Équations d'Euler: existence locale d'une solution et critère d'explosion

sujet proposé par Olivier Glass

Raphaël Hoonakker

22 juin 2009

1 Introduction

1.1 Présentation des équations d'Euler

Les équations d'Euler décrivent la dynamique des fluides incompressibles non visqueux. Elles régissent le mouvement d'un fluide sous l'influence du champ de pression qui y règne. Pour comprendre leur origine, considérons un fluide incompressible contenu dans un volume Ω. Notons $u(x,t)$ le champ de vitesse du fluide, $p(x,t)$ le champ de pression et ρ la masse volumique. On s'intéresse à la dynamique d'une particule de position $x(t)$. Sa vitesse est alors $v(t) = u(x(t),t)$ et son accélération $\frac{dv}{dt} = (\frac{dx}{dt}.\nabla)u + \frac{\partial u}{\partial t}$. Par le principe fondamental de la dynamique, on a

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p,$$

et donc

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho(u.\nabla)u + \nabla p = 0.$$

Par ailleurs, la condition d'incompressibilité se traduit par un flux du champ de vitesse nul au bord de tout sous-volume et donc, via la formule de Stokes, par une divergence nulle du champ de vitesse. En normalisant la masse volumique ρ, on obtient donc les équations d'Euler :

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \tag{1}$$

$$\text{div } u = 0. \tag{2}$$

En présence d'un champ de force supplémentaire s'exerçant sur le fluide, un second membre apparaît dans l'équation (1) qui devient :

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f.$$

Par ailleurs, lorsque l'on ne néglige pas la viscosité (notée ν) du fluide, un terme supplémentaire apparaît et on obtient l'équation de Navier-Stokes :

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nu\Delta u + \nabla p = 0,$$

$$\text{div } u = 0.$$

Nous renvoyons à l'ouvrage *Vorticity and Incompressible Flow*, de Majda et Bertozzi [8] pour une étude très complète de ces équations. L'ouvrage *Hydrodynamique physique* de Guyon, Hulin et Petit [5] constitue quant à lui une référence pour les aspects physiques du problème.

Nous ne considérerons par la suite que les équations d'Euler : on suppose que la viscosité est nulle. En dimension deux d'espace, l'existence globale d'une solution régulière (globale signifie : définie pour tout temps) a été établie dès 1933 par Wolibner (voir [10]). En dimension trois, Ebin et Marsden ont montré un résultat d'existence locale de la solution (voir [3]). Par contre, on ne sait pas encore s'il existe une solution globale de l'équation. Néanmoins, des critères d'explosion ont été mis en évidence, tel celui de Beale, Kato et Majda (1984) : si une solution explose (en temps fini), alors le rotationnel de u (ou vorticité) devient infini. On en déduit par contraposée une condition suffisante pour qu'une solution puisse être définie sur tout le domaine de définition. D'autres critères ont plus récemment été montrés, tel celui de D. Chae (voir [2]).

Dans ce qui suit, on montre d'abord comment on établit l'existence locale de la solution de l'équation d'Euler dans les espaces de Sobolev H^s. On suit pour cela la méthode de R. Temam. Dans un second temps, on s'intéresse au critère d'explosion de Beale, Kato et Majda.

1.2 Notations

Ω désigne un ouvert borné et régulier de $\mathbb{R}^3$: on suppose que le bord de Ω peut être recouvert par un nombre fini de cartes locales de classe C^∞. On travaillera dans les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$, avec $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$ (le résultat d'existence locale est en fait vrai pour l'espace H^s avec s non entier, pour s assez grand, ainsi que pour les espaces $W^{m,p}$, pour m assez grand). On rappelle que pour $s \in \mathbb{N}$, H^s est l'ensemble des fonctions L^2 dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre s sont dans L^2. L'espace $H^s(\Omega)^3$ est l'analogue pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

On note $|.|_{L^p}$ la norme dans L^p, et (f, g) le produit scalaire de f et g dans L^2. On note par ailleurs $(f, g)_{H^s}$ et $|f|_{H^s}$ le produit scalaire et la norme dans $H^s(\Omega)$ ou dans $H^s(\Omega)^3$. Ainsi

$$(f, g)_{H^s} = \sum_{|\alpha| \leq s} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha g),$$

où pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$, ∂^α désigne la dérivée partielle selon α, et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

On pose enfin $X_s = \{v \in H^s(\Omega)^3, \text{div } v = 0, v.n = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, où n désigne le vecteur normal sortant de Ω. Cet espace est bien défini même pour $s = 0$; en effet, si v est une fonction L^2 de divergence nulle, on peut définir la trace normale $v.n$ via la formule de Stokes : $\forall \phi \in C^\infty(\overline{\Omega}), \int_{\partial\Omega} (v.n)\phi = -\int_\Omega v.\nabla\phi$.

