réflexion sur le bord, disons en un point  $x_1$ , elle arrive au point donné  $x_2$ . Comment choisir le point inconnu  $x_1$  ?

Réponse :  $x_1$  est un point critique de la fonction  $dist(x, x_1) + dist(x_1, x_2)$ . Ce principe variationnel joue un rôle important dans l'étude des billards.

### 1.3 La transformation du billard dans l'espace des rayons du plan

Il serait plus dans l'esprit de l'optique géométrique de travailler avec des droites orientées, c'est-à-dire des rayons. Une telle approche des billards est possible et raisonnable.

Soit une table de billard  $M$  plane et convexe. Soit  $U$  l'ensemble des droites orientées du plan qui passent par  $M$ . Pour paramétrer cet ensemble de rayons, on se donne un point  $O$  dans  $M$  et une direction fixée du plan. Pour un rayon donné  $l$ , on appelle  $P$  le projeté orthogonal de  $O$  sur  $l$ , et  $\phi$  l'angle entre  $l$  et la direction fixée. Soit  $p = \pm|OP|$  suivant l'orientation du repère  $(l, \vec{OP})$ . Alors  $(p, \phi)$  sont les coordonnées sur l'espace des rayons du plan. L'ensemble  $U$  est donné par l'inégalité  $|p| \leq f(\phi)$ , où  $f$  dépend de la forme de  $M$ . Il s'ensuit que  $U$  est difféomorphe à un cylindre.



Définissons la transformation du billard  $T'$  sur  $U$  : un rayon qui contient un segment de la trajectoire de la boule de billard, orienté dans le sens de la trajectoire, est envoyé sur le rayon qui contient le segment suivant de trajectoire après une réflexion sur le bord.

Il existe à un facteur scalaire près une unique forme d'aire sur l'espace des rayons, invariante sous l'action de  $T'$  ; c'est la 2-forme  $dp \wedge d\phi$ .

Identifions  $U$  et  $V$  rencontrés précédemment : au rayon passant par  $x$  et de direction  $v$  correspond le vecteur  $(x, v) \in V$ . On identifie alors les transformations  $T$  et  $T'$ . Et on peut comparer les formes  $(\sin \alpha)d\alpha \wedge dt$  et  $dp \wedge d\phi$ .

**Proposition** – Ces deux formes sont égales.

*Preuve.* Un rayon de coordonnées  $(p, \phi)$  dans  $U$  admet pour équation :

$$y \cos \phi - x \sin \phi = p.$$

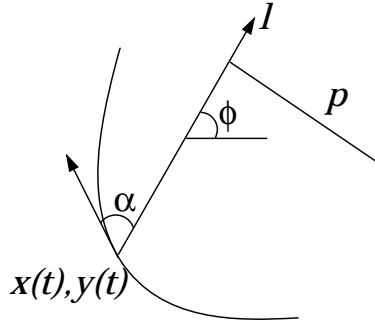
En passant aux différentielles, on obtient :

$$\cos \phi \, dy - \sin \phi \, dx - (y \sin \phi + x \cos \phi) d\phi = dp$$

d'où

$$\cos \phi \, dy \wedge d\phi - \sin \phi \, dx \wedge d\phi = dp \wedge d\phi$$

L'angle entre la direction de  $\partial M$  au point  $(x(t), y(t))$  et la direction fixe est  $\alpha + \phi$ .



Alors, on a

$$dy = \cos(\alpha + \phi)dt, \quad dx = \sin(\alpha + \phi)dt.$$

D'où

$$(\cos \phi \sin(\alpha + \phi) - \sin \phi \cos(\alpha + \phi))dt \wedge d\phi = \sin \alpha dt \wedge d\phi = dp \wedge d\phi.$$

Comme  $(\alpha + \phi)(t)$  est une mesure de l'angle que fait le vecteur directeur de  $\partial M$  en  $(x(t), y(t))$  avec la direction fixe, on sait que la courbure de  $\partial M$  est donnée par

$$K(t) = d(\alpha + \phi)/dt.$$

On a donc

$$d\phi = -d\alpha + K dt$$

Donc

$$dt \wedge d\phi = dp \wedge d\phi \quad \square$$

Il s'ensuit que  $T'$  préserve la forme d'aire naturelle de l'espace des rayons du plan.

## 1.4 Le langage de la géométrie symplectique

Le bon contexte pour parler des observations précédentes, et les généraliser en dimension supérieure, est celui de la géométrie symplectique.

**Définition** – Une *variété symplectique*  $(M, \omega)$  est une variété lisse  $M$  munie d'une 2-forme  $\omega$  fermée et non dégénérée, appelée la *structure symplectique*.

Comme la 2-forme est non dégénérée, la dimension de  $M$  est nécessairement paire.

**Exemple.**  $\mathbb{R}^{2n}$  où les coordonnées sont notées  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  peut être muni de la structure symplectique

$$dx \wedge dy = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n.$$

Contrairement aux variétés riemanniennes, les variétés symplectiques de même dimension sont localement équivalentes : il existe toujours un difféomorphisme local qui envoie une forme symplectique sur une autre (c'est le théorème de Darboux). L'exemple précédent procure donc une forme locale canonique. Les coordonnées  $x, y$  dans lesquelles  $\omega = dx \wedge dy$  sont appelées les *coordonnées de Darboux*.

L'exemple suivant est important pour la théorie des billards.

**Exemple.** Le fibré cotangent  $T^*M$  d'une variété  $M$  possède une structure symplectique canonique. Définissons la 1-forme  $\lambda$  sur la variété  $T^*M$ . Soit  $(q, p) \in T^*M$ , i.e.  $q \in M, p \in T_q^*M$ . Soit  $\xi$  tangent à  $T^*M$  en  $(q, p)$ , i.e.  $\xi \in T_{(q, \bar{p})}(T^*M)$ . De la projection  $T^*M \rightarrow M$ , avec  $(q, p) \mapsto q$ , on déduit naturellement une projection entre les espaces tangents  $\pi : T_{(q, \bar{p})}(T^*M) \rightarrow T_qM$ . La valeur de  $\lambda(q, p)$  sur  $\xi$  est la valeur du covecteur  $p \in T_q^*M$  sur  $\pi(\xi) \in T_qM$ . La structure symplectique canonique sur  $T^*M$  est la 2-forme  $\omega = d\lambda$ .

Sur  $T^*M$ , si  $q_1, \dots, q_n$  sont les coordonnées locales de position, et  $p_1, \dots, p_n$  les coordonnées locales de moment cinétique, alors

$$\lambda = pdq = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n,$$

$$\omega = dp \wedge dq = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n.$$

Une variété symplectique possède une forme volume canonique :  $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ .

**Définition** – Un difféomorphisme entre variétés symplectiques qui envoie une structure symplectique sur une autre est appelé un *symplectomorphisme*.

**Définition** – Une variété symplectique est dite *exacte* si sa structure symplectique est la différentielle d'une 1-forme :  $\omega = d\lambda$ .

**Exemple.** Les fibrés tangents sont des variétés symplectiques exactes.

Soit  $T$  un symplectomorphisme d'une variété symplectique exacte sur elle-même. Alors  $T^*\omega = \omega$ , ou encore  $d(T^*\lambda - \lambda) = 0$ .

**Définition** – Un symplectomorphisme est dit *exact* si la 1-forme fermée  $(T^*\lambda - \lambda)$  est exacte :

$$(T^*\lambda - \lambda) = dH$$

pour une fonction  $H$ . La fonction  $H$  est appelée la *fonction génératrice* du symplectomorphisme.

Une structure symplectique permet de définir un isomorphisme entre le fibré tangent  $TM$  et le fibré cotangent  $T^*M$ . Si  $f$  est une fonction sur  $M$ , sa différentielle est une section du fibré cotangent. On peut donc lui associer une section du fibré tangent. Le champ de vecteur ainsi obtenu est appelé le *gradient symplectique* et noté  $sgrad f$ . En fait le gradient symplectique est défini par

$$df = i_{(sgrad f)}\omega \quad \text{i.e.} \quad \forall \xi \in T_qM, \quad df(q)\xi = \omega_q((sgrad f)(q), \xi).$$

Si on se donne une hypersurface  $Z$  (sous-variété de codimension 1) d'une variété symplectique  $X$ , la restriction à  $Z$  de la structure symplectique  $\omega$  devient dégénérée : dans chaque hyperplan tangent à  $Z$ , son noyau est de dimension 1.

**Définition** – Ce noyau est appelé la *direction caractéristique* au point de  $Z$  considéré. On obtient ainsi un champ de directions sur  $Z$ . Les courbes intégrales de ce champ de directions sont appelées les *courbes caractéristiques* de  $Z$ , ou plus simplement les caractéristiques de  $Z$ . L'ensemble  $V$  des caractéristiques de  $Z$  a une structure de variété.

On peut munir  $V$  d'une structure symplectique  $\bar{\omega}$  : Soit  $\Gamma$  un champ de vecteur sur  $Z$  engendrant le champ des directions, et soit  $\Phi_t$  le flot sur  $Z$  correspondant. Le champ des directions est évidemment invariant sous l'action de  $\Phi_t$ . Et  $\omega$  est aussi invariante sous l'action de  $\Phi_t$  car par la formule de Cartan

$$L_\Gamma\omega = i_\Gamma(d\omega) + d(i_\Gamma\omega) = 0$$

car  $d\omega = 0$  et  $i_\Gamma\omega = \omega(\Gamma, \cdot) = 0$ .

Un point  $c$  de  $V$  est la classe des points  $m$  de la caractéristique  $c$ . Appelons  $\tau$  le sous-fibré de  $TZ$  des vecteurs tangents à  $Z$  d'origine sur  $c$ . Un élément  $\bar{\xi}$  de  $T_cV$  est la classe des éléments  $(m, \xi)$  du fibré  $\tau$  quotienté par son sous-fibré  $Tc$  et par l'action de  $\Phi_t$ . Autrement dit, si  $(m, \xi), (m', \xi') \in \tau$ , en posant  $m' = \Phi_t(m)$ ,

$$[(m, \xi)] = [(m', \xi')] \iff \xi' - (\partial_m \Phi_t)(\xi) \in \ker \omega_{m'}$$

Alors, pour  $c \in V$ , et  $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in T_cV$ , on choisit un point  $m \in c$ , et des représentants  $(m, \xi), (m, \eta) \in \tau$ . On pose

$$\bar{\omega}_c(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \omega_m(\xi, \eta)$$

Montrons que le résultat ne dépend pas du choix des représentants  $m, (m, \xi)$  et  $(m, \eta)$  choisis. Si  $m', (m', \xi')$  et  $(m', \eta')$  sont d'autres représentants, alors si  $m' = \Phi_t(m)$ ,

$$\xi' = (\partial_m \Phi_t)(\xi) + \alpha\Gamma(m')$$

$$\eta' = (\partial_m \Phi_t)(\eta) + \beta\Gamma(m')$$

D'où

$$\begin{aligned} \omega_{m'}(\xi', \eta') &= \omega_{m'}((\partial_m \Phi_t)(\xi) + \alpha\Gamma(m'), (\partial_m \Phi_t)(\eta) + \beta\Gamma(m')) \\ &= \omega_{\Phi_t(m)}((\partial_m \Phi_t)(\xi), (\partial_m \Phi_t)(\eta)) \\ &= (\Phi_t^*\omega)_m(\xi, \eta) \\ &= \omega_m(\xi, \eta) \end{aligned}$$

## 1.5 Propriétés symplectiques du billard

Nous sommes désormais en mesure de reconsidérer les résultats des sections 1.2-1.3. Considérons une variété riemannienne bornée strictement convexe  $M$ , avec un bord lisse  $\partial M$  dans un espace euclidien de dimension  $n$ . Ce sera notre table de billard. En général, les résultats de cette section sont vrais localement.

Posons  $X = T^*M$  muni de sa structure symplectique

$$\omega = dp \wedge dq = -dq \wedge dp = -(dq_1 \wedge dp_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n).$$

Si

$$\begin{aligned} q &= (q_1, \dots, q_n) & \vec{p} &= (p_1, \dots, p_n) \\ q' &= (q'_1, \dots, q'_n) & \vec{p}' &= (p'_1, \dots, p'_n) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \omega((q, p), (q', p')) &= -[(q_1 p'_1 - p_1 q'_1) + \dots + (q_n p'_n - p_n q'_n)] \\ &= -\left\langle \begin{array}{c} q \\ p \end{array} \middle| \begin{array}{c} q' \\ p' \end{array} \right\rangle \end{aligned}$$

où

$$\left\langle \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \middle| \begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right\rangle = x \cdot y' - y \cdot x'$$

et  $\cdot$  est le "produit scalaire". Identifions les fibrés tangents et cotangents au moyen de la structure euclidienne induite sur  $M$ . Alors  $TM$  hérite de la structure symplectique de  $T^*M$ .

