# Approximation gyrocinétique des plasmas

Daniel Han-Kwan
Introduction au domaine de recherche
Sous la direction de Laure Saint-Raymond

7 octobre 2008

## Table des matières



# 1 Introduction à la théorie cinétique des gaz et des plasmas

La théorie cinétique permet de décrire statistiquement l'évolution d'un gaz (respectivement un plasma), autrement dit, un système constitué d'un grand nombre de particules neutres (respectivement chargées).

L'état d'un gaz est donné par sa densité :

$$f(t, x, v) \text{ , avec } t \geq 0, x, v \in \mathbb{R}^d$$

(typiquement $d = 2$ ou 3) où $t$ est la variable de temps, $x$ la variable d'espace et $v$ la variable de vitesse. Pour tout volume infinitésimal $dxdv$, la quantité $f(t, x, v)dxdv$ désigne la quantité de particules qui à l'instant $t$ ont une position et une vitesse proches de $x$ et $v$.

L'idée d'une telle modélisation vient de Boltzmann (1872) qui a proposé que pour un gaz suffisamment raréfié, la densité $f$ satisfaisait une équation aux dérivées partielles d'évolution, compatible avec les principes de la physique. On peut distinguer essentiellement deux grandes classes de modèles :

1. **Les modèles de champ moyen**, dans lesquels on ne cherche pas à décrire précisément les interactions binaires entre particules, mais simplement leur effet global sur chaque particule. Pour obtenir une telle description, il faut que les potentiels d'interaction varient sur une échelle caractéristique beaucoup plus grande que la taille des particules. Typiquement, ces modèles permettent de considérer des interactions électromagnétiques entre particules.

   Le prototype de modèle à champ moyen est l'équation de Vlasov :

   $$\partial_t f + v.\nabla_x f + F(t,x,v).\nabla_v f = 0 \tag{1}$$

   où $F$ désigne une force d'interaction auto-induite que subit le système. Celui-ci évolue donc sous l'effet conjugué :
   - du transport libre : l'opérateur d'*advection* $(\partial_t + v.\nabla_x)$ décrit le fait que les particules se déplacent de $vdt$ pendant l'intervalle infinitésimal $[t; t+dt]$
   - de la force $F$ : les particules sont accélérées par ce champ selon le principe de Newton.

   Dans le cas où les particules sont chargées (de charge $q$) et où la force d'interaction est d'origine électromagnétique, on peut utiliser le modèle de Vlasov-Maxwell. La force (dite de Lorentz) est donnée par la formule :

   $$F(t,x,v) = q(E(t,x) + v \wedge B(t,x)) \tag{2}$$

   et $E$ et $B$ sont solutions des équations de Maxwell :

   $$\begin{cases} \partial_t E - c^2 \operatorname{rot} B = -\frac{j}{\epsilon_0} \\ \partial_t B + \operatorname{rot} E = 0 \\ \operatorname{div}_x E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \operatorname{div}_x B = 0 \end{cases} \tag{3}$$

   où $c$ désigne la vitesse de la lumière et $\epsilon_0$ la constante de permettivité électrique du vide.

   Le modèle de Vlasov-Poisson correspond à la limite formelle $c \to \infty$ (régime électrostatique). Dans ce cas la force est réduite au champ électrique $F(t,x) = qE(t,x)$ avec :

   $$\begin{cases} E(t,x) = -\nabla_x V(t,x) \\ -\epsilon_0 \Delta_x V = \rho \end{cases} \tag{4}$$

2. **Les modèles collisionnels**, où l'on cherche à rendre compte des forces d'interaction microscopiques de courte portée, très sensibles aux positions et vitesses relatives des particules. Il est donc impossible de rendre compte des effets de façon globale. Une équation cinétique collisionnelle s'écrit sous la forme :

   $$\partial_t f + v.\nabla_x f = Q(f)$$

   où $Q(f)$ est un opérateur modélisant les collisions. Dans le cas de l'équation de Boltzmann, qui est l'équation la plus communément admise, $Q(f)$ est un opérateur intégro-différentiel n'agissant que sur la variable $v$. Pour de plus amples détails, on peut par exemple se référer à l'article de revue de Villani [20].