1.3 Quelques résultats classiques d'analyse fonctionnelle

On rappelle tout d'abord les injections de Sobolev : comme la dimension est 3, on a $H^s \subset L^r$ où $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{s}{3}$ si $s < \frac{3}{2}$, $1 \leq r < \infty$ si $s = \frac{3}{2}$ et $r = \infty$ si $s > \frac{3}{2}$.

De plus, pour $s > \frac{3}{2}$, l'espace H^s est une algèbre pour la multiplication point par point des fonctions (voir [3]).

Par ailleurs, un champ $u \in L^\infty$ de divergence nulle et de partie normale nulle sur le bord (ou nul à l'infini dans le cas de l'espace tout entier) vérifie

$$((u.\nabla)w, w) = 0,\ \forall w \in H^1. \tag{3}$$

En effet, par la formule de Stokes,

$$((u\cdot\nabla)w, w) = \int_{R^3}\sum_{i=1}^{3} u_i\partial_i w \cdot w = \sum_{i=1}^{3}\int_{R^3} u_i\partial i\left(\frac{|w|^2}{2}\right) = \int_{R^3}\sum_{i=1}^{3}\partial_i u_i\frac{|w|^2}{2} = 0.$$

De plus, on vérifie par intégration par parties aussi que sous ces mêmes hypothèses, u est orthogonal à tout champ de gradient de partie normale nulle au bord ou à l'infini. Et réciproquement, un champ de vecteur orthogonal à X_s est un champ de gradient.

2 Existence locale de la solution de l'équation d'Euler

On montre l'existence locale d'une solution dans le cas d'un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$ (un résultat analogue existe dans l'espace tout entier, mais le cas où Ω est borné est un peu plus simple). On rajoute donc aux équations données en (1) la condition de non pénétration du fluide dans la paroi : $u.n = 0$ sur $\partial\Omega$. Les équations d'Euler que l'on considère dans cette section sont donc les suivantes :

$$\partial_t u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f, \text{sur } \Omega, \tag{4}$$

$$\text{div } u = 0, \text{sur } \Omega, \tag{5}$$

$$u.n = 0, \text{sur } \partial\Omega. \tag{6}$$

La méthode décrite ci-après est due à Roger Temam. On commence par établir une majoration de la norme H^s de la solution u si elle existe ; cette estimation sera primordiale pour montrer l'existence d'une solution par approximation, via un argument de compacité.

2.1 Estimation a priori de la solution

On suppose que u et p constituent une solution des équations d'Euler. On commence par montrer deux lemmes. Le premier donne une représentation de p en fonction de u.

Lemme 1 *Si u et p constituent une solution classique des équations d'Euler, alors*

$$\Delta p = \text{div } f - \sum_{1\le i,j\le 3}\partial_j u_i.\partial_i u_j, \text{sur } \Omega, \tag{7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = f.n + \sum_{1\le i,j\le 3} u_i u_j \phi_{i,j}, \text{sur } \partial\Omega, \tag{8}$$

où les fonctions $\phi_{i,j}$ dépendent seulement de $\partial\Omega$.

Preuve : La relation (7) s'obtient immédiatement en appliquant la divergence à l'équation (4) et en utilisant le fait que div $u = 0$.
Effectuons le produit scalaire de (4) avec n sur $\partial\Omega$. Comme $u.n = 0$ on a

$$\sum_{i,j} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} n_i + \frac{\partial p}{\partial n} = f.n. \tag{9}$$

Comme le bord de Ω est régulier, on peut le représenter par cartes locales ; on se place dans l'une d'entre elles : $\partial\Omega$ y est représenté par $\phi(x) = 0$ (ensuite il faut utiliser une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de cartes). On a alors

$$n(x) = \frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|}.$$

Comme $u(x).n(x) = 0$ sur $\partial\Omega$, on a $u(x).\nabla\phi(x) = 0$ et ainsi le gradient de $u(x).\nabla\phi(x)$ est parallèle à celui de ϕ (toujours sur $\partial\Omega$) ; il existe donc une constante k telle que

$$\partial_i(u.\nabla\phi) = k\partial_i\phi, \text{ puis}$$

$$\sum_j \partial_i u_j \partial_j \phi = -\sum_j u_j \partial_{ij}\phi + k\partial_i\phi.$$

Comme $u.n = 0$, on a en faisant le produit scalaire avec u :

$$\sum_{i,j} u_i \partial_i u_j \partial_j \phi = -\sum_{i,j} u_i u_j \partial_{i,j}\phi.$$

On divise alors par $|\nabla\phi|$, ce qui donne

$$\sum_{i,j} u_i \partial_i u_j n_j = -\sum_{i,j} u_i u_j \frac{\partial_{i,j}\phi}{|\nabla\phi|}.$$

En combinant avec la relation (9), on obtient (8) avec $\phi_{i,j} = \frac{\partial_{i,j}\phi}{|\nabla\phi|}$.