Deux hypersurfaces de  $T^*M$  ont une importance particulière : celle des (co)vecteurs unitaires, et celle des (co)vecteurs dont l'origine est sur le bord  $\partial M$ . Appelons-les respectivement  $Y$  et  $Z$ . Leur intersection  $W$  consiste en les (co)vecteurs unitaires d'origine sur  $\partial M$ . Cette intersection est transverse.

Intéressons-nous aux caractéristiques de  $Y$  et de  $Z$ .

**Proposition** – Les caractéristiques de  $Y$  sont les géodésiques orientées de  $M$ .

Une géodésique orientée sur  $M$  est une courbe paramétrée sur  $M$ . En normalisant le vecteur vitesse de cette courbe, on peut la considérer comme une courbe de points  $(q, \vec{p})$  de  $Y$ . C'est ce que l'on fait. Pour montrer que cette géodésique est une courbe caractéristique, il suffit de montrer qu'en un point  $(q, \vec{p}) \in Y$  son vecteur directeur, qui est un élément de  $T_{(q, \vec{p})}Y$ , dirige le noyau de la restriction de  $\omega$  à  $Y$ .

On a les injections suivantes :

$$M \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad Y \longrightarrow TM \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

D'où  $T_{(q, \vec{p})}Y$  peut s'identifier à un espace affine de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Un vecteur de  $T_{(q, \vec{p})}Y$  peut donc s'écrire

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix}$$

avec  $\delta q \in T_q M$ , et  $\delta p$  orthogonal à  $p$  car sur  $Y$ ,  $\|p\| = 1$ .

De la même manière, un vecteur directeur de la géodésique s'écrit

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

avec  $n$  orthogonal à  $T_q M$  car le long d'une géodésique, le vecteur vitesse normé ne peut varier qu'orthogonalement à la variété.

Calculons :

$$\begin{aligned} \omega_{(q,p)} \left[ \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta q \\ \delta p \end{pmatrix} \right] &= -\alpha \left\langle \begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \delta q \\ \delta p \end{matrix} \right\rangle \\ &= \alpha(\delta q \cdot n - \delta p \cdot p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout vecteur de  $T_{(q,\vec{p})} Y$ , on a le resultat annoncé.  $\square$

Soit  $U$  la variété des caractéristiques de  $Y$ .  $U$  s'identifie donc aux géodésiques orientées de  $M$ , c'est-à-dire aux rayons de  $M$ .

Passons aux caractéristiques de  $Z$ . Il y a une projection naturelle  $\pi : Z \rightarrow T(\partial M)$  : si  $(q, \vec{p}) \in Z$ , i.e  $q \in \partial M, \vec{p} \in T_q M$ , on pose  $\pi(q, \vec{p}) = (q, \tilde{\pi}(\vec{p}))$  où  $\tilde{\pi} : T_q M \rightarrow T_q(\partial M)$  est la projection orthogonale euclidienne sur un hyperplan.

**Proposition** – Les caractéristiques de  $Z$  sont les fibres de  $\pi$ . Plus précisément, la caractéristique de  $Z$  passant par  $(q, \vec{p})$  est la fibre  $\pi^{-1}(q, \tilde{\pi}(\vec{p}))$  (cf figure 1).

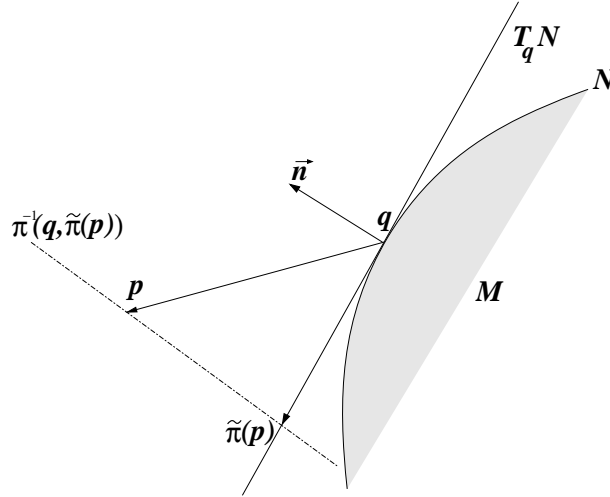


FIG. 1: On note  $N = \partial M$

*Preuve.* Soit  $(q, \vec{p}) \in Z$ , i.e  $q \in \partial M, \vec{p} \in T_q M$ .

Pour montrer que cette fibre est une courbe caractéristique, il suffit de montrer que son vecteur directeur, tangent à  $Z$ , dirige le noyau de la restriction de  $\omega$  à  $Z$ .

De la même manière que dans le paragraphe précédent, on identifie  $T_{(q,\vec{p})} Z$  à un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Soit  $\vec{n} \in T_q M$  l'orthogonal de  $T_q(\partial M)$  dans  $T_q M$ .



On a

$$\pi^{-1}(q, \tilde{\pi}(\vec{p})) = \{(q, \vec{p} + t\vec{n}), t \in \mathbb{R}\}.$$

Un vecteur tangent à la fibre en  $(q, \vec{p})$  peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{n} \end{pmatrix}$$

Un vecteur de  $T_{(q, \vec{p})}Z$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_q \\ \delta_p \end{pmatrix}$$

où

$$(\delta_q, \delta_p) \in T_q(\partial M) \times T_q M.$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \omega_{(q, p)} \left[ \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_q \\ \delta_p \end{pmatrix} \right] &= -\alpha \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{n} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \delta_q \\ \delta_p \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \alpha \vec{n} \cdot \delta_q \\ &= 0 \end{aligned}$$

car  $\delta_q \in T_q(\partial M)$  et  $\vec{n} \in T_q(\partial M)^\perp$ .

Ceci étant vrai pour tout vecteur tangent à  $Z$ , on a bien le résultat annoncé.  $\square$

Soit  $V$  la variété des caractéristiques de  $Z$ . C'est  $Z$  quotienté par ses caractéristiques, c'est-à-dire les fibres de  $\pi$  : c'est donc exactement  $T(\partial M)$ . Et l'identification  $V = T(\partial M) = T^*(\partial M)$  transporte une structure symplectique sur une autre.

L'image  $\tilde{V}$  de l'application composée  $W \xrightarrow{i} Z \xrightarrow{\pi} V$  est le sous-ensemble de  $T(\partial M)$  où les vecteurs sont pris dans le disque unitaire.  $\tilde{V}$  peut être identifié avec l'ensemble des vecteurs d'origine sur  $\partial M$ , et qui pointent à l'intérieur de  $M$ , comme sur la figure 2.

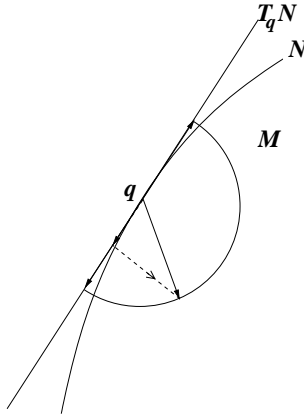


FIG. 2: Identification des vecteurs de  $\tilde{V}$  avec les vecteurs rentrants en  $N = \partial M$

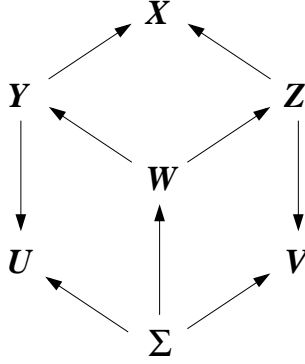


FIG. 3: Résumé de la situation : on a  $\dim X = 2n, \dim Y = \dim Z = 2n - 1, \dim W = \dim U = \dim V = 2n - 2$ .

Soit  $\Sigma \subset W$  l'ensemble des points où la restriction de  $\omega$  à  $W$  dégénère. On a le diagramme commutatif de la figure 3.

**Remarque.** Ce diagramme est valable dans la situation générale où  $(X, \omega)$  est une variété symplectique;  $Y$  et  $Z$  deux hypersurfaces d'intersection transverse  $W$ ;  $U$  et  $V$  les espaces des caractéristiques de  $Y$  et  $Z$ ; et  $\Sigma$  l'ensemble des points où la restriction de  $\omega$  à  $W$  est dégénérée.

**Proposition** –  $\Sigma$  est l'ensemble des points critiques de l'application  $W \rightarrow U$ . C'est aussi vrai pour l'application  $W \rightarrow V$ .

*preuve.*  $W \rightarrow U$  est la restriction du quotient par les caractéristiques. Un point de  $W$  est critique si et seulement si la caractéristique passant par ce point est tangente à  $W$ .

En un tel point, la direction caractéristique est évidemment contenue dans le noyau de  $\omega|_W$ , qui est donc dégénérée. Inversement, plaçons-nous en un point de  $\Sigma$ . Soit  $\xi \in \ker \omega|_W$  et soit  $\eta$  un vecteur caractéristique de  $Y$  en ce point. Supposons par l'absurde que  $\eta$  n'est pas tangent à  $W$ . On a  $\omega(\xi, \eta) = 0$ , et comme  $\omega(\xi, \cdot)$  s'annule déjà sur l'espace tangent à  $W$ , elle est nulle partout, et  $\xi$  est caractéristique :  $\eta$  est donc colinéaire à  $\xi$ , ce qui est absurde. Donc  $\eta$  est bien tangent à  $W$ .

$W \rightarrow V$  est la projection parallèlement aux caractéristiques, donc un point est critique si et seulement si la caractéristique passant par ce point est tangente à  $W$ . Le résultat est donc le même.  $\square$

Dans le cas des billards, on voit facilement que  $\Sigma$  est constituée des vecteurs unitaires tangents à  $\partial M$ .

On peut définir deux involutions sur  $W$ ; tout point de  $U$  a deux antécédents par  $W \rightarrow U$ : le vecteur "source" de la géodésique orientée et son vecteur "but". Il en est de même pour  $W \rightarrow V$ . Appelons  $\sigma$  et  $\tau$  les involutions de  $W$  qui échangent les préimages d'un point. Elles ont le même ensemble de points fixes :  $\Sigma$ . L'application du billard sur  $W$  est la composée  $\tau\sigma$ , comme on le voit sur la figure 4.

Les résultats des sections 1.2-1.3 vont désormais découler de remarques presque tautologiques.

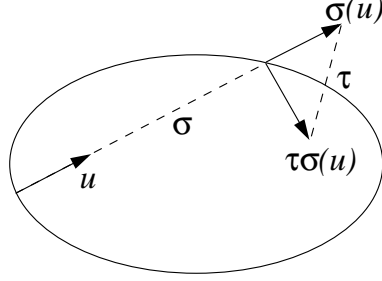


FIG. 4: La transformation du billard sur  $W$

**Proposition** – Les projections  $W \rightarrow U$  et  $W \rightarrow V$  préservent les structures symplectiques en dehors de  $\Sigma$ . Les involutions  $\sigma$  et  $\tau$  préservent  $\omega|_W$ .

*Preuve.* La première assertion provient du fait que les quatre flèches mises en jeu dans le diagramme préservent les structures symplectiques quand elles sont bien définies.

Donnons-nous deux vecteurs  $\xi$  et  $\eta$  tangents à  $W$  en un point  $(q, \vec{p})$ . On a

$$\omega(\xi, \eta) = \omega(\sigma_*(\xi), \sigma_*(\eta))$$

car ces deux couples de vecteurs sont deux relevés du même couple de vecteurs tangents à la variété  $U$ . Le même raisonnement s'applique pour  $\tau$ . Ceci montre donc la seconde assertion.  $\square$

On peut maintenant définir les transformations du billard  $T : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$  et  $T' : U \rightarrow U$ .

Définissons  $T$ . Soit  $v$  un vecteur tangent à  $\partial M$  de longueur inférieure à 1, c'est-à-dire un point de  $\tilde{V}$ . Considérons le vecteur tangent à  $M$  qui se projette sur  $v$  et qui est rentrant : c'est l'une des deux préimages de  $v$  par  $W \rightarrow \tilde{V}$ . Appliquons-lui  $\sigma$  (déplacement jusqu'à la frontière), puis projetons sur  $U$ .  $T(v)$  est le vecteur obtenu.

Définissons de même  $T'$ . Soit un rayon  $l$  de  $M$ , c'est-à-dire un point de  $U$ . Considérons le vecteur unitaire directeur de  $l$  au second point d'intersection de  $l$  avec  $\partial M$  : c'est l'une des deux préimages de  $l$  par  $W \rightarrow U$ . Appliquons-lui  $\tau$  (réflexion sur la frontière), et projetons sur  $U$ .  $T'(l)$  est le rayon obtenu.