# 2 Quelques outils mathématiques pour l'étude de l'équation de Vlasov

## 2.1 Rappels : estimations a priori et méthode des caractéristiques

Commençons par donner les estimations *a priori* fondamentales qui expriment la conservation de la masse et le principe du maximum.

**Lemme 2.1.** *Soit $f$ une solution $\mathcal{C}_0^1$ de l'équation de Vlasov $\partial_t f + v.\nabla_x f + F.\nabla_v f = 0$ avec donnée initiale $f_0$, où $F$ est un champ à divergence nulle. Alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\|f(t)\|_{L^p_{x,v}} = \|f(0)\|_{L^p_{x,v}}$$

*De plus $f(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ si et seulement si $f(0) \geq 0$.*

Donnons à présent quelques éléments sur la méthode des caractéristiques, qui permet de donner une formule explicite pour la solution d'une équation de Vlasov : on appelle courbes caractéristiques associées à l'équation de transport les solutions du système différentiel

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt}(t,x,v) = V(t,x,v) \\ \frac{dV}{dt}(t,x,v) = F(t,X,V) \end{array} \right.$$

avec $X(0,x,v) = x$ et $V(0,x,v) = v$ pour la courbe issue du point $(x,v)$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre qu'il existe une solution maximale unique dès que $F$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à $x$ et $v$. Si on suppose de plus que $F$ est sous-linéaire[1], cette solution est définie pour tout temps. On a ainsi le résultat suivant :

**Proposition 2.1.** *Si $f_0$ et $F$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et si $F$ est sous-linéaire, la solution du problème de Cauchy :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + v.\nabla_x f + F.\nabla_v f = 0 \\ f_{|t=0} = f_0 \end{array} \right.$$

*est donnée pour tout temps par $f(t, X(t,x,v), V(t,x,v)) = f_0(x,v)$. Autrement dit la densité $f$ est transportée le long des caractéristiques.*

Cette méthode donne également une formule explicite si on considère un terme de source supplémentaire. Elle permet en fait de résoudre l'équation pour des données peu régulières ($f_0 \in L^1_{\text{loc}}$) et conduit à des solutions faibles.

## 2.2 Lemmes de moyenne $L^p$, $1 < p < +\infty$

Comme l'équation de transport libre est hyperbolique, une solution $f(.,v)$ à $v$ fixé n'est pas plus régulière que le second membre, ni que la donnée initiale $f_0$ ou que la donnée au bord. En effet, par la méthode des caractéristiques qui donne une

[1] i.e. $\exists C > 0, \forall t, x, v, |F(t,x,v)| \leq C(1 + |x| + |v|)$

formule explicite pour $f$, on voit bien que les singularités persistent. En revanche si on considère les moyennes en vitesse

$$\rho = \int_{\mathbb{R}^d} f(.,v)\Psi(v)dv$$

avec $\Psi \in L_v^\infty$ à support compact , alors $\rho$ est plus « régulière » , ceci se traduisant par une appartenance à des espaces de Sobolev ou de Besov et donc par des propriétés de compacité. Ces résultats, appelés lemmes de moyenne, pour la première fois observés par Golse, Lions, Perthame et Sentis ([11]) sont très importants en théorie cinétique car ils fournissent des propriétés de compacité forte nécessaire pour étudier la stabilité asymptotique de termes non linéaires (schéma d'approximation pour l'étude de l'existence de solutions faibles, ou étude de régimes asymptotiques).