On donne alors par le second lemme une estimation quadratique de p en fonction de u.

Lemme 2 *Si $u \in L^\infty([0;T], H^{s+1}(\Omega))$ et $p \in L^\infty([0;T], H^{s+1}(\Omega))$ vérifient les équations d'Euler, alors pour tout $t > 0$, pour $s > \frac{5}{2}$,*

$$|\nabla p(t)|_{H^s} \leq c(|f(t)|_{H^s} + |u(t)|^2_{H^s}), \tag{10}$$

où la constante c ne dépend que de s et de Ω.

Remarque : Ce résultat est vrai aussi pour s est réel, d'où la condition $s > 5/2$. Néanmoins, la preuve est alors un peu plus difficile, aussi se limite-t-on ici à $s \in \mathbb{N}$.

Preuve : On utilise ici un résultat de régularité elliptique : si p appartient à H^{s+1}, alors les dérivées secondes de p sont controlées dans H^{s-1} par la norme H^{s-1} du laplacien de p (qui n'est qu'une combinaison linéaire des dérivées secondes) ainsi qu'un terme de bord. Plus précisément, on a la majoration :

$$|\nabla p|_{H^s} \leq c(|\Delta p|_{H^{s-1}(\Omega)} + |\frac{\partial p}{\partial n}|_{H^{s-1/2}(\partial\Omega)}),$$

où c est une constante ne dépendant que de Ω et de s. Pour une preuve de ce résultat, voir [4]. En combinant avec les relations établies dans le lemme précédent, on a l'inégalité

$$|\nabla p|_s \leq c\Big(\big|\mathrm{div}\ f - \sum_{i,j} \partial_j u_i \partial_i u_j\big|_{H^{s-1}(\Omega)} + \big|f.n + \sum_{i,j} u_i u_j \phi_{i,j}\big|_{H^{s-(1/2)}(\partial\Omega)}\Big).$$

On a déjà $|\mathrm{div}\ f|_{H^{s-1}} \leq c|f|_{H^s}$, et par le théorème de trace [1], $|f.n|_{H^{s-1/2}(\partial\Omega)} \leq c'|f|_{H^s(\Omega}$. De plus comme $s > 5/2$, H^{s-1} est une algèbre et

$$|\partial_j u_i \partial_i u_j|_{H^{s-1}} \leq c|\partial_j u_i|_{H^{s-1}}|\partial_i u_j|_{H^{s-1}},$$

où c dépend ici de s et de Ω. Ainsi,

$$|\partial_j u_i \partial_i u_j|_{H^{s-1}} \leq c|u|^2_{H^s}.$$

Il reste enfin à majorer $|\sum_{i,j} u_i u_j \phi_{i,j}|_{H^{s-(1/2)}(\partial\Omega)}$. Ce terme est inférieur à $c' \sum_{i,j} |u_i u_j|_{H^{s-(1/2)}(\partial\Omega)}$ où c' dépend de p et des $\phi_{i,j}$ c'est-à-dire de Ω. Comme $s - 1/2 > 1$, $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ est une algèbre et

$$\sum_{i,j} |u_i u_j|_{H^{s-(1/2)}(\partial\Omega)} \leq c|u_{|\partial\Omega}|^2_{H^{s-1/2}(\partial\Omega)} \leq c'|u|^2_{H^s(\Omega)},$$

la dernière inégalité venant du théorème de la trace. Ainsi, la relation (10) est bien vérifiée.

Majoration de la norme H^s : On en arrive à présent à la majoration de la norme $|u|_{H^s}$ pour u solution. Pour α un multi-indice de longueur inférieure à s, on applique ∂_α aux deux membres de l'équation (1). On prend ensuite le produit scalaire L^2 avec $\partial_\alpha u$. On obtient ainsi :

$$\frac{1}{2}\frac{d|\partial_\alpha u|^2_{L^2}}{dt} + \sum_j (\partial_\alpha(u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}), \partial_\alpha u) + (\partial_\alpha \nabla p, \partial_\alpha u) = (\partial_\alpha f, \partial_\alpha u).$$