Il découle de la proposition précédente que  $T$  et  $T'$  préserve les structures symplectiques de  $\tilde{V}$  et  $U$ . Elles conservent donc aussi les volumes symplectiques. Mentionnons aussi que  $T$  et  $T'$  sont conjugués par le difféomorphisme naturel entre  $U$  et  $V'$ .

## 1.6 Le théorème de récurrence de Poincaré

Dans cette section, un système dynamique est un espace métrique **compact**  $X$  sur lequel  $\mathbb{Z}$  agit continûment. On notera  $T$  l'action de 1. Le point de départ de notre discussion est la définition suivante :

**Définition** – Soit  $T$  une application continue d'un espace topologique  $X$  dans lui-même. Un point  $x \in X$  est dit *récurrent* pour  $T$  (ou pour le système dynamique  $(X, T)$ ) si pour tout voisinage  $V \ni x$ , il existe  $n \geq 1$  avec  $T^n x \in V$ . En utilisant le lemme de Zorn, on a le résultat suivant :

**Théorème 1** *Si  $T$  est une application continue d'un espace compact  $X$  dans lui-même, l'ensemble des points récurrents est non vide.*

*Preuve.* Considérons la famille  $F$  des parties fermées  $\emptyset \neq Y \subset X$  telles que  $TY \subset Y$ , ordonnées par l'inclusion. Alors  $F$  a un élément minimal. En effet, si on a une chaîne totalement ordonnée de tels ensembles, leur intersection est non vide et encore dans  $F$ . Le lemme de Zorn s'applique alors et fournit un élément minimal. Appelons-le  $Y_0$ . Montrons que tout point de  $Y_0$  est récurrent. Si  $x \in Y_0$ , soit  $Y = \overline{\{T^n x, n \geq 1\}}$ . On a  $Y \subset Y_0$ , car  $Y_0$  est fermé et invariant par  $T$ . Mais il en est de même de  $Y$ , donc par minimalité,  $Y = Y_0$ . Ceci signifie que tout voisinage de  $x$  contient un  $T^n x$  pour un  $n \geq 1$ .  $\square$

Nous allons maintenant définir une notion de récurrence plus proche de l'idée de périodicité : les points uniformément récurrents. C'est une notion plus forte, mais nous allons démontrer que tout système dynamique compact possède des points uniformément récurrents.

**Définition** – Soit  $(X, \mathbb{Z})$  un système dynamique. Un point  $x \in X$  est *uniformément récurrent* pour  $(X, G)$  si pour tout voisinage  $V \ni x$ , l'ensemble

$$\{g \in \mathbb{Z} : g.x \in V\} = \{\dots < s_{-2} < s_{-1} < s_0 < s_1 < s_2 < \dots\}$$

est à "intervalles" uniformément bornés. C'est-à-dire que la suite  $(s_{n+1} - s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est bornée.

La notion de récurrence uniforme est liée à l'existence de systèmes minimaux. C'est ce que nous allons voir maintenant :

**Définition** – Un système dynamique  $(X, \mathbb{Z})$  est dit *minimal* si  $X$  ne possède pas de partie fermée stricte non vide qui soit invariante sous l'action de  $\mathbb{Z}$ .

La caractérisation suivante est utile :

**Proposition** – Le système  $(X, \mathbb{Z})$  est minimal si et seulement si toute orbite  $\mathbb{Z} \cdot x$  est dense dans  $X$ .

*Preuve.* Pour la condition nécessaire, on considère  $F = \overline{\{T^n x, n \geq 1\}}$  qui est égal à  $X$  par minimalité. La réciproque est encore plus facile.

Une autre caractérisation est la suivante :

**Proposition** – Le système  $(X, \mathbb{Z})$  est minimal si et seulement si pour tout ouvert  $V \subset X$ , il existe un nombre fini d'éléments  $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{Z}$  tels que :

$$\bigcup_{i=1}^n g_i^{-1} V = X$$

*Preuve.* Si  $(X, \mathbb{Z})$  n'est pas minimal et si  $Y$  est un sous-espace fermé invariant de  $X$ , posons  $V = X - Y$ . Alors

$$\bigcup_{g \in \mathbb{Z}} g^{-1}V \neq X$$

La condition est donc suffisante. Inversement, si  $(X, \mathbb{Z})$  est minimal, alors pour tout ouvert  $V \neq \emptyset$ ,

$$\bigcup_{g \in \mathbb{Z}} g^{-1}V = X$$

et par compacité, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.  $\square$

Voilà maintenant le lien entre la minimalité et la récurrence uniforme :

**Théorème 2** *Si  $(X, \mathbb{Z})$  est minimal, tout point  $x \in X$  est uniformément récurrent.*

*Preuve.* Soit  $(X, \mathbb{Z})$  minimal,  $x \in X$  et  $V$  un ouvert de  $X$ . Montrons que l'ensemble  $N(x, V) = \{g \in \mathbb{Z} : g.x \in V\}$  est à intervalles bornés, pour dire que  $x$  est uniformément récurrent. Et en effet, le lemme précédent affirme qu'il existe  $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{Z}$  tels que  $\bigcup_{i=1}^n g_i^{-1}V = X$ ; de sorte que pour tout  $g \in G$ , il existe un  $g_i$  tel que  $g_i(g.x) \in V$ , c'est-à-dire que  $g_i g \in N(x, V)$ . Ainsi la distance d'un élément de  $\mathbb{Z}$  à  $N(x, V)$  est uniformément bornée : c'est bien la propriété voulue.  $\square$ .

Maintenant, en utilisant le lemme de Zorn comme dans la démonstration du théorème 1, on a que tout système dynamique compact possède un sous-système minimal. Avec le théorème 2, on en déduit :

**Théorème 3** *Pour tout système dynamique compact  $(X, \mathbb{Z})$ , l'ensemble des points uniformément récurrents est non vide.*

## 1.7 Propriétés stochastiques des systèmes dynamiques

Nous allons étudier les systèmes dynamiques sur des espaces munis d'une mesure : c'est le point de vue de la théorie ergodique.

Soit  $M$  un ensemble muni d'une tribu, et  $\mu$  une mesure sur cette tribu. Supposons-la de probabilité :  $\mu(M) = 1$ , et complète : tous les sous-ensembles d'ensembles de mesure zéro sont mesurables. Un système dynamique sur  $M$  est une transformation  $T$  sur  $M$  qui préserve la mesure; c'est-à-dire que pour toute partie mesurable  $A$ , on a :

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}A).$$

L'exemple à garder en tête est bien entendu le système dynamique du billard.

La définition suivante est fondamentale en théorie ergodique :

**Définition** – Un système dynamique  $(M, T)$  est dit *ergodique* si tout ensemble  $T$ -invariant est de mesure 0 ou 1.

Dans un système ergodique, toute fonction mesurable et  $T$ -invariante ( $f(Tx) = f(x)$ ) est constante sur le complémentaire d'un ensemble négligeable. En effet,

l'ensemble  $\{x : f(x) < a\}$  est mesurable et  $T$ -invariant, donc de mesure 0 ou 1 ; le résultat s'ensuit.

On a aussi le théorème suivant :

**Théorème** – Pour presque tout point  $x \in M$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_M f d\mu.$$

On peut en faire l'interprétation suivante : la moyenne temporelle de  $f$  est égale à sa moyenne spatiale. Si  $f$  est la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable, alors le membre de gauche est la proportion moyenne de passages de  $x$  dans cet ensemble. Ainsi, si le système est ergodique, pour presque tout point, la proportion de temps passé dans un ensemble est égale à sa mesure.

On en déduit aussi que deux ensembles mesurables quelconques sont indépendants au sens suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^k A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Une autre propriété stochastique des système dynamique est le mélange.

**Définition** – Un système  $(M, T)$  est dit *mélangeant* si pour toutes fonctions  $f, g \in L^2(M, \mu)$ , l'égalité suivante est vérifiée :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f(T^n x)g(x) d\mu = \int_M f(x)g(x) d\mu.$$

En prenant  $f$  et  $g$  les fonctions caractéristiques des ensembles  $A$  et  $B$ , ceci devient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^n A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Ceci signifie que les itérés de l'application mélangent un ensemble mesurable uniformément dans l'espace : après un certain nombre d'itérations, il devient impossible de distinguer les points qui appartenaient à un ensemble donné.

Supposons maintenant que l'ensemble  $M$  est un espace topologique compact muni de la tribu des boréliens, et que  $T$  est un homéomorphisme.

**Définition** – Un homéomorphisme  $T$  est dit *uniquement ergodique*, s'il existe une unique mesure de probabilité sur les boréliens de  $M$  qui soit  $T$ -invariante.

Un homéomorphisme  $T$  est dit *minimal* si la trajectoire  $\{T^n x, -\infty < n < \infty\}$  de tout point  $x$  est dense dans  $M$ .

Un homéomorphisme est dit *topologiquement transitif* s'il existe un point dont la trajectoire est dense.

**Remarques.** Un homéomorphisme uniquement ergodique est ergodique pour sa mesure invariante. En effet, s'il existait un ensemble invariant  $A$  avec  $\mu(A) \neq 0, 1$ , on pourrait définir une autre mesure de probabilité invariante par :

$$\mu'(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}$$

Un homéomorphisme minimal est bien-sûr topologiquement transitif.

Les systèmes minimaux (*cf* section précédente) sont en un sens semblables aux systèmes ergodiques : ils ne possèdent pas de sous-ensemble fermé invariant.

## 2 Billards polygonaux

Cette section traite le cas des billards dans des domaines polygonaux ou polyédraux (connexes). Quand le domaine est en plus convexe, on qualifie parfois cette situation de *parabolique*, par opposition aux cas *elliptique* (domaine strictement convexe) et *hyperbolique* (cas restants, qui présentent une dynamique très instable).

Nous décrirons d'abord le procédé général de développement des trajectoires dans le plan, puis présenterons quelques résultats sur le billard carré.

Suivront des résultats sur la stabilité des trajectoires périodiques, ainsi qu'une étude du problème inverse du billard : rechercher l'ensemble des trajectoires rencontrant les côtés dans un ordre prédéterminé.

Nous donnerons enfin quelques résultats spécifiques aux polygones dits rationnels, dont la dynamique peut être ramenée au flot d'un champ constant sur une variété orientable de dimension 2. Enfin nous détaillerons quelques (contre)-exemples.

### 2.1 Développement des trajectoires

Pour représenter la réflexion d'une trajectoire contre une face du polygone, on peut dessiner le symétrique du polygone par rapport à cette face : la trajectoire apparaît alors comme une droite qui traverse l'axe de symétrie. En réitérant l'opération à chaque nouvelle réflexion, on obtient une représentation du type ci-dessous.

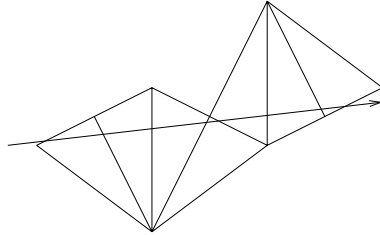


FIG. 5: Une trajectoire développée

Étant donné un polygone  $P$ , on notera  $G(P)$  le groupe des isométries affines du plan engendrées par les réflexions selon ses faces.

### 2.2 Le billard carré

Pour un billard sur table carrée (ou rectangulaire), l'ensemble des images de  $P$  sous les éléments de  $G(P)$  dessine un réseau carré dans le plan, les parties linéaires des isométries associées étant prises dans un ensemble à 4 éléments (les 4 positions possibles des images du système de vecteurs visibles sur la figure (6)).

Comme les trajectoires sont représentées par des droites dans le plan, il y a une manière cohérente de traiter le cas d'un impact de la bille contre un coin du carré (la bille revient alors sur ses pas). Remarquer que dans un billard hexagonal par exemple, bien que les images de  $P$  sous  $G(P)$  dessinent un motif régulier



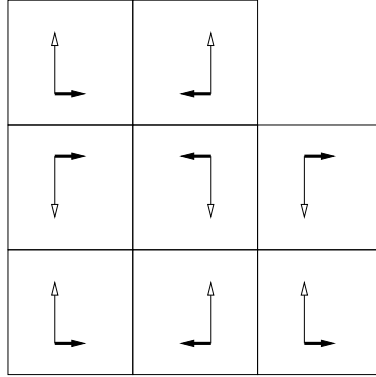


FIG. 6: Les orientations des images du carré

dans le plan (nid d'abeilles), de telles attributions d'orientations n'existent pas — et il n'y a pas de sens à parler de réflexion dans un coin. Nous reviendrons sur cette distinction.