**Lemme 2.2.** *Soit $f \in L^2_{t,x,v}$ une solution de l'équation*

$$\partial_t f + v.\nabla_x f = S$$

*avec $S \in L^2_{t,x,v}$. Soit $\Psi \in L_v^\infty$ à support compact. Alors :*

$$\left\| \int f(t,x,v)\Psi(v)dv \right\|_{L_t^2(H_x^{1/2})} \leq C \left( \|f\|_{L^2_{t,x,v}} + \|S\|_{L^2_{t,x,v}} \right)$$

*Démonstration.* Soit $\hat{f}(\tau,\xi,v)$ la transformée de Fourier $L^2$ de la fonction $f(t,x,v)$. L'inégalité est obtenue en découpant l'espace des vitesses en deux parties en introduisant un paramètre $\alpha > 0$ :

$$\begin{aligned}
\left| \int \hat{f}(\tau,\xi,v)\Psi(v)dv \right| &\leq \left| \int \mathbb{1}_{|\tau+v.\xi|\leq\alpha} \hat{f}(t,\xi,v)\Psi(v)dv \right| + \left| \int \mathbb{1}_{|\tau+v.\xi|>\alpha} \frac{\hat{f}(t,\xi,v)(\tau+\xi.v)}{\tau+\xi.v}\Psi(v)dv \right| \\
&\leq \left( \int |\hat{f}(\tau,\xi,v)|^2 dv \right)^{1/2} \left( \int \mathbb{1}_{|\tau+v.\xi|\leq\alpha} \Psi^2(v)dv \right) \\
&+ \left( \int |\hat{S}(\tau,\xi,v)|^2 dv \right)^{1/2} \left( \int \frac{\mathbb{1}_{|\tau+v.\xi|>\alpha}}{(\tau+\xi.v)^2} \Psi^2(v)dv \right) \\
&\leq \|\hat{f}\|_{L_v^2} C \frac{\alpha}{|\xi|} + \|\hat{S}\|_{L_v^2} C \frac{1}{\alpha|\xi|}
\end{aligned}$$

on choisit par exemple $\alpha = 1$ et on conclut grâce à l'égalité de Plancherel. □

Pour $p = 1$ ou $+\infty$ on ne gagne pas de régularité à cause de pathologies dues à des concentrations en vitesse. Par interpolation complexe, on montre néanmoins que si $f$ et $S$ sont dans $L^p$ alors la moyenne est dans $L_t^p(W_x^{s',p})$ pour tout $s' < \min(1/p, 1/p')$.

Il existe par ailleurs des versions plus complexes des lemmes de moyenne dues à DiPerna, Lions et Meyer ([7]), permettant de traiter le cas où la source est de la forme $D_x^\tau D_v^m g$ avec $g \in L^p_{t,x,v}$ ($\tau \in [0,1[, m \in \mathbb{R}, p \in ]1,\infty[$). Ces variantes font appel à des résultats plus fins d'analyse harmonique et d'interpolation. Le résultat dans sa forme optimale a été obtenu par Bézard dans [3] :

**Théorème 2.1.** *Soit* $1 < p \leq 2$. *Soit* $f, g \in L^p(dt \otimes dx \otimes dv)$ *vérifiant l'équation de transport :*

$$\partial_t f + v.\nabla_x f = (Id - \Delta_{t,x})^{\tau/2}(Id - \Delta_v)^{m/2} g$$

*avec* $m \in \mathbb{R}^+, \tau \in [0, 1[$. *Alors* $\forall \Psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\rho(t,x) = \int f(t,x,v)\Psi(v)dv \in W^{s,p}_{t,x}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ *où*

$$s = \frac{1-\tau}{(1+m)p'}$$

*De plus,*

$$\|\rho\|_{W^{s,p}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)} \leq C(\|f\|_{L^p(dt\otimes dx\otimes dv)} + \|g\|_{L^p(dt\otimes dx\otimes dv)})$$

*(C est une constante positive dépendant indépendante de f et g)*

**Remarque :** Il est même possible de traiter le cas de sources ayant une intégrabilité différente en $x$ et $v$ ([15],[16])

## 2.3 Estimations des dispersion et lemmes de moyenne $L^1$

Dans le cas « pathologique » $L^1$ il est toutefois possible d'obtenir des résultats de compacité faible [12], sous une hypothèse de non concentration en $v$. Par souci de simplicité, on n'évoquera que les résultats pour des équations stationnaires ; il est néanmoins possible de les étendre pour les équations dépendant du temps. On définit tout d'abord la notion d'équiintégrabilité en $v$ pour des fonctions dépendant de $x$ et $v$.