En sommant sur α, pour $|\alpha| \leq s$, on a alors :

$$\frac{1}{2}\frac{d|u|^2_{H^s}}{dt} = -\sum_j (u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, u)_{H^s} - (\nabla p, u)_{H^s} + (f, u)_{H^s}. \tag{11}$$

On utilise la majoration suivante, due à Kato :

$$\big|\sum_j (u_j \frac{\partial u}{\partial x_j}, u)_{H^s}\big| \leq c|u|^3_{H^s},$$

où c ne dépend que de s (voir le lemme 3 ci-après). Par ailleurs, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(f, u)_{H^s} - (\nabla p, u)_{H^s} \leq |f|_{H^s}|u|_{H^s} + |\nabla p|_{H^s}|u|_{H^s} \leq c(|f(t)|_{H^s} + |u(t)|^2_{H^s})|u|_{H^s},$$

1. Rappelons l'on a une application continue $u \in H^s(\Omega) \mapsto u_{|\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ qui à une fonction H^1 associe sa trace sur le bord. Elle n'est en fait pas surjective. Par contre, on peut définir une application continue $u \in H^s(\Omega) \mapsto u_{|\partial\Omega} \in H^{s-1/2}(\partial\Omega)$, qui est surjective.

la dernière inégalité utilisant le lemme 2. Ainsi,

$$\frac{1}{2}\frac{d|u|_{H^s}^2}{dt} \leq c_1|u|_{H^s}^3 + c_2|f|_{H^s}|u|_{H^s},$$

d'où

$$\frac{d|u|_{H^s}}{dt} \leq c_1|u|_{H^s}^2 + c_2|f|_{H^s}. \tag{12}$$

Il est classique d'en déduire (voir le lemme 4 ci-dessous) que

$$|u(t)|_{H^s} \leq y(t), 0 \leq t < T_0, \tag{13}$$

où y est la solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = c_1y^2 + c_2|f|_{H^s}, y(0) = |u(0)|_{H^s}. \tag{14}$$

On remarque de plus que l'intervalle $[0, T_0[$ d'existence de $y(t)$ ne dépend que de $c_1, c_2, |f|_{H^s}$ et $|u(0)|_{H^s}$. Cette majoration de $|u(t)|_{H^s}$ sera utile pour montrer l'existence locale de la solution.

Pour compléter la preuve, il nous reste à démontrer deux lemmes :

Lemme 3 (T.Kato) *Soient $u \in H^s(\Omega)$ et $v \in H^{s+1}(\Omega)$ tels que* div $u =$ div $v = 0$. *Alors pour $s \geq 3$,*

$$|(u.\nabla)v|_{H^s} \leq c|u|_{H^s}|v|_{H^{s+1}}. \tag{15}$$

$$|((u.\nabla)v, v)_{H^s}| \leq c'|u|_{H^s}|v|_{H^s}, \tag{16}$$

où c et c' dépendent de s.

Preuve : La première majoration vient du fait que pour $s \geq 2$, H^s est une algèbre et ainsi

$$|(u.\nabla)v|_{H^s} \leq \sum_j |u_j\frac{\partial u}{\partial x_j}|_{H^s} \leq c|u|_{H^s}|\nabla v|_{H^s} \leq c|u|_{H^s}|v|_{H^{s+1}}.$$

Par densité des restrictions à Ω des fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ dans H^s, on peut supposer que u et v sont dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ pour montrer (16), car l'inégalité (15) assure le contrôle du terme bilinéaire $(u.\nabla)v$. Alors

$$((u.\nabla)v, v)_{H^s} = \sum_{|\alpha|\leq s}(\partial_\alpha[(u.\nabla)v], \partial_\alpha v), \tag{17}$$

où la somme porte sur des multi-indices. Or par la formule de Leibniz,

$$\partial_\alpha[(u.\nabla)v] = \sum_{0\leq\beta\leq\alpha} c_{\alpha,\beta}(\partial_\beta u.\nabla)\partial_{\alpha-\beta}v. \tag{18}$$

(On rappelle que dans cette expression, l'inégalité $\beta \leq \alpha$ signifie $\beta_i \leq \alpha_i$ pour $1 \leq i \leq 3$, et que la différence d'indices se fait terme à terme).
Comme div $u = 0$, et $u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a $((u.\nabla)\partial_\alpha v, \partial_\alpha v) = 0$ (voir le rappel en fin d'introduction), et donc le terme correspondant à $\beta = 0$ dans (18) est nul

dans (17). Pour avoir (16), il suffit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz de montrer que pour $|\beta| > 0$,

$$|(\partial_\beta u.\nabla)\partial_{\alpha-\beta} v|_{L^2} \le c|u|_{H^3}|v|_{|\alpha|} \quad \text{si } |\beta| = 1, 2 \tag{19}$$

$$|(\partial_\beta u.\nabla)\partial_{\alpha-\beta} v|_{L^2} \le c|u|_{H^{|\beta|}}|v|_{|\alpha|-|\beta|+3} \text{ si } |\beta| \ge 3. \tag{20}$$