Dans le réseau carré obtenu, comme les orientations sont invariantes pour l'action de  $(2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z})$ , on peut considérer que deux trajectoires (droites du plan) sont identiques si et seulement si elles se déduisent l'une de l'autre par un élément de  $(2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z})$ . On est donc ramené à l'étude du tore  $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$  obtenu en isolant quatre carrés du réseau, en changeant leur échelle d'un facteur 2 et en identifiant deux à deux les côtés du grand carré qu'ils forment.

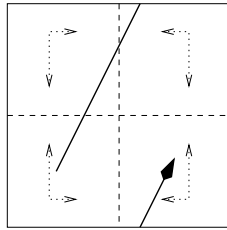


FIG. 7: Le carré quotient

Sur ce tore, le flot du billard est un flot de vitesses constantes, dont on peut se contenter de choisir une fois pour toutes la direction : un angle  $\alpha$ . En mettant de côté les cas triviaux où  $\alpha \equiv 0[\pi/2]$ , on voit apparaître une rotation  $T$  du cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}^1$ , décrivant les positions successives des intersections de la trajectoire avec le bord vertical du carré : on a  $T(x) = (x + \tan \alpha) [1]$ . Les propriétés du flot sur  $\mathbb{T}^2$  (ergodicité, etc...) se déduisent naturellement de celles du système dynamique discret  $(\mathbb{T}^1, T)$ .

Plus généralement, l'étude d'un billard dans un parallélépipède rectangle de dimension  $n + 1$  se ramène à celle d'une translation

$$T_a : \quad \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^n \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto ((x_1 + a_1)[1], \dots, (x_n + a_n)[1])$$

On voit aisément que si une trajectoire est dense, alors toute autre trajec-

toire l'est aussi. Les deux théorèmes suivants résument les propriétés de ces translations toriques :

**Théorème 4** *La translation  $T_a$  est ergodique pour la mesure de Lebesgue si et seulement si les  $a_i$  sont indépendants sur  $\mathbb{Q}$ .*

*Preuve* - Supposons les  $a_i$  indépendants sur  $\mathbb{Q}$  : soit  $f$  une fonction mesurable  $T_a$ -invariante (vérifiant  $f(T_a x) = f(x)$  presque partout). On souhaite montrer que  $f$  est presque partout égale à une constante.

On peut supposer  $f$  bornée : si tel n'est pas le cas,  $\chi_{\{|f|<C\}}$  vérifie l'hypothèse et on récupérera le résultat sur  $f$  en faisant tendre  $C$  vers  $+\infty$ .

On peut écrire alors le développement en série de Fourier de  $f$  :

$$f(x) \sim \sum_{r \in \mathbb{Z}^n} c_r e^{2i\pi \langle r, x \rangle}$$

Par  $T_a$ -invariance,

$$f(T_a x) \sim \sum c_r e^{2i\pi \langle r, a \rangle} e^{2i\pi \langle r, x \rangle} = \sum c_r e^{2i\pi \langle r, x \rangle} \sim f(x)$$

Par unicité des coefficients de Fourier (théorème de Cantor), on a  $c_r e^{2i\pi \langle r, a \rangle} = c_r$  pour tout  $r$  : comme les  $a_i$  sont indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , on a pour  $r \neq 0$  :  $\langle r, a \rangle \notin \mathbb{Z}$  donc  $c_r = 0$ . Donc  $f$  est constante.

Réciproquement, si les  $a_i$  sont liés sur  $\mathbb{Q}$ , par réduction au même dénominateur on peut trouver  $r \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $\langle r, a \rangle \in \mathbb{Z}$  : alors la fonction définie par  $f(x) = e^{2i\pi \langle r, x \rangle}$  est  $T_a$ -invariante.  $\square$

**Théorème 5** *Si  $a_1, \dots, a_n$  sont indépendants sur  $\mathbb{Q}$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $k, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$  tels que pour  $1 \leq i \leq n$  on ait :  $|ka_i - m_i| < \varepsilon$*

*Preuve* - On sait en effet que dans un système ergodique il y a une trajectoire qui est dense dans le support (en fait, presque toute trajectoire est dense). Par translation dans le tore, la trajectoire de 0 est dense : il existe donc un entier  $k$ , arbitrairement grand, tel que  $T_a^k(0)$  soit  $\varepsilon$ -proche de 0. Cet entier  $k$  convient.  $\square$

*Remarque* - Si on ne suppose plus les composantes de la vitesse indépendantes, alors l'adhérence de l'ensemble des itérés d'un point est le projeté dans  $\mathbb{T}^n$  d'un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$ , homéomorphe à un  $\mathbb{T}^m$  ( $m < n$ ).

### 2.3 Codage des trajectoires dans un billard carré

Une trajectoire non-périodique, développée dans le réseau carré, apparaît comme une droite de pente irrationnelle  $\lambda$ . En suivant cette droite, on rencontre alternativement des arêtes verticales et des arêtes horizontales du réseau (comme la droite rencontre au plus un noeud, on supposera dans la suite qu'elle n'en rencontre aucun : le cas où elle en rencontre un étant alors une adaptation mineure).

Codons l'intersection avec une arête horizontale par 0 et l'intersection avec une arête verticale par 1 : on obtient une suite de 0 et de 1, notée  $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . Par ailleurs, donnons-nous la décomposition de  $\lambda$  en fraction continue :

$$\lambda = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \dots}}}$$

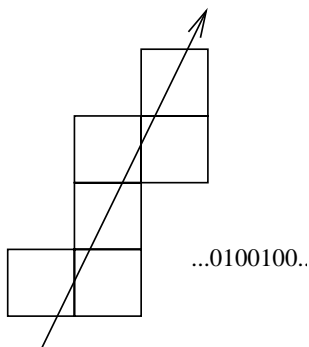


FIG. 8: Codage d'une trajectoire

Par symétrie selon la première bissectrice, on peut supposer  $\lambda > 1$ , d'où  $n_0 = \lfloor \lambda \rfloor \geq 1$ .

Dans la suite  $\gamma$ , les 1 sont isolés les uns des autres et séparés par un nombre de 0 égal, selon les endroits, à  $n_0$  ou  $n_0 + 1$  : il suffit pour le voir de considérer la famille des droites de pente  $\lambda$  passant par le point  $(0, y_0)$ ,  $y_0 \in ]0, 1[$ .

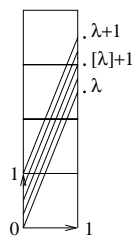


FIG. 9: Le nombre de zéros par bloc

On peut donc effectuer un *recodage* : en notant désormais  $1^*$  pour  $0^{n_0}1$ , on recode  $\gamma$  en une nouvelle suite  $\gamma^*$ . Comme l'opération revient à rayer exactement  $n_0$  symboles 0 de chaque rafale,  $\gamma^*$  est le code associé à la droite d'équation  $y = (\lambda - n_0)x + y_0$  (où  $y = \lambda x + y_0$  était l'équation de la droite codée par  $\gamma$ ). Comme  $\lambda - n_0 < 1$ , on retrouve à une symétrie près selon la première bissectrice la situation initiale : cette symétrie revient à intervertir les 0 et les  $1^*$ , ou encore à remplacer la pente  $\lambda - n_0$  de la droite par son inverse  $1/(\lambda - n_0) = n_1 + \frac{1}{\dots}$ . Ainsi  $\gamma^*$  est formée de blocs de  $n_1$  ou  $n_1 + 1$  symboles  $1^*$  séparés par des 0 isolés. Par conséquent,  $\gamma^*$  peut être à son tour recodée en  $\gamma^{**}$  (cette fois il s'agit de rayer les  $1^*$ ) : l'opération peut être répétée indéfiniment. Ces recodages successifs reviennent exactement à calculer le développement de  $\lambda$  en fraction continue : le nombre de symboles à rayer à la  $i$ -ème étape est  $n_i$  (alternativement des 0 et des 1).

**Théorème 6** *La suite  $\gamma$  n'est pas périodique, mais chaque segment fini de  $\gamma$  réapparaît un nombre infini de fois (on parle de quasipériodicité).*

*Preuve* - Comme deux droites parallèles du réseau carré, d'origines suffisamment voisines et ne passant par aucun sommet, rencontrent les mêmes arêtes du

réseau sur une portion arbitrairement grande de trajectoire, le résultat découle directement du théorème 5. La non-périodicité provient par exemple du fait que l'irrationnel  $\frac{\lambda}{\lambda+1}$  est la densité asymptotique de 0, densité qui serait rationnelle pour une suite périodique.

## 2.4 Fonction de complexité

Étant donnée une suite quelconque de symboles, on définit sa *fonction de complexité*  $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  comme étant celle qui associe à  $n$  le nombre de sous-mots distincts de longueur  $n$  contenus dans la suite.

**Théorème 7** *La suite  $\gamma$  vérifie pour tout entier  $n : p(n) = n + 1$ . On dit que  $\gamma$  est un mot sturmien.*

*Preuve* - Par densité des trajectoires, les sous-mots finis de  $\gamma$  dépendent uniquement de la valeur de  $\lambda$ . Il suffit donc de compter les sous-mots *initiaux* possibles pour une droite de pente  $\lambda$  (figure 10).

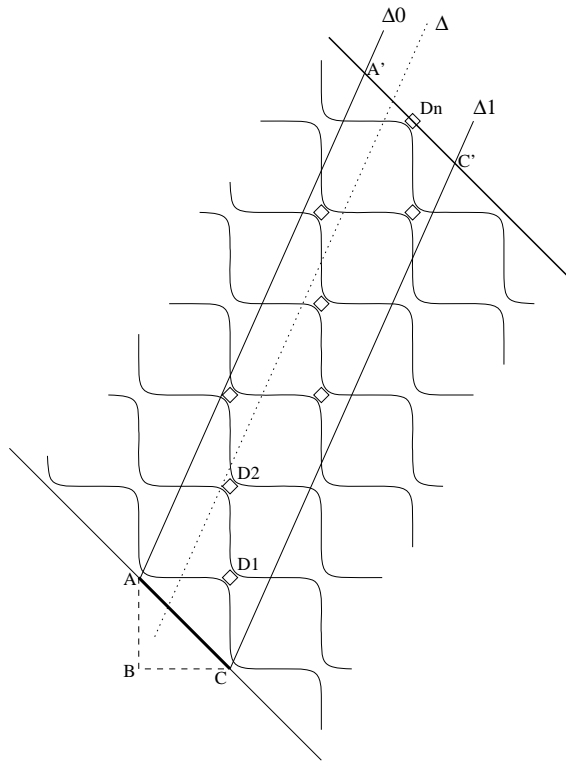


FIG. 10: Le nombre de sous-mots initiaux

Lorsqu'on fait glisser une droite  $\Delta$  de pente  $\lambda$  de la position de  $\Delta_0$  à celle de  $\Delta_1$ , elle décrit tous les cas de figure possibles (en effet, elle balaie toute la surface du carré  $ABCD_1$  à partir de la frontière duquel le mot est lu). Le mot initial de longueur  $n$  dépend de la nature des intersections de  $\Delta$  avec les  $n$  premières "volées de marches" obliques représentées sur le dessin. Ce mot

initial change chaque fois que  $\Delta$  rencontre un noeud du réseau se trouvant dans le parallélogramme  $AA'C'C$  : or on peut voir dans un système de coordonnées d'origine  $A$  que pour chaque valeur de l'entier  $i \in \{1, \dots, n\}$  il y a exactement un tel point  $D_i = (x_i, y_i)$  vérifiant en plus  $x_i + y_i = i$ . Enfin, jamais deux fois le même mot initial n'est atteint : la rencontre de  $D_n$  sépare les mots se terminant par un 1 des mots se terminant par un 0 ; et au sein de chacune de ces deux familles, la rencontre d'un  $D_i$  se traduit toujours dans le mot initial par le remplacement d'un segment (01) (*horizontal, puis vertical*) par (10) (*l'inverse*) : le total des indices où on trouve un 1 décroît donc strictement. On peut alors conclure : comme les projections de  $D_1, \dots, D_n$  divisent le segment  $AC$  en  $n+1$  sous-segments, il y a exactement  $n+1$  mots initiaux possibles :  $p(n) = n+1$ .  $\square$

À titre d'exemple, la figure 11 présente le début de l'arbre des sous-mots associé à une droite de pente  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (le "nombre d'or" pour lequel tous les  $n_i$  valent 1) : les sous-mots sont lus en descendant le long des branches de l'arbre.