**Définition 2.1.** *Soit* $f_\epsilon(x, v)$ *une famille bornée de* $L^1_{loc}(dx \otimes dv)$. *Elle est dite localement équiintégrable en* $v$ *si et seulement si pour tout paramètre* $\eta > 0$ *et tout compact* $K \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, *il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour tout ensemble mesurable* $A \subset \mathbb{R}^d$ *tel que* $|A| < \alpha$, *on a pour tout* $\epsilon$ *:*

$$\int \left( \int_A \mathbb{1}_K(x,v)|f_\epsilon(x,v)|dv \right) dx \leq \eta$$

**Théorème 2.2.** *Soit* $(f_\epsilon)$ *une famille bornée de* $L^1_{loc}(dx \otimes dv)$ *localement équiintégrable en* $v$ *et telle que* $v.\nabla_x f_\epsilon$ *est bornée dans* $L^1_{loc}(dx \otimes dv)$. *Alors :*

- $(f_\epsilon)$ *est localement équiintégrable en* $x$ ***et*** $v$.
- $\forall \psi \in L^\infty_K(dv)$, *la famille* $\rho_\epsilon(x) = \int f_\epsilon(x,v)\psi(v)dv$ *est relativement compacte dans* $L^1_{loc}(dv)$.

Ce résultat repose sur une inégalité de dispersion vérifiée par l'équation de transport libre, obtenue par Castella et Perthame ([5]) :

**Théorème 2.3.** *Soit* $f$ *vérifiant* $\partial_t f + v.\nabla_x f = 0$. *Pour tout* $t > 0$ *et* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *on a :*

$$\|f(t)\|_{L^q_x(L^p_v)} \leq |t|^{d(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f^0\|_{L^p_x(L^q_v)}$$

Dans le cadre de mon mémoire de M2, je suis parvenu à étendre cette inégalité pour des temps petits à l'équation $\partial_t f + v.\nabla_x f + E.\nabla_v f = 0$, avec un champ $E$ très régulier (typiquement $\mathcal{C}^1 \cap W^{1,\infty}$). Cela a permis de démontrer un lemme de moyenne $L^1$ avec champ de force. Néanmoins, pour que ce résultat soit utilisable en pratique, il faudrait réussir à affaiblir les hypothèses sur le champ.

## 2.4 Application aux sytèmes de Vlasov-Poisson et de Vlasov-Maxwell

On se propose ici de montrer comment les outils introduits précédemment permettent de construire des solutions faibles aux systèmes de Vlasov-Poisson (1)-(4) (VP) et Vlasov-Maxwell (1)-(2)-(3) (VM) en dimension 3.

**Théorème 2.4.** *Soit $f_0$ une fonction positive de $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ telle que $\mathcal{E}(0) = \int\int f_0|v|^2 dvdx + \int |E_0(x)|^2 dx < \infty$ Alors il existe une solution faible globale $f$ du système de Vlasov-Poisson avec donnée initiale $f_0$. De plus, elle vérifie les inégalités suivantes :*

$$\forall 1 \leq p \leq \infty, \|f(t)\|_{L^p_{x,v}} \leq \|f_0\|_{L^p_{x,v}}$$
$$\mathcal{E}(t) = \int\int f|v|^2 dvdx + \int |E(x)|^2 dx \leq \mathcal{E}(0)$$

*Eléments de preuve.* Pour prouver ce résultat dû à Arsenev ([2]), on procède par axpproximations successives. La première étape consiste à régulariser le noyau de convolution donnant le champ électrique dans l'équation de Poisson. On est alors amené à construire une solution $(f_\eta)$ d'un système approché $(S_\eta)$ avec un champ électrique régulier, ce que l'on fait aisément grâce à la méthode des caractéristiques et au théorème de point fixe de Banach-Picard qui permet de voir la solution du sytème comme un point fixe d'une certaine application. Les estimations *a priori* permettent de voir que les solutions sont bien définies pour tout temps.