Pour montrer ces inégalités, on utilise le fait que

$$|fg|_{L^2} \le c|f|_{H^2}|g|_{L^2}, \text{ et} |fg|_{L^2} \le c'|f|_{H^1}|g|_{H^1}. \tag{21}$$

La première inégalité vient de ce que $|fg|_{L^2} \le c|f|_\infty |g|_{L^2}$ et de l'injection de Sobolev de H^2 dans L^∞ en dimension 3. La seconde vient de l'inégalité de Hölder $|fg|_{L^2} \le c'|f|_{L^4}|g|_{L^4}$ et de l'injection de Sobolev de H^1 dans L^4.
Pour $|\beta| = 1$, on a $|\partial_\beta u|_{H^2} \le |u|_{H^3}$ et $|\nabla \partial_{\alpha-\beta} v|_{L^2} \le |v|_{H^{|\alpha}}$. On en déduit (19) à l'aide de (21). On utilise des inégalités similaires dans les autres cas : pour $|\beta| = 2$, on remarque que $|\partial_\beta u|_{H^1} \le |u|_{H^3}$, $|\nabla \partial_{\alpha-\beta} v|_{H^1} \le |v|_{H^{|\alpha|}}$, et pour $|\beta| \ge 3$, $|\partial_\beta u|_{L^2} \le |u|_{H^{|\beta|}}$, $|\nabla \partial_{\alpha-\beta} v|_{H^2} \le |v|_{H^{|\alpha|-|\beta|+3}}$.

Lemme 4 *Supposons que u vérifie l'inégalité différentielle (12) (on change de notation : on remplace $|u|_{H^s}$ par u) et que y vérifie l'équation différentielle (14) sur $[0, T_0]$. Alors $\forall t \in [0, T_0], u(t) \le y(t)$.*

Preuve : Soit $\epsilon > 0$ et y_ϵ la solution de l'équation différentielle (14) mais avec la condition initiale $y_\epsilon(0) = u(0) + \epsilon$. On pose $T_\epsilon = \sup\{t > 0, u(t) \le y_\epsilon(t)\}$. Pour $t \le T_\epsilon$, on a $u(t) \le y_\epsilon(t)$ et donc au regard des relations différentielles (12) et (14), c_1 étant positif,

$$u'(t) \le y'_\epsilon(t).$$

Donc $u - y_\epsilon$ décroit sur $[0; T]$, puis $u(T) \le y_\epsilon(T) - \epsilon$ ce qui implique que $T_\epsilon = T_0$. Donc

$$u(t) \le y_\epsilon(t) \text{ sur } [0; T].$$

On en déduit l'inégalité cherchée en faisant tendre ϵ vers 0, par continuité de la solution de (14) par rapport à la condition initiale (théorème de Cauchy-Lipschitz).

2.2 Le théorème d'existence locale de la solution

Dans cette section, on énonce et démontre le théorème d'existence locale et d'unicité de la solution de l'équation d'Euler.
Notation : Si E est un espace vectoriel normé, on désigne par $L^\infty([0; T_*], E)$ l'ensemble des fonctions u de $[0; T_*]$ dans E telles que $u(t)$ soit borné dans E uniformément en t.

Théorème 1 (R. Temam) *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$ et $s > 5/2$. Alors pour toute condition initiale $u_0 \in H^s(\Omega)^3$ vérifiant (5) et (6) et tout second membre $f \in L^1([0; T], H^s)$, il existe $T_* > 0$ et un couple (u, p),*

$$u \in L^\infty([0; T_*], H^s(\Omega)^3) \; unique, et$$

$$p \in L^\infty([0; T_*], H^{s+1}(\Omega)) \; unique \text{ à } une\ fonction\ du\ temps\ près,$$

solution des équations d'Euler (4), (5) et (6).

Remarques :
- Le temps T_* ne dépend que de Ω et des normes H^s de f et de u_0, comme le montrera la preuve. Cela sera utile dans la démonstration du critère de J.T Beale, T. Kato et A. Madja.
- Ce théorème est vrai aussi pour $s > 5/2$ réel, ainsi que pour les espaces $W^{m,p}$ avec la condition $m > 1 + (3/p)$. De plus, il se généralise en dimension N supérieure à 3 (dans ce cas, il faut supposer $m > 1 + (N/p)$).