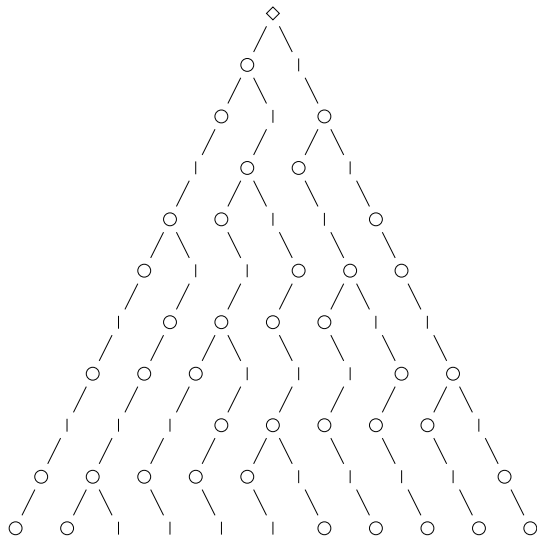


FIG. 11: Les sous-mots pour  $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

En 1994, Arnoux, Mauduit, Shiokawa et Tamura [AMST94] ont calculé la fonction de complexité pour un billard cubique (les composantes de la vitesse de la bille étant supposées libres sur  $\mathbb{Q}$ ) : en projetant de manière analogue  $n$  "volées de marches tridimensionnelles" sur la surface du cube d'origine et en employant des outils de la théorie des graphes, ils démontrent que cette surface est divisée en  $n^2 + n + 1$  régions : c'est la valeur de  $p(n)$ .

## 2.5 Stabilité des trajectoires périodiques dans des polygones généraux

Considérons une trajectoire  $n$ -périodique dans le polygone  $P$ . Comme la réflexion contre une même face de deux rayons parallèles préserve leur écartement en inversant leurs positions relatives, on peut voir que toute trajectoire périodique de période  $n$  paire fait partie d'un faisceau de trajectoires périodiques

parallèles, tandis qu'une trajectoire de période impaire est un "accident" dans un faisceau de trajectoires de période double.

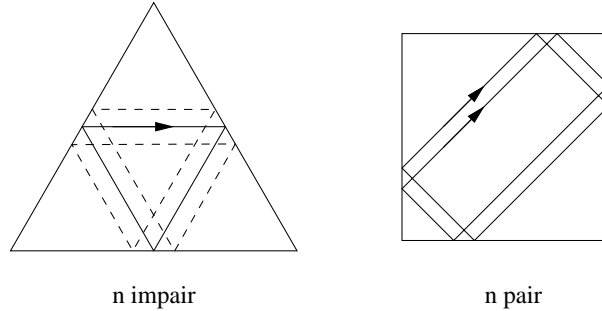


FIG. 12: Faisceaux périodiques

Soit  $n > 2$  un entier naturel. On note  $X$  l'espace des  $n$ -gones non dégénérés et  $\tilde{X}$  l'espace des  $n$ -gones non dégénérés munis d'une trajectoire de billard (i.e. un point de départ et une direction).  $\tilde{Y}$  est l'ensemble des points de  $\tilde{X}$  pour lesquels la trajectoire est périodique;  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  est la projection canonique. Une trajectoire périodique  $T$  du  $n$ -gone  $P$  est dite *stable* quand il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $P$  dans  $X$  et un homéomorphisme  $s : \mathcal{U} \rightarrow \tilde{Y}$  tel que  $p \circ s = \text{Id}_{\mathcal{U}}$ . En d'autres termes, toute perturbation suffisamment petite des sommets du polygone perturbe la trajectoire stable, mais ne la fait pas disparaître. Par exemple, une trajectoire 2-périodique dans un rectangle n'est pas stable.

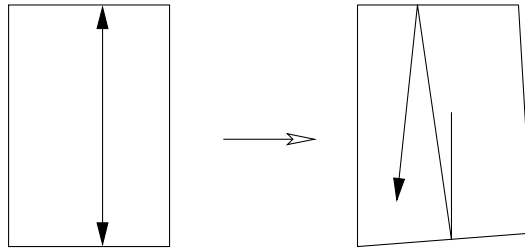


FIG. 13: Une trajectoire instable

Étant donnée une trajectoire périodique (qu'on peut considérer, quitte à la doubler, de longueur paire), rencontrant successivement les côtés  $c_1, \dots, c_{2n}$  du polygone, il existe un critère très simple de stabilité :

**Théorème 8** *La trajectoire est stable si et seulement si chaque côté du polygone apparaît en autant de positions paires que de positions impaires dans la suite des  $c_i$ .*

*Preuve* - Dans le développement de la trajectoire périodique, la  $2n$ -ème copie du polygone est translatée de la copie 0 (polygone d'origine). Or si  $\alpha_i$  est l'angle formé par  $c_i$  avec une direction fixée, la composition des réflexions par rapport aux côtés est une rotation d'angle

$$2(\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1} + \dots + \alpha_2 - \alpha_1)$$

(et une translation non nulle — puisqu'elle a la longueur de la trajectoire — dans le cas où cet angle est nul). Que l'angle demeure nul quelle que soit la variation (suffisamment petite) des directions des côtés est clairement équivalent à la condition annoncée. En traçant une nouvelle droite joignant un point et son translaté, on obtient une nouvelle trajectoire périodique développée.  $\square$

Un exemple classique de trajectoire périodique stable existe dans les triangles dont tous les angles sont aigus : la trajectoire relie les pieds des hauteurs.

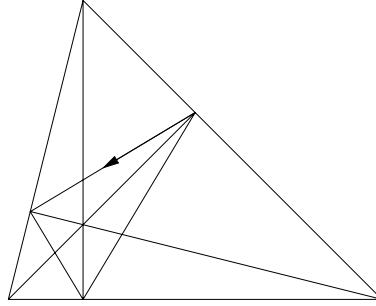


FIG. 14: Une trajectoire stable

Il est remarquable que dans le cas général, on ne sache pas même prouver qu'un triangle admet une trajectoire périodique!

## 2.6 Réalisation d'une trajectoire de code donné

On s'intéresse ici à la question suivante : *étant donnée une suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de côtés du polygone, quel est la topologie de l'espace des trajectoires qu'elle code éventuellement ?* Comme dans le cas du carré, le code d'une trajectoire n'est rien de plus que la succession des côtés qu'elle rencontre.

Étant donné un mot infini  $w$  sur l'alphabet des côtés, notons  $X(w)$  l'ensemble des trajectoires partant du bord du polygone et de code  $w$  (elles partent toutes du côté  $w_1$ ). On appelle *bande* toute partie d'un  $X(w)$  formée de trajectoires parallèles et dont les points d'origine forment un *intervalle* (i.e. un convexe) de  $w_1$ . Le billard, vu comme système dynamique discret sur les vecteurs rentrants de la frontière du polygone, transforme les bandes en bandes et préserve leur largeur. Dans la suite, on suppose que  $X(w)$  est non vide.

Remarquons que deux trajectoires de même code sont toujours parallèles : en effet, c'est la même succession de copies du polygone qui apparaît lorsqu'on les développe. Comme ces copies s'éloignent indéfiniment de la copie d'origine (les trajectoires sont de longueur infinie) et sont de diamètre constant, les droites sont nécessairement parallèles.

Mieux, si les trajectoires parallèles distinctes  $x$  et  $y$  sont de même code et si le domaine  $P$  est simplement connexe, alors toute trajectoire de même direction, de point de départ situé entre ceux de  $x$  et de  $y$ , admet encore le même code :  $X(w)$  est donc une bande. Dans la suite, on supposera  $P$  simplement connexe.

**Théorème 9** *Soit  $w$  un mot  $n$ -périodique. Alors  $X(w)$  est une bande ouverte ; si  $n$  est pair, toute trajectoire de  $X(w)$  est périodique de période  $n$  ; si  $n$  est*

impair, alors  $X(w)$  est constitué d'une trajectoire de période  $n$  et d'une famille de trajectoires de période  $2n$ .

*Preuve* - Si  $n$  est pair, alors pour tout développement d'un élément  $x$  de  $X(w)$ , la  $n$ -ème copie du polygone est translatée de la copie d'origine : en effet,  $x$  amputée de ses  $n$  premiers rebonds doit être encore dans  $X(w)$ , donc parallèle à elle-même. La translation en question est parallèle à la droite qui représente la trajectoire  $x$  : en effet, lorsqu'on l'applique plusieurs fois au polygone, celui-ci continue indéfiniment de rencontrer la droite. Donc  $x$  est périodique, et la bande  $X(w)$  est paramétrée par un intervalle ouvert (une trajectoire parallèle à  $x$  suffisamment voisine de  $x$  ne rencontre aucun sommet et se développe comme  $x$ ). Si  $n$  est impair, l'argument précédent s'applique à  $2n$  : il ne reste qu'à faire apparaître l'unique trajectoire de période  $n$ . La  $n$ -ème isométrie du développement d'une trajectoire générique  $x$  (période  $2n$ ) est indirecte et préserve la direction de  $x$  : c'est une symétrie glissée. Par interpolation entre trajectoires parallèles, on voit que la droite invariante est l'unique trajectoire de période  $n$ .  $\square$

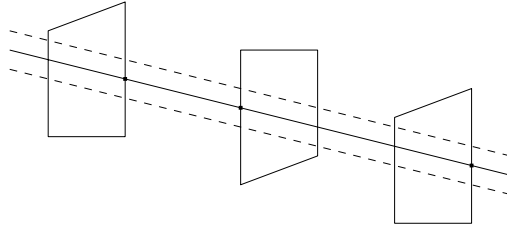


FIG. 15: La droite fixe de la symétrie glissée

En revanche, aucune trajectoire non-périodique ne s'inscrit dans une bande :

**Théorème 10** *Si le mot  $w$  est non-périodique, alors  $X(w)$  est de cardinal au plus 1.*

*Preuve* - Supposons le code  $w$  réalisé par deux trajectoires distinctes. On sait déjà qu'elles sont parallèles, et comprises dans une bande  $B$  de trajectoires parallèles réalisant encore le même code. Soit  $x$  la trajectoire qui trace le milieu de la bande; soit  $Y$  l'ensemble des valeurs d'adhérence des itérés de l'origine de  $x$  (dans l'espace des vecteurs rentrants dans  $P$ ) : comme tout point de  $Y$  se trouve au milieu d'une bande de largeur au moins égale à celle de  $B$ , le système dynamique est bien défini sur  $Y$ . Mieux, il induit une bijection de  $Y$  sur lui-même; enfin,  $Y$  est compact. Dans la suite, quand  $x$  sera une trajectoire (fonction de  $\mathbb{R}^+$  dans  $P$ ), on notera parfois  $x$  pour  $x(0)$ . Par commodité, plutôt que  $Y$ , nous allons regarder la réunion disjointe  $(Y_1 \amalg Y_2)$  de deux copies de  $Y$  munies d'orientations opposées, en composant le système dynamique par l'application "changement de copie".

On peut donc faire appel au théorème de récurrence uniforme démontré en introduction (théorème 3) : il existe  $y \in (Y_1 \amalg Y_2)$  tel que pour tout  $U$  ouvert de  $(Y_1 \amalg Y_2)$  contenant  $y$ , les intervalles de retours successifs de  $y(t)$  à  $U$  sont majorés par une constante  $C_U$  (la majoration en nombre d'itérations permet naturellement une majoration en temps; de plus on peut supposer  $y \in Y_1$ ,  $U \subset Y_1$  et que tous les vecteurs de  $U$  ont leur origine sur le même côté  $\Gamma$  de  $P$ ).



Considérons la bande  $D$  de largeur maximale dans laquelle est compris  $y$ . Tout élément  $y'$  de la base de  $D$  est encore uniformément récurrent : en effet, chaque fois qu'un itéré de  $y$  tombe dans  $U$ , l'itéré correspondant de  $y'$  est de même direction, a son origine sur  $\Gamma$ , et les rayons issus de  $y$  et de  $y'$  sont de même écartement *signé* (c'est l'intérêt d'avoir pris  $(Y_1 \amalg Y_2)$ ). La majoration sur les intervalles de retour de  $y'$  à un  $U'$  se déduit donc d'une majoration semblable sur les retours de  $y$  à un certain  $U$ .

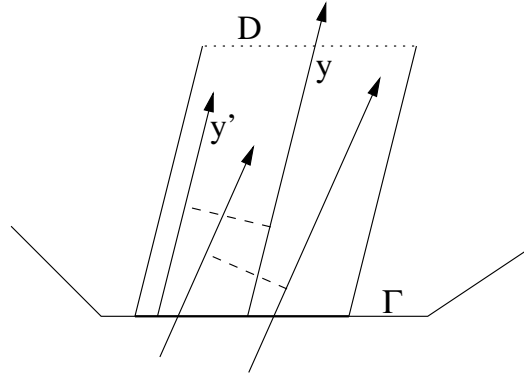


FIG. 16: Les retours préservent l'écartement des trajectoires

Soit  $\varepsilon > 0$  : par maximalité de  $D$  il existe une trajectoire  $y'$  de  $D$  qui passe, pour un temps  $t_0$ , à moins de  $\varepsilon/2$  d'un sommet. Or toute trajectoire  $y''$  suffisamment voisine de  $y'$  vérifie :  $|y''(t_0) - y'(t_0)| < \varepsilon/2$ , et  $y'$  est uniformément récurrente : on obtient donc que le bord de  $D$  passe, à intervalles bornés, à moins de  $\varepsilon$  d'un sommet. (Cela est vrai de chacun des deux bords).