La deuxième étape consiste à passer à la limite faible* par rapport à $\eta$ dans le système approché. Grâce à la conservation des normes $L^p$, le passage dans les termes linéaires ne pose pas problème. La difficulté vient du terme non linéaire $E_\eta f_\eta$. Pour cela, on peut gagner de la compacité forte sur le champ $E_\eta$ grâce à l'ellipticité de l'équation de Poisson. Par dualité fort/faible, $f_\eta E_\eta \to fE$ au sens des distributions, où $(f, E)$ est solution de l'équation de Vlasov-Poisson.

□

**Théorème 2.5.** *Soit $f_0$ une fonction positive de $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ telle que $\mathcal{E}(0) = \int\int f_0|v|^2 dvdx + \int \left(|E_0(x)|^2 + |B_0(x)|^2\right) dx < \infty$ Alors il existe une solution faible globale du système de Vlasov-Maxwell avec donnée initiale $f_0$.*

*Eléments de preuve.* Pour plus de détails on se réfère à l'article de DiPerna et Lions ([6]). La première étape est essentiellement la même que dans la preuve précédente : on commence par régulariser les équations de Maxwell donnant les champs électromagnétiques $E$ et $B$. On résout ensuite le système régularisé de la même façon que pour Vlasov-Poisson, ce qui nous donne des solutions $(f_\eta, E_\eta, B_\eta)$.

Pour passer à la limite, la difficulté est à nouveau de s'occuper des termes non linéaires $E_\eta f_\eta$ et $(v \wedge B_\eta) f_\eta$. Cependant, les équations de Maxwell sont hyperboliques : on ne peut donc pas invoquer un argument de régularité elliptique et il faut donc procéder autrement. L'idée, en vue de passer à la limite au sens des distributions, est d'essayer de gagner de la régularité et donc de la compacité sur les moments $\rho_\eta = \int f_\eta \Psi(v) dv$, avec $\Psi \in \mathcal{C}^\infty_c$. Pour cela, on peut utiliser le lemme de moyenne 2.1.

□

**Remarque :** En général, on n'a pas unicité de la solution, que ce soit pour (VP) ou pour (VM).

# 3 L'approximation gyrocinétique

On s'intéresse à présent au comportement d'un plasma soumis à un champ magnétique extérieur intense. Un tel champ entraine une rotation rapide et de faible amplitude pour les particules et de ce fait introduit une nouvelle petite échelle de temps et d'espace qui est très contraignante d'un point de vue numérique[2].

L'approximation gyrocinétique consiste à obtenir de nouvelles équations décrivant l'évolution de particules dont la densité est proche de celle du vrai plasma, en faisant tendre vers 0 un paramètre $\epsilon$ inversement proportionnel à l'intensité du champ. Ces équations gyrocinétiques sont plus adaptées au traitement numérique car elles font intervenir moins d'échelles de temps et d'espace.

## 3.1 Approche heuristique du problème

Donnons ici quelques arguments formels en vue de comprendre le comportement du plasma. On considère le mouvement d'une particule (de charge $q$, de masse $m$, de position $x$ et de vitesse $v$) soumise à un champ magnétique extérieur constant et uniforme. Le principe fondamental de la mécanique entraine que :

$$x' = v,\ v' = q/m(v \wedge B)$$

Quelques calculs immédiats montrent que la vitesse parallèle $v_{\parallel}$ (c'est-à-dire la composante de la vitesse parallèle au champ $B$) est conservée, ainsi que la norme de la vitesse perpendiculaire $v_{\perp}$. On voit alors facilement que la particule se déplace en suivant une hélice dont l'axe est parallèle aux lignes de champ. La fréquence de rotation d'une période appelée aussi fréquence cyclotron $\Omega = |q||B|/m$ et le rayon de l'hélice appelé rayon de Larmor est donné par$r_L = |v_{\perp}|/\Omega$. Si on considère un champ magnétique intense, i.e. $|B| \sim \frac{1}{\epsilon}$ avec $\epsilon$ petit, on voit que l'on a[3] $\Omega \sim \frac{1}{\epsilon}$ et $r_L \sim \epsilon$. Si en plus on applique un champ électrique extérieur, un calcul immédiat montre qu'il apparait : d'une part un terme d'accélération $\frac{E.B}{|B|}$ dans la direction de $B$ et d'autre part un terme de dérive « électrique » $\frac{E \wedge B}{|B|^2}$ dans le champ orthogonal. Ce dernier terme est problématique si on considère le problème du confinement de plasma (afin de produire de l'énergie par exemple).