Preuve : Commençons par montrer l'unicité de la solution. Soient (u_1, p_1) et (u_2, p_2) deux solutions des équations (4),(5) et (6). Posons $\tilde{u} = u_1 - u_2$. Par différence, on a

$$\partial_t u_1 - \partial_t u_2 + (u_1 \cdot \nabla)u_1 - (u_2 \cdot \nabla)u_2 + \nabla p_1 - \nabla p_2 = 0, \text{ puis}$$

$$\partial_t \tilde{u} + (u_1 \cdot \nabla)\tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla)u_2 + \nabla \tilde{p} = 0.$$

On prend le produit scalaire, dans L^2, avec $\tilde{u}$:

$$\frac{1}{2}\frac{d|\tilde{u}|_{L^2}^2}{dt} + ((u_1 \cdot \nabla)\tilde{u}, \tilde{u}) + ((\tilde{u} \cdot \nabla)u_2, \tilde{u}) + (\nabla \tilde{p}, \tilde{u}) = 0.$$

Comme div $u_1 = 0$, le second terme est nul, et comme div $\tilde{u} = 0$, le dernier terme est nul. Par ailleurs, $|(\tilde{u} \cdot \nabla)u_2|_{L^2} \leq |\tilde{u}|_{L^2}|\nabla u_2|_\infty$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc

$$\frac{1}{2}\frac{d|\tilde{u}|_{L^2}^2}{dt} = -((\tilde{u} \cdot \nabla)u_2, \tilde{u}) \leq |\tilde{u}|_{L^2}^2 |\nabla u_2|_\infty.$$

Le lemme de Gronwall assure alors que $|\tilde{u}|_{L^2} = 0$, d'où $u_1 = u_2$. Ceci achève la preuve de l'unicité de la solution.

Pour montrer l'existence d'une solution, on applique une méthode dite de Galerkine. On commence par définir une base hilbertienne (w_k) de l'espace $X_s \subset H^s$ défini en introduction. Cette base est choisie de telle manière qu'elle est aussi orthogonale dans l'espace L^2. La méthode de Galerkine consiste à projeter l'équation d'Euler (4) sur les sous-espaces de dimension finie de H^s engendrés par les modes $w_1, ..., w_N$, pour $N \in \mathbb{N}$. Les équations obtenues ont chacune une solution, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, définie sur $[0; T_N]$. Il s'agit alors de montrer que les temps T_N ne dépendent en fait pas de N, et que les solutions sont uniformément bornées dans H^s, grâce aux majorations établies dans la partie 1.1. On obtient alors une solution locale de l'équation d'Euler initiale en passant à la limite par un argument de compacité.

Première étape :

L'espace X_s est muni de la restriction du produit scalaire de H^s. Par le théorème de Riesz, pour tout $g \in X_0$, il existe un unique $w(g) \in X_s$, tel que

$$\forall v \in X_s, (w(g), v)_{H^s} = (g, v).$$

L'injection $X_s \hookrightarrow X_0$ étant compacte car Ω borné (théorème de Rellich-Kondrachov), l'application linéaire

$$w : X_0 \to X_0, g \mapsto w(g)$$

est compacte. De plus, pour $g, g' \in X_0$,

$$(w(g), g') = ((w(g), w(g'))_{H^s} = (g, w(g')),$$

et donc w est un opérateur auto-adjoint. On en déduit que w est diagonalisable en une base hilbertienne orthonormée (w_k). Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $w_k \in X_s$ (car $w_k \in w(X_0)$) et

$$\forall v \in X_s, (w_k, v)_{H^s} = \lambda_k(w_k, v). \tag{22}$$

Étape 2 :

On définit à présent les solutions des équations projetées sur les w_k, pour $1 \leq k \leq N$. Soit N un entier strictement positif. Soient $g_1^{(N)}, ..., g_N^{(N)} \in C^1(\mathbb{R})$ et

$$u_N = \sum_{k=1}^{N} g_k^{(N)} w_k.$$

On considère l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}(u_N, w_k) + ((u_N.\nabla)u_N, w_k) = (f, w_k), \quad 1 \leq k \leq N, \tag{23}$$

$$u_N(0) = P_N u_0, \tag{24}$$

où P_N désigne la projection orthogonale sur l'espace engendré par $w_1, ..., w_N$, dans X_0 (et dans X_m par la relation (22)). En fonction des $g_k^{(N)}$, l'équation (23) se réécrit

$$\frac{dg_k^{(N)}}{dt} + \sum_{j=1}^{3}(\sum_{i=1}^{N} g_i^{(N)}(w_i, e_j)) \sum_{l=1}^{N} g_l^{(N)}(\partial_i w_l, w_k) = (f, w_k) \tag{25}$$

Le second terme est polynomial en les $g_k^{(N)}$, donc localement lipschitzien et donc le théorème de Cauchy-Lipschitz assure pour toute condition initiale l'existence d'une solution de (25) sur un intervalle maximal $[0, T_N]$. Il existe ainsi une solution u_N de (23) vérifiant la condition initiale (24).