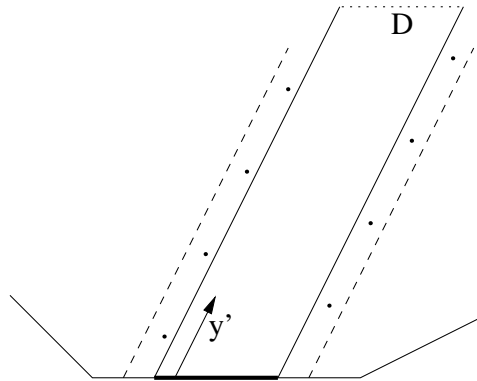


FIG. 17: Densité des sommets au voisinage de  $D$

Considérons maintenant une suite  $(x^{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  d'itérés de  $x$  qui tend vers  $y$ . À partir d'un certain rang, les directions des  $x^{n_i}$  sont toutes différentes. En effet, les  $x^{n_i}$  sont tous distincts puisque la trajectoire n'est pas périodique ; de plus, chaque  $x^{n_i}$  se trouve inclus dans une bande maximale  $D_i$ , dont la largeur (à droite et à gauche de  $x^{n_i}$ ) est une fonction croissante de  $i$  : pour  $i$  assez grand,

si  $x^{n_i}$  et  $x^{n_j}$  étaient parallèles ( $i < j$ ),  $D_j$  viendrait recouvrir un bord de  $D_i$ , ce qui mettrait en défaut la maximalité de  $D_i$ .

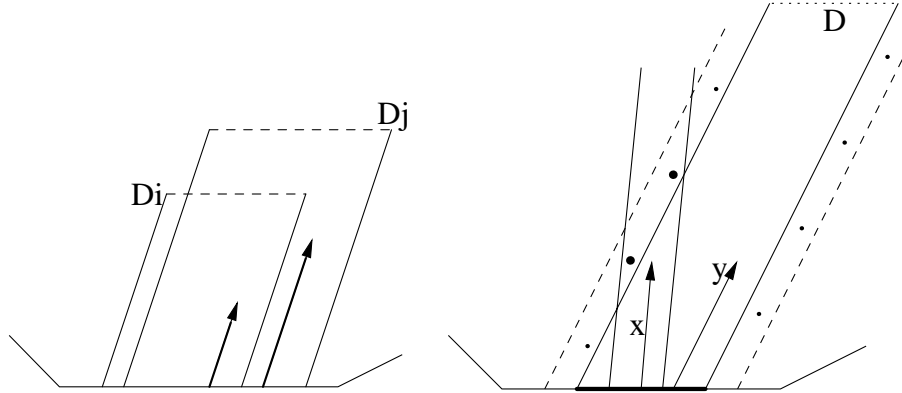


FIG. 18: Disposition des bandes

Conclusion : les  $D_i$ , qui sont de largeurs croissantes et de directions tendant, par valeurs différentes, vers celle de  $D$ , finissent par rencontrer des voisinages de segments arbitrairement grands de la frontière de  $D$  : en choisissant un  $\varepsilon$  approprié, on obtient que les  $D_i$  rencontrent des sommets, ce qui est absurde.  $\square$

## 2.7 Polygones rationnels

$G(P)$ , défini au début de cette section pour un polygone  $P$  quelconque, se projette sur  $O_2(\mathbb{R})$  par oubli de la partie affine ( $O_n(\mathbb{R})$  pour un billard dans un polyèdre). On note  $\mathcal{O}(P)$  l'image de cette projection : un polygone sera dit *rationnel* si  $\mathcal{O}(P)$  est fini. Comme les polygones sont bien sûr supposés connexes, cette condition est équivalente à ce que tous les angles de  $P$  soient des multiples rationnels de  $\pi$ .

Dans un polygone rationnel, les trajectoires n'empruntent qu'un nombre limité de directions (au plus  $2N$ , où  $\mathcal{O}(P) = D_{2N}$  est le groupe diédral à  $2N$  éléments). L'étude du billard est donc partitionnée en autant de problèmes qu'il y a de classes de directions.

Soit  $P$  un polygone rationnel. On peut effectuer une construction strictement analogue à celle qui permet de représenter un billard carré dans un tore dont la surface est partitionnée en 4 copies du carré.

Considérons, dans  $2N$  copies du plan  $\mathbb{R}^2$ , les  $2N$  images de  $P$  sous l'action de  $\mathcal{O}(P)$ . En appliquant à une copie quelconque une symétrie d'axe l'un de ses côtés, on obtient la translatée d'une autre copie (à "changement de copie du plan" près). On recolle alors le côté de la première copie, par rapport auquel la symétrie a été effectuée, à son image dans la seconde, point par point. On réitère l'opération pour chaque copie et chaque symétrie possible.

Le recollement obtenu est une variété compacte  $V$  de dimension 2, orientable. La structure de variété est évidente en tout point de l'intérieur d'une des copies ou de l'intérieur d'une des arêtes. Mais que se passe-t-il en un sommet  $S$ ?

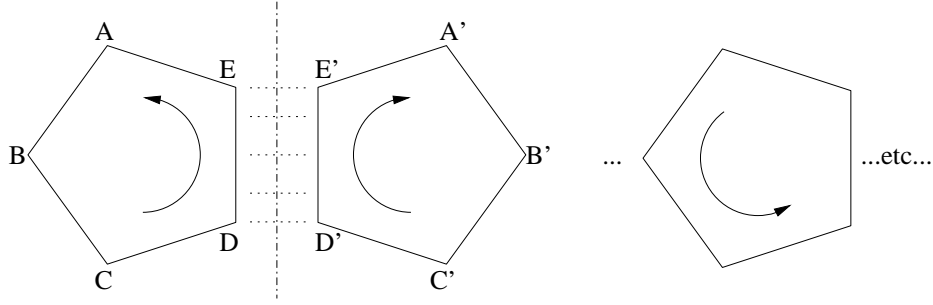


FIG. 19: Recollement des copies

Si l'angle au sommet  $S$  est  $k\pi/n$  ( $k$  premier avec  $n$ ), on peut ordonner naturellement la suite des copies attenantes à  $S$  : en tournant autour de  $S$  dans un sens choisi, on visite alternativement une copie directe et une copie indirecte de  $P$  ; l'angle de pivotement entre deux copies directes successives est  $2k\pi/n$ . C'est au bout d'exactly  $n$  applications de cette rotation que le total redevient pour la première fois un multiple de  $2\pi$ .  $S$  est donc le point de rencontre de  $2n$  copies de  $P$  ; la somme des angles adjacents à  $S$  est  $2k\pi$  (On voit incidemment que dans le cas d'un impact contre un coin, la suite du mouvement de la bille est bien définie si et seulement si  $k = 1$ ).

En un sommet, on établit donc un homéomorphisme local avec  $\mathbb{R}^2$  en divisant les angles par  $k$ . Enfin,  $V$  est orientable : chaque copie directe de  $P$  n'étant adjacente qu'à des copies indirectes et réciproquement, un petit cercle orienté se déplaçant dans  $V$  revient toujours avec la même orientation dans la même copie de  $P$ .

On peut calculer le genre de cette variété  $V$ . Supposons que les angles du polygone sont  $\pi k_i/n_i$  (fractions réduites pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ , où  $r$  est le nombre de sommets) ; le  $N$  précédemment introduit est alors le plus petit commun multiple des  $n_i$ . On trouve donc un maillage de la variété en éléments contractiles, constitué de :

- $\sum_{i=1}^r N/n_i$  sommets : en effet, le  $i$ -ème sommet, présent au départ dans  $2N$  copies de  $P$ , a été re-fusionné en paquets de  $2n_i$  exemplaires lors du recollement.
- $2rN/2 = rN$  arêtes : chacune résulte de la fusion de 2 arêtes de la collection des copies de  $P$ .
- $2N$  faces (les intérieurs des copies).

La caractéristique d'Euler-Poincaré de  $V$  est donc :

$$\chi_V = N \sum_{i=1}^r \frac{1}{n_i} - rN + 2N = -N \sum \frac{k_i - 1}{n_i}$$

puisque

$$\sum \pi \frac{k_i}{n_i} = \pi(r - 2)$$

(c'est la somme des angles intérieurs d'un polygone dont le bord n'a pas d'auto-intersection). On obtient donc le genre :

$$g_V = 1 + \frac{N}{2} \sum \frac{k_i - 1}{n_i}$$

À l'ensemble des trajectoires de billard partant dans une copie donnée de  $P$  avec une direction donnée correspond le flot d'un champ de vecteurs constant dans la variété privée de ses points singuliers (les sommets où  $k_i > 1$ ). On démontre en annexe (section 3.1) un résultat de densité des trajectoires de direction fixée. La figure 20 est un schéma de la situation au voisinage d'un sommet où  $k_i = 3$  :

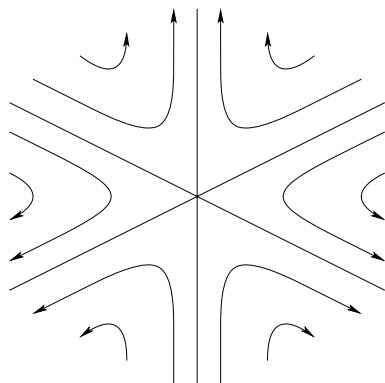


FIG. 20: Une singularité d'ordre 3

En particulier, le champ est dépourvu de singularités si et seulement si tous les  $k_i$  valent 1 (autrement dit : tous les angles sont des sous-multiples entiers de l'angle plat). Une recherche arithmétique élémentaire permet de trouver les polygones correspondants, parfois qualifiés d'*intégrables* : on trouve le triangle équilatéral, le carré, le triangle "demi-équilatéral" et le triangle "demi-carré".

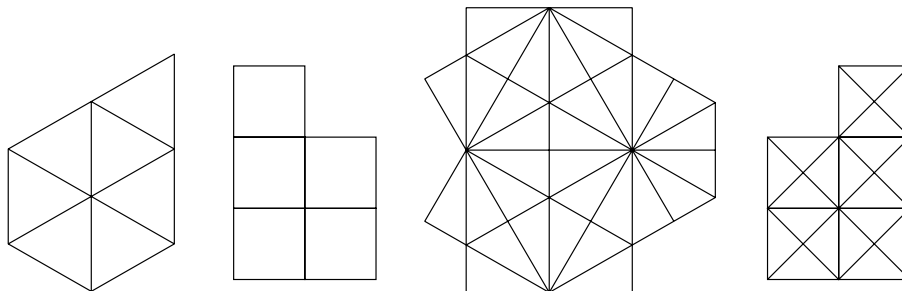


FIG. 21: Pavages du plan par les polygones intégrables

Ces figures pavent le plan par réflexions selon leurs côtés, et deux copies quelconques sont isométriques selon un unique élément de  $G(P)$  (alors que pour un pavage en nid d'abeilles par exemple il n'y a pas unicité). Les systèmes dynamiques associés sont des flots uniformes du tore  $\mathbb{T}^2$ . Mentionnons aussi le cas des billards *semi-intégrables*, obtenus quand le domaine est extrait d'un de ces pavages (polyominos carrés, par exemple). On peut démontrer notamment que dans un polygone quasi-intégrable, pour toute direction rationnelle relativement au maillage de  $\mathbb{R}^2$  sous-jacent, il existe un temps  $t$  tel que toute trajectoire soit périodique, de période (temporelle)  $t$ . La preuve repose sur les mêmes idées que

celles mises en œuvre dans la démonstration donnée en annexe (3.1).

*Remarque* - En élargissant un peu le cadre, on peut trouver plus régulier encore que les polygones intégrables. Par exemple, pour les billards définis dans des triangles sphériques particuliers (ceux qui pavent la sphère), on voit aisément que *toute* trajectoire est périodique!

Enfin, dans le cas des polygones rationnels, il est encore possible de se ramener (comme pour le carré) à un système dynamique discret de dimension 1 : pour ce faire, on incise un certain nombre d'arêtes de la variété  $V$ , de manière à obtenir une surface qui s'injecte localement et canoniquement dans le plan, à la manière des développements plans de polyèdres convexes (seulement, ici, le développement a le droit de venir se recouvrir lui-même plusieurs fois. Plutôt que par incisions, une autre manière d'obtenir ce développement consiste à partir des  $2N$  copies de  $P$  et à n'effectuer qu'une partie des recollements, en constituant de proche en proche un gros polygone auquel chaque nouvelle face ne vient se recoller que par *une seule* arête). La frontière de la surface obtenue peut être paramétrée par  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Le flot de la variété induit une fonction de l'ensemble des points du bord où le champ est rentrant, dans lui-même : étant donné un point, on suit sa ligne de champ jusqu'à ce qu'elle sorte de la figure, puis on "saute" au point où elle entre de nouveau (identification de côtés).