En fait, les champs considérés ne sont ni constants, ni extérieurs mais induits par le plasma lui-même. Afin de comprendre cette interaction non linéaire entre le plasma et le champs électromagnétiques, on utilise une description cinétique.

## 3.2 Quelques résultats mathématiques

On suppose ici que la vitesse des particules est petite devant la vitesse de la lumière de sorte que l'on peut utiliser l'approximation électrostatique. Le modèle de

[2]La simulation de tels plasmas est aujourd'hui primordiale en vue de la production d'énergie par confinement magnétique, incarnée en France par le projet ITER ($\sim$ 2020).

[3]Cela signifie précisément que les rotations sont rapides et de faible amplitude

base que l'on prend pour les ions est donc le système de Vlasov-Poisson que l'on rappelle ci-dessous ($t > 0, x \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{R}^3$) :

$$\begin{cases} \partial_t f_\epsilon + v.\nabla_x f_\epsilon + (E_\epsilon + \frac{v \wedge B}{\epsilon}).\nabla_v f_\epsilon = 0 \\ E_\epsilon = -\nabla_x V_\epsilon \\ -\Delta_x V_\epsilon = \int f_\epsilon dv \\ f_{t=0} = f_0 \end{cases}$$

Après, il est possible de changer les échelles en temps ou en espace et donc de faire apparaitre des $\epsilon$ devant $\partial_t, v.\nabla_x$...

Les justifications mathématiques de telles dérivations, avec diverses échelles de temps et d'espace, ne sont apparues que depuis la fin des années 90. Citons les travaux significatifs de Brenier([4]), Frénod et Sonnendrücker([9], [10]), Frénod, Raviart et Sonnendrücker ([8]), Golse et Saint-Raymond ([13], [14]), Saint-Raymond ([18], [19]). Un résultat typique de dérivation gyrocinétique[4] peut être trouvé dans [13] :

**Théorème 3.1.** *Soit $f_0 \in L^\infty_{x,v} \cap L^1_{x,v}$. On suppose que $B = e_3$. Alors la famille $(f_\epsilon)$ est relativement compacte dans $L^\infty_{t,x,v}$-faible* et chacune de ses limites pour $\epsilon \to 0$ est de la forme :*

$$f \equiv f(t, x, \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, v_3)$$

*où $f$ est solution du système limite :*

$$\begin{cases} \partial_t f + v_3 \partial_{x_3} f + E_3 \partial_{v_3} f = 0 \\ E = -\nabla_x V \\ -\Delta_x V = \int f \\ f(0, x, r, v_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f_0(x, r\omega, v_3) d\omega \end{cases}$$

On voit que le système limite est une équation cinétique $1D$ dans la direction de $B$. Physiquement cela peut être interprété en disant que l'on a négligé les petites rotations des particules et qu'on les a assimilées à leur centre instantanné de rotation.

*Eléments de preuve.* On montre d'abord facilement que la famille $(f_\epsilon)$ est relativement compacte dans $L^\infty_{t,x,v}$-faible* grace à la borne $L^\infty$ obtenue par l'équation de Vlasov.

La deuxième étape consiste à voir qu'une limite faible $f$ est forcément de la forme $f \equiv f(t, x, \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, v_3)$. Pour cela, on multiplie l'équation de Vlasov par $\epsilon$ et on montre que $\epsilon(\partial_t f_\epsilon + v.\nabla_x f_\epsilon + E_\epsilon.\nabla_v f_\epsilon)$ tend vers 0 au sens des distributions puisque $(\partial_t f_\epsilon + v.\nabla_x f_\epsilon + E_\epsilon.\nabla_v f_\epsilon)$ est borné dans des espaces fonctionnels convenables grâce aux estimations a priori. Par conséquent on a $v \wedge e_3.\nabla_v f = 0$, ce qui montre bien le résultat souhaité puisque l'opérateur $v \wedge e_3.\nabla_v$ engendre le groupe des rotations d'axe $e_3$ dans l'espace des vitesses.