Montrons que les solutions u_N sont en fait définies sur tout l'intervalle $[0; T]$, pour tout N. Pour cela, on multiplie l'équation (23) par g_k et on somme sur k. On a déja vu que $((u_N.\nabla)u_N, u_N) = 0$, et donc on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d|u_N|_{L^2}^2}{dt} = (f, u_N) \leq |f|_{L^2}|u_N|_{L^2}. \tag{26}$$

Ainsi $\frac{d|u_N|_{L^2}}{dt}$ est borné sur les intervalles de longueur finie et $|u_N|_{L^2}$ aussi ; donc la solution u_N n'explose pas en temps fini mais est définie sur tout $[0, T]$.

Étape 3 :

On montre ensuite que (u_N) est bornée dans $L^\infty([0, T_*], H^s(\Omega))$ pour un certain temps $T_* > 0$. D'après la relation (23), comme $w_k \in X_0$, on a

$$\frac{d}{dt}(u_N, w_k) + (P[(u_n.\nabla)u_N], w_k) = (P(f), w_k), \quad 1 \leq k \leq N, \tag{27}$$

où P a été défini en introduction. Comme $f \in X_s$, on peut montrer que $Pf \in X_s$. De plus, on admet que les w_k sont en fait C^∞, donc dans X^{s+1} et alors $P[(u_N.\nabla)u_N] \in X^s$. On peut ainsi appliquer (22) après avoir multiplié (27) par λ_k :

$$\frac{d}{dt}(u_N, w_k)_{H^s} + (P[(u_n.\nabla)u_N], w_k)_{H^s} = (P(f), w_k)_{H^s}.$$

On multiplie par g_k et somme sur k, ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d|u_N|^2_{H^s}}{dt} = (P(f-(u_N.\nabla)u_N), u_N)_{H^s}. \tag{28}$$

Or un champ de vecteurs orthogonal à X_s est un champ de gradient donc il existe $p_N \in H^{s+1}$ tel que

$$P[f-(u_N.\nabla)u_N] - (f-(u_N.\nabla)u_N) = -\nabla p_N.$$

Cette relation est très proche de (4) ; en fait, pour montrer le lemme 1, on a seulement utilisé la propriété $\partial_t u \in X_0$ pour éliminer ce terme lorsque l'on prend la divergence ou le produit scalaire avec n. Comme $(P-I)[f-(u_N.\nabla)u_N]$ appartient aussi à X_0, on peut appliquer le lemme 1, puis le lemme 2 et obtenir (7), (8) puis (10) pour u_N et p_N. Ensuite, la relation (11) s'obtient pour u_N et p_N à partir de (23) et en utilisant (28). On en déduit que (12) est vérifiée, puis comme $|u_N(0)|_{H^s} \leq |u_0|_{H^s}$ (inégalité de projection), on a donc

$$|u_N(t)|_{H^s} \leq y(t), 0 \leq t < \min(T, T_0),$$

où y est solution de (14) avec la condition initiale $y(0) = |u_0|_{H^s}$. Ainsi, si on fixe $T_* < \min(T, T_0)$,

$$u_N \text{ est bornée dans } L^\infty([0;T_*], H^s(\Omega)^3). \tag{29}$$

De plus, les w_k formant un système orthonormal, la relation (27) montre que

$$\frac{du_N}{dt} = P_N P(f-(u_N.\nabla)u_N),$$

et donc

$$|\frac{du_N}{dt}|_{L^2} \leq |f-(u_N.\nabla)u_N|_{L^2} \leq |f|_{L^2} + |u_N|_\infty |\nabla u_N|_{L^2}.$$

Puisque (u_N) est bornée dans H^s par (20), et $s \geq 2$, (u_N) est bornée dans L^∞ par une injection de Sobolev et ainsi

$$(\frac{du_N}{dt}) \text{ est bornée dans } L^\infty([0;T_*], L^2(\Omega)^3). \tag{30}$$

Étape 4 :