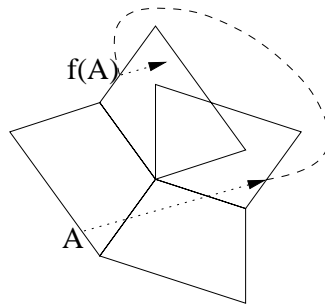


FIG. 22: Le système dynamique induit sur la frontière

## 2.8 Un théorème de finitude

On s'intéresse ici au billard pratiqué dans un angle  $n$ -èdre, en dimension  $n$  (domaine obtenu par intersections et réunions finies de demi-espaces délimités par des hyperplans vectoriels).

**Théorème 11** *Pour un tel billard, il existe une constante qui majore uniformément le nombre de rebonds de la bille.*

*Preuve* - On procède par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 2$ , le résultat est évident sur la représentation développée (figure 23).

Pour  $n > 2$ , projetons la figure sur la sphère unité  $\mathbb{S}^{n-1}$  : on obtient un billard dans un polyèdre sphérique  $P$ . On peut développer la trajectoire *dans* la sphère : elle devient (au plus) un demi-grand-cercle de longueur  $\pi$  qui traverse un certain nombre de copies de  $P$ . On note  $(f_j)_{j \in J}$  la famille finie des faces de  $P$ .

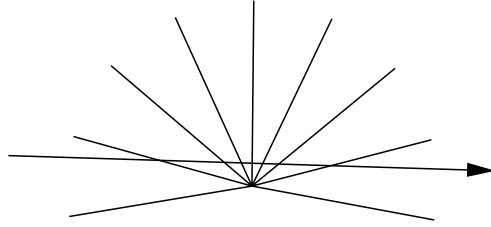


FIG. 23: Billard dans un secteur angulaire

Pour tout  $x \in \partial P$ , soit  $B_x$  une boule ouverte de centre  $x$  (pour la métrique de la sphère) telle que

$$x \notin f_j \implies \overline{B_x} \cap f_j = \emptyset$$

Une telle boule existe par compacité des  $f_j$ . On obtient donc un recouvrement de  $\partial P$  : par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement  $(B_1, \dots, B_n)$ .

Tant que le projeté de la bille reste dans  $B_i = B_x$ , le billard considéré dans l'espace entier est trivial selon la direction  $Ox$  (toutes les faces contre lesquelles la bille est susceptible de rebondir contiennent la droite  $Ox$  : on peut donc quotienter par cette direction, et on obtient un billard  $(n-1)$ -èdre de sommet  $[x]$ ). L'hypothèse de récurrence s'applique : il suffit donc de majorer le nombre de retours dans  $B_x$ .

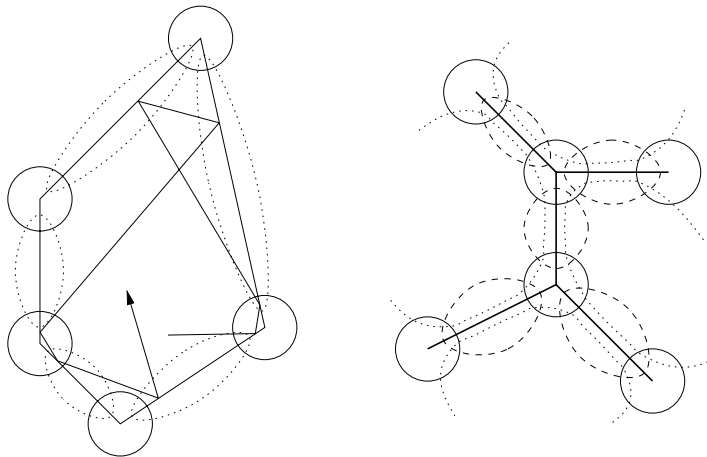


FIG. 24: Plutôt que les  $B_i$  de la preuve, on peut choisir les intérieurs de n'importe quels compacts convexes  $H_i$  qui soient stables pour les réflexions selon les faces qu'ils rencontrent, et qui contiennent au moins un point à l'intersection de ces mêmes faces (afin qu'il y ait trivialité du billard *relevé* de  $\dot{H}_i$  dans  $\mathbb{R}^n$ ). À droite, un aspect local possible des  $H_i$  dans le cas d'un polyèdre de  $\mathbb{S}^3$

Comme la longueur totale de la trajectoire est au plus  $\pi$ , il suffit de minorer les temps de retour à  $B_x$ . Toute trajectoire qui quitte  $B_x$  pour y entrer à nouveau subit au moins une réflexion (en effet,  $B_x$  est convexe et la trajectoire ne peut pas faire tout le tour de la sphère qui est de longueur  $2\pi$ ). Comme  $B_i$  est stable par toute réflexion selon  $f_j \ni x$ , le même argument de convexité s'applique à la

trajectoire développée : il y a donc au moins une réflexion contre une face  $f_j$  telle que  $x \notin f_j$ . Or la distance de  $B_x$  à une telle face est, par choix du rayon de  $B_x$ , minorée par une constante strictement positive : les temps de retour à chacun des  $B_i$  sont donc bien minorés.  $\square$

*Remarque* : cette preuve s'étend aussitôt au cas où  $P$  est un polyèdre de  $\mathbb{R}^n$ . On vient donc de prouver le résultat suivant : pour tout billard dans un polyèdre  $P$ , le nombre de réflexions au bout du temps  $t$  est majoré par un  $O_P(t)$  indépendant de la trajectoire considérée.

## 2.9 Un contre-exemple

L'exemple suivant montre qu'une trajectoire non-périodique n'est pas nécessairement dense. L'hexagone  $ABCDEF$  admet un centre de symétrie ; les angles ont été choisis tels que  $BAC$  et  $DEC$  soient des trajectoires (ou des trajectoires limites) de la bille, ainsi (par suite) que  $Z'FB$  et  $Z'FD$ . De plus, les distances  $XY$  et  $XZ$  sont incommensurables.

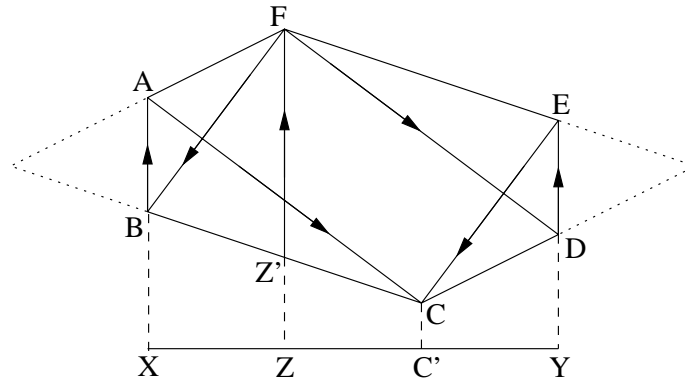


FIG. 25: Des trajectoires ni périodiques, ni denses

On voit que 2 réflexions successives envoient l'ensemble des trajectoires verticales dans lui-même. Mieux, en envoyant le segment  $XY$  sur  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , on voit apparaître la transformation comme une translation de vecteur  $(XC'/XY) \bmod \mathbb{Z}$  : la non-périodicité découle des résultats connus sur les translations toriques. En ajoutant à la table des oreilles polygonales de part et d'autre de l'hexagone, on obtient un système où la trajectoire n'est pas dense.

### 3 Annexes

#### 3.1 Un théorème de densité

On se propose ici de démontrer l'énoncé suivant, promis en (2.7) :

**Théorème 12** *Soit  $P$  un polygone rationnel. Les sommets des copies de  $P$  sous  $G(P)$  forment un ensemble dénombrable  $S$ . Soit  $\theta$  une direction qui n'est celle d'aucun segment reliant deux points de  $S$ . Alors toute trajectoire  $t : \mathbb{R}^+ \rightarrow P$  de direction (au départ)  $\theta$  est dense quand on la relève dans la variété  $V$  associée (on dit que le flux uniforme sur  $V$  de direction  $\theta$  est minimal).*

*Remarque* : le même résultat est aussitôt vrai pour toute  $t : \mathbb{R}^- \rightarrow V$ , et donc pour toute trajectoire de direction  $\theta$  (en effet, par choix de  $\theta$  toute trajectoire possède au moins une branche infinie).

*Preuve* - Soit  $t : \mathbb{R}^+ \rightarrow V$  une trajectoire supposée non dense. Les *points spéciaux* de  $V$  sont par définition les singularités et le point  $t(0)$  : ils forment un ensemble fini que nous appellerons  $R$ . Nous allons admettre pour le moment qu'il existe un segment  $Z$  fermé de  $V \setminus R$ , orthogonal en tout point à la direction  $\theta$ , ne rencontrant l'adhérence de  $t$  qu'en ses deux extrémités.

Pour tout point  $z \in Z$ , on peut considérer la trajectoire  $t_z : \mathbb{R}^+ \rightarrow V \setminus R$  de direction  $\theta$  et d'origine  $z$ , éventuellement interrompue après une longueur finie (rencontre d'un point spécial). Comme le rectangle  $Z \times [0, T]$  est compact et que  $R$  est fini (donc sans point d'accumulation), le nombre de telles interruptions est localement fini : il n'en survient que pour un nombre fini de valeurs de  $(z, \tau) \in Z \times [0, T]$ . Il est donc possible de dessiner un *arbre* localement fini (fini à toute profondeur finie), dont les branches se subdivisent à chaque rencontre d'un point spécial :

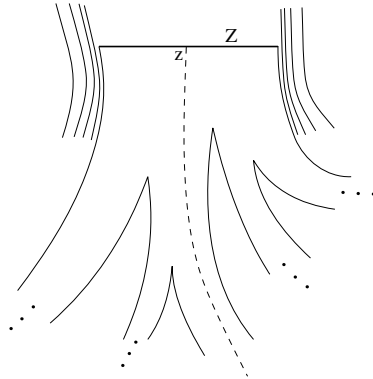


FIG. 26: NB : il peut y avoir des points spéciaux dans la frontière verticale

L'intérieur de cet arbre est une variété ouverte de dimension 2, globalement applicable dans le plan (c'est-à-dire isométrique à un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , bien que dans les figures de cette section on ait choisi de ne dessiner que des plongements non isométriques, à branches "tordues"). L'arbre reçoit naturellement une forme d'aire image réciproque de celle de  $V$ . Notons qu'il y a un sens naturel à parler de la *largeur* d'une branche.



Quand l'intérieur d'une branche contient un point de  $Z$ , c'est que les trajectoires qu'elle contient entrent de nouveau dans  $Z$  par le haut. Comme  $Z$  est bordé de segments de  $t$ , cette branche ne peut pas contenir de point du bord de  $Z$  : à partir de cette valeur du temps  $\tau$ , la branche est entièrement constituée de points déjà visités plus haut par l'arbre. On peut donc aussi bien la sectionner à cette valeur.

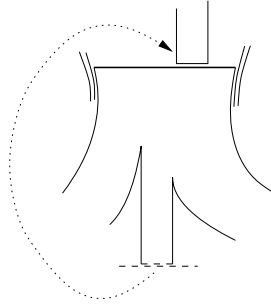


FIG. 27: Le sectionnement d'une branche

On sectionne ainsi toute branche qui contient un point de  $Z$  : le nombre de coupures à faire est localement fini (essentiellement parce qu'à profondeur finie il n'y a qu'un nombre fini de branches). S'il doit y avoir une infinité de coupures, elles ont lieu à des profondeurs tendant vers l'infini.

Imaginons maintenant que le même point  $x$  de  $V \setminus R$  apparaisse deux fois dans l'intérieur de l'arbre émondé : alors les antécédents de ce point (ses images par le flux inverse) sont eux aussi atteints deux fois, et en remontant assez loin on trouve qu'il y a un point de  $Z$  qu'une branche devrait contenir dans son intérieur : absurde ! (les deux points ne peuvent bien sûr pas être à la même profondeur).

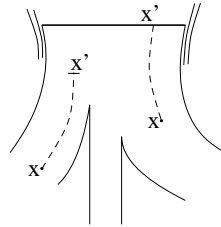


FIG. 28: Deux points tirés en arrière

Ainsi, l'arbre émondé (ouvert) contient au plus une fois chaque point de  $V \setminus R$ . Il ne peut donc y avoir qu'un nombre fini d'embranchements : en effet, chaque singularité ne peut subdiviser le flot qu'un nombre fini de fois sans qu'il y ait superposition des branches (voir la figure 20 page 28), de même que le point  $t(0)$ . Par conséquent le nombre total de branches est fini.