Pour finir, on intègre l'équation de Vlasov par rapport à l'angle polaire de $(v_1, v_2) = r\omega$ avec $r = |(v_1, v_2)|$ et on passe à la limite. La difficulté concerne les termes non linéaires $f_\epsilon E_\epsilon$ et une nouvelle fois on utilise l'équation de Poisson afin de gagner de la compacité pour le champ électrique. □

[4]En réalité les physiciens parleraient ici plutôt de "drift-cinétique" ; une vraie dérivation gyrocinétique peut être trouvée avec l'approximation « rayon de Larmor fini » évoqué dans [10]

**Remarque :** D'une manière générale, il faut garder en mémoire qu'une démonstration de type convergence faible pour une dérivation gyrocinétique est souvent très proche de l'étude même du système limite.

# Références


[1] Allaire G., Homogenization and Two-scale Convergence. SIAM J. Math. Anal., XXIII (6) :1482–1518, 1992.

[2] Arsenev A.A., Existence in the large of a weak solution of Vlasov's system of equations, Z. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 15 (1975) 136-147.

[3] Bézard M., Régularité $L^p$ précisée des moyennes dans les équations de transport, Bull. Soc. math. France, 122, 1994, p.29-76.

[4] Brenier Y., Convergence of the Vlasov-Poisson system to the incompressible Euler equations, Comm. P.D.E. 25 (2000) 737-754.

[5] Castella F., Perthame B., Estimations de Strichartz pour les équations de transport cinétique, C.R. Acad. Sci. Paris, t.322, Série I, p. 535-540, 1996.

[6] DiPerna R.J., Lions P.L., Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems, CPAM 42 (1989), pp 729-757

[7] DiPerna R.J., Lions P.L., Meyer Y., $L^p$ regularity of velocity averages, Annales de l'I.H.P, section C, tome 8, n 3-4 (1991), p. 271-287.

[8] Frénod E., Raviart P.A., Sonnendrücker E., Asymptotic expansion of the Vlasov equation in a large external magnetic field. J. Math. Pures et Appl., 80(8) :815-843, 2001.

[9] Frénod E., Sonnendrücker E., Homogenization of the Vlasov equation and of the Vlasov-Poisson system with a strong external magnetic field. Asymp. Anal., 18(3,4) :193-214, 1998.

[10] Frénod E., Sonnendrücker E., The Finite Larmor Radius Approximation. SIAM J. Math. Anal., 32(6) :1227-1247, 2001.

[11] Golse F., Lions P.L., Perthame B., Sentis R., Regularity of the moments of the solution of a transport equation. J. Funct. Anal., 26 (1988), 110-125.

[12] Golse F., Saint-Raymond L., Velocity averaging in $L^1$ for the transport equation, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 557-562.

[13] Golse F., Saint-Raymond L., The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field. J. Math. Pures. Appl., 78 :791-817, 1999.

[14] Golse F., Saint-Raymond L., The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field in quasineutral regime, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 13, No.5 (2003) 661-714.

[15] Jabin P.E., Perthame B., Regularity in kinetic formulations via averaging lemmas, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 8, 761–774 (2002).

[16] Jabin J., Vega L., A Real Space Method for Averaging Lemmas, J. de Math. Pures et Appl., 83, 1309–1351 (2004).

[17] NGUETSENG G., A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, SIAM J. Math. Anal. Vol 20, No. 3, pp608-623, 1989.

[18] SAINT-RAYMOND L., The gyrokinetic approximation for the Vlasov-Poisson system. Math. Mod. Meth. Appl. Sci., 10(9) :1305-1332, 2000.

[19] SAINT-RAYMOND L., Control of large velocities in the two-dimensional gyrokinetic approximation, J. Math. Pures Appl. 81 (2002) 379-399.

[20] VILLANI C., A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. In Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, S. Friedlander and D. Serre, Eds, Elsevier Science, 2002.