Comme l'arbre est d'aire finie, il ne peut pas avoir de branche infinie (une telle branche cesserait de se subdiviser à partir d'une certaine profondeur, et serait d'aire infinie). L'adhérence de l'arbre est donc homéomorphe à un compact de  $\mathbb{R}^2$  ; on peut dire que *sa combinatoire est finie*, et chaque branche est

sectionnée après une certaine longueur, puis raccordée à un sous-segment de  $Z$ .

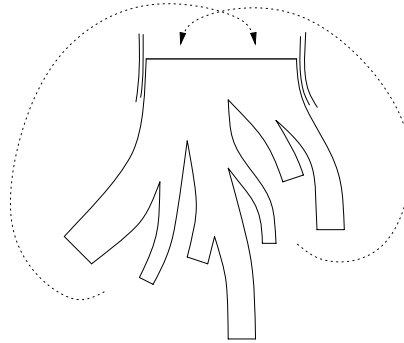


FIG. 29: L'arbre final

De par le choix de  $\theta$ , il ne peut pas y avoir de trajectoires périodiques (les direction de trajectoires périodiques sont celles de translations qui établissent l'isométrie de deux copies de  $P$ . En particulier, l'arbre n'est pas trivial, puisqu'il contiendrait alors des trajectoires périodiques : donc il y a au moins une subdivision).

Regardons maintenant l'adhérence (compacte)  $K$  de l'arbre. Recollons les branches sectionnées sur  $Z$ . Considérons le bord de la surface obtenue : il est de longueur finie, homéomorphe à une collection finie de cercles  $\mathbb{S}_1$ , et chaque cercle est constitué de segments de courbes intégrales du flot de direction  $\theta$  (prises dans un sens ou dans l'autre), séparés par un nombre fini de points appartenant soit à  $R$ , soit à  $Z$ . Nous appellerons points *lisses* les points de l'intérieur de ces segments.

Certains points lisses sont à identifier deux à deux (par exemple juste au-dessus du recollement de deux branches adjacentes sur  $Z$ , ou juste au-dessous d'une subdivision au point  $t(0) \in R$ ). Quand deux points lisses (forcément pris dans des segments distincts) s'identifient, par régularité du flot il y a recollement des segments entiers (ce sont des recollements bord vertical à bord vertical, entre morceaux de branches de  $K$ ). On effectue ces recollements un à un : il y en a au plus autant que de segments. Or on peut voir (figure 30) que la structure générale du bord en cercles est préservée par le procédé.

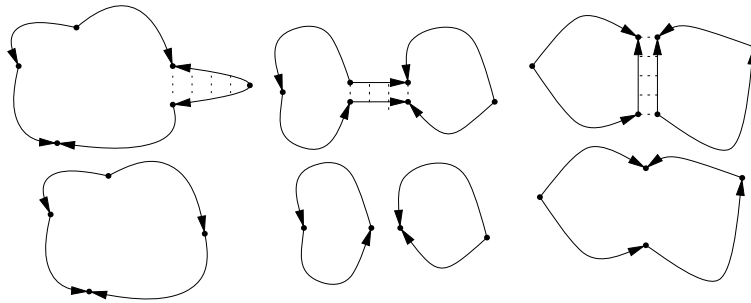


FIG. 30: Recollements entre cercles

On obtient finalement une surface compacte  $B$  dont le bord est soit vide, soit constitué de cercles du type déjà décrit, et dont les points lisses sont tous distincts. Mieux, les points non lisses sont maintenant tous des singularités du flot ( $t(0)$  et les points de  $Z$  ont été absorbés par des recollements). La figure (31) montre un aspect local possible de cette surface  $B$ , réimmergée dans  $V$ . Noter qu'en  $A$  par exemple, l'immersion n'est pas injective.

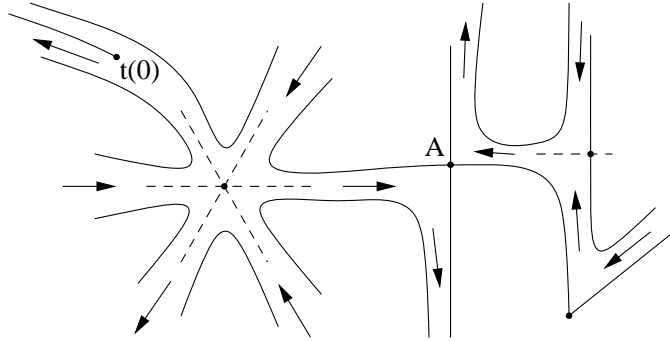


FIG. 31: Réimmersion de  $B$  dans  $V$

Si  $\partial B$  est effectivement non vide, parcourons l'un de ces cercles : s'il rencontre une singularité on obtient un chemin entre deux singularités pour la direction  $\theta$  : absurde, de par le choix de  $\theta$ . Sinon, on obtient simplement une trajectoire périodique de direction  $\theta$  : encore absurde. Donc  $\partial B = \emptyset$  :  $B$  est égal à son intérieur et à son adhérence, donc  $B$  est à la fois ouvert et fermé :  $B = V$ . Comme l'intérieur de l'arbre d'origine ne contenait aucun point de la trajectoire  $t$ , cela signifie que  $t$  était entièrement incluse dans la frontière de l'arbre, qui est de longueur finie : cela encore est absurde.  $\square$

*Remarque* : dans le cas où le cercle rencontre une singularité, on obtient en fait un peu mieux qu'un chemin entre deux singularités : on a tout un lacet non trivial fait de chemins reliant deux singularités. Un tel chemin peut être regardé comme un cycle dégénéré : on vient donc de montrer que si  $\theta$  admet une trajectoire non dense, alors  $\theta$  admet un cycle éventuellement dégénéré.

Il reste donc à montrer l'existence de  $Z$ . Soit  $\phi$  une direction perpendiculaire à  $\theta$  ;  $Z$  va apparaître essentiellement comme une courbe intégrale du flux associé à  $\phi$ . Soit  $T = t(\mathbb{R}^+)$  : comme  $T$  et  $V \setminus T$  sont infinis et  $V$  connexe, la frontière commune  $\partial T = \partial(V \setminus T)$  est de cardinal infini. Par conséquent, choisissons un point *non spécial*  $x \in \partial T$ . On peut considérer une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de l'ouvert  $V \setminus (T \cup R)$  qui tend vers  $x$ . Plaçons-nous sur une petite boule  $B$  contenant  $x$  et ne rencontrant pas  $R$  : il y a triviale locale des flots de  $\theta$  et  $\phi$  (figure 32).

Pour un certain  $n$  suffisamment grand, la courbe intégrale de  $\phi$  d'origine  $x_n =: y$  (définie sur un voisinage de 0) est dans  $V \setminus (T \cup R)$  pour les temps proches de 0 et vient rencontrer  $T$  pour un temps non nul, en un point  $y' \in B$ . On peut considérer une bande ouverte  $D$  contenant cette courbe et appuyée sur un segment de  $T$  contenu dans  $B$  (à l'intérieur de  $B$ , toutes les trajectoires de  $D$  rencontrent  $T$  pour les mêmes valeurs du paramètre temps, par triviale locale des flux). L'argument de la preuve précédente s'applique alors à  $D$  : par finitude de l'aire totale disponible, la bande revient se visiter elle-même et le retour se

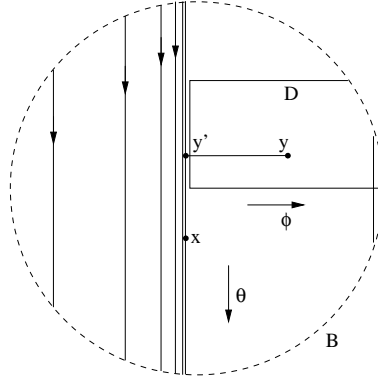


FIG. 32: Deux flux orthogonaux

fait par la racine. Il y a donc dans  $D$  une trajectoire qui revient couper  $T$  : on peut en extraire le segment  $Z$  recherché.  $\square$

Le théorème (12) existe sous d'autres formes faisant intervenir des classes de variétés compactes un peu moins restrictives, mais la preuve donnée ici est assez générique.

En voici une application :

**Théorème 13** *Dans l'espace  $X$  des  $k$ -gones simplement connexes munis d'une trajectoire  $t$ , sur lequel on met la topologie naturelle, il existe un ensemble  $G$  dense, formé de polygones pour lesquels la trajectoire est dense dans l'espace des rayons.*

*Preuve* - On fait apparaître  $G$  comme une intersection dénombrable d'ouverts denses ( $G$  est alors dense par le théorème de Baire). L'espace  $E_P$  des états possibles de la bille dans le polygone  $P$  est le fibré tangent unitaire à l'intérieur de  $P$ , qu'on peut identifier à une partie de  $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$  (comme on regarde les polygones à similitude près, on peut considérer qu'ils sont de diamètre uniformément borné). Soit  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base d'ouverts de  $\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$  : on peut supposer que chaque  $B_n$  est produit cartésien d'un ouvert de  $\mathbb{B}^2$  (point de départ) et d'un ouvert de  $\mathbb{S}^1$  (direction). Soit  $X_n$  l'ensemble des points de  $X$  pour lesquels la trajectoire visite tous les éléments non vides de la suite  $(B_1 \cap E_P, \dots, B_n \cap E_P)$ . Les  $X_n$  sont ouverts : pour peu qu'ils soient denses, leur intersection répondra à la question.

Or soit  $Y_m$  l'ensemble des  $k$ -gones rationnels  $Q$  tels que le groupe  $\mathcal{O}(Q)$  soit d'ordre  $> m$ , munis d'une trajectoire dont la direction  $\theta$  est choisie comme dans le théorème (12). Cette trajectoire traverse tout ouvert de  $Q$  selon tous les angles images de sa direction d'origine sous  $\mathcal{O}(Q)$ . Pour  $m$  assez grand, on en déduit que si  $E_Q$  rencontre un  $B_i$ , alors la trajectoire passe dans  $B_i$  (par structure de produit cartésien de  $B_i \cap E_Q$ ). Donc  $Y_m \subset X_n$  pour  $m$  assez grand, or  $Y_m$  est bien dense dans  $X$ . Le théorème est donc prouvé.  $\square$

### 3.2 Qu'est-ce que c'est ?

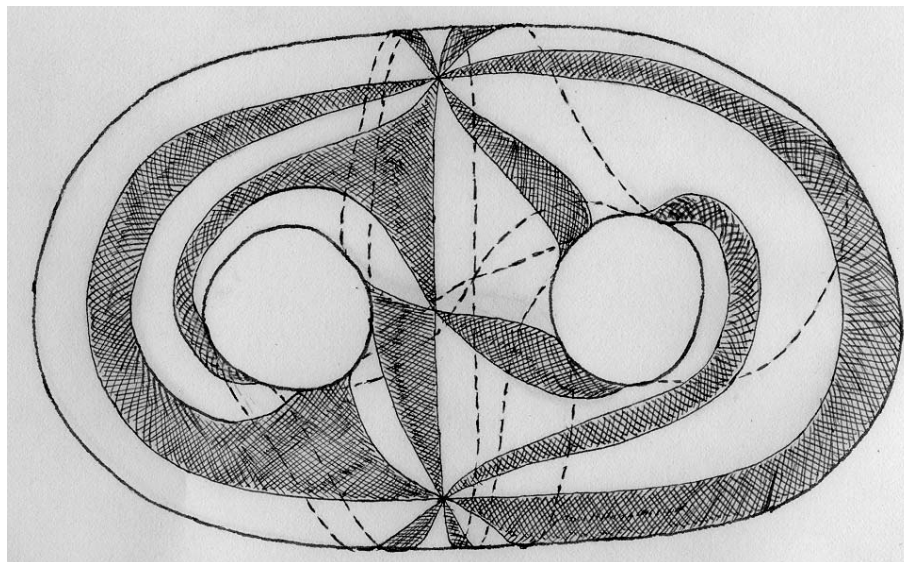


FIG. 33: Réponse : c'est la variété de genre 2 associée au billard dans un triangle isocèle d'angle au sommet  $2\pi/3$ .

### Références

- [AMST94] Arnoux, Mauduit, Shiokawa et Tamura. – Complexity of sequences defined by billiards in the cube. *Bull. Soc. Math. France*, vol. 122, 1994.
- [God69] Godbillon (Claude). – *Géométrie différentielle et mécanique analytique*. – Hermann, 1969, *Collection Méthodes*.
- [Tab95] Tabachnikov (Serge). – *Billiards*. – Société mathématique de France, 1995, *Panoramas et Synthèses*.