A l'aide des majorations obtenues, on utilise finalement un argument de compacité pour obtenir une solution des équations d'Euler initiales. Les majorations (29) et (30) permettent d'obtenir que

$$(u_N) \text{ est bornée dans } H^1([0;T_*] \times \Omega).$$

Par le théorème de Rellich-Kondrachov, il existe une sous-suite de (u_N) (encore notée (u_N)) convergeant (fortement) dans $L^2([0;T_*] \times \Omega)$:

$$u_N \to u \in L^2([0;T_*] \times \Omega), \quad \text{dans } L^2([0;T_*] \times \Omega), \text{ et} \tag{31}$$

$$\partial_t u_N \rightharpoonup \partial_t u \in L^2([0;T_*] \times \Omega), \quad \text{dans } L^2([0;T_*] \times \Omega). \tag{32}$$

Comme (u_N) est bornée dans H^s, pour $|\alpha| \leq s$, $\partial_\alpha u_N$ est borné dans $L^2(\Omega)$ et donc converge (à extraction près) faiblement dans $L^2(\Omega)$. Par unicité des limites on en déduit que $u(t) \in H^s$ et que $\partial_\alpha u_N(t)$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers $\partial_\alpha u(t)$ pour tout $t \leq T_*$. D'après (30), on a une majoration de la norme H^s des u_N uniforme en t, qui est valable pour la limite faible u (en utilisant l'inégalité $|u(t)|_{H^s} \leq \liminf |u_N(t)|_{H^s}$). Ainsi,

$$u \in L^\infty([0;T_*], H^s(\Omega)). \tag{33}$$

Fixons $k \geq 1$. Il s'agit de passer à la limite dans (23). Par convergence faible de $\partial_t u_N$, le premier terme de (23) tend vers $\partial_t(u, w_k)$. Pour le second, on a

$$((u_N.\nabla)u_N, w_k) = \sum_j ((u_N)_j \partial_j u_N, w_k)_{L^2}$$

$$= \sum_j (\partial_j u_N, (u_N)_j w_k)_{L^2} \to \sum_j (\partial_j u, u_j w_k)_{L^2},$$

car $\partial_j u_N$ converge faiblement vers $\partial_j u$, et $(u_N)_j v$ converge fortement vers $u_j v$. On a donc, en passant à la limite dans (23),

$$\frac{d}{dt}(u, w_k) + ((u.\nabla)u, w_k) = (f, w_k),$$

et ce pour tout $k \geq 1$. Les w_k étant denses dans X_0, on a en fait

$$\frac{d}{dt}(u, v) + ((u.\nabla)u, v) = (f, v), \forall v \in X_0, \tag{34}$$

et par (24),

$$u(0) = u_0. \tag{35}$$

Les relations voulues (5) et (6) sont bien vérifiées par u. L'équation (34) affirme que $\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - f$ est orthogonal à X_0, on peut donc l'écrire comme un champ de gradient, ce qui donne (4).
On a ainsi montré l'existence d'une solution sur $[0;T_*]$, ce qui achève la preuve du théorème.

3 Critère d'explosion de la solution

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement global de la solution. On se place ici dans l'espace tout entier : $\Omega = \mathbb{R}^3$ (Un résultat analogue est vrai dans un domaine borné, mais demande quelques ajustements techniques). Comme on l'a dit, il n'y a pas à ce jour de résultat général d'existence globale d'une solution des équations d'Euler, mais néanmoins certains critères d'explosion des solutions ont été dégagés. Nous allons considérer l'un des plus importants, établi dans les années 1980 par J.T Beale, T. Kato et A. Majda. Ce critère porte sur la vorticité $\omega = \text{rot } u$ qui décrit la rotation infinitésimale du fluide. Il affirme que si une solution explose en temps fini, alors nécessairement la vorticité tend aussi vers l'infini en un sens précisé dans le théorème. Comme on va le remarquer, le critère analogue portant sur ∇u et non sur rot u est plus simple, mais le théorème tire sa motivation de ce que la vorticité rot u a un sens physique particulièrement important.

3.1 L'énoncé du théorème

Théorème 2 (J.T Beale, T. Kato et A. Majda) *Soit* $u \in C([0, T_*[; H^s) \cap C^1([0, T_*[; H^{s-1})$ *(où* $s > 5/2$*) une solution des équations d'Euler (1),(2). On suppose que l'on ne peut pas prolonger* u *(i.e. il n'existe pas de* $T > T_*$ *et de* $v \in C([0, T]; H^s) \cap C^1([0, T]; H^{s-1})$ *solution coïncidant avec* u *sur* $[0; T_*[$*) Alors*

$$\int_0^{T_*} |\omega(t)|_\infty dt = \infty,$$

où $\omega(t) := \text{rot } u \in H^{s-1}$*. En particulier,* $\limsup_{t \to T_*} |\omega(t)|_\infty = \infty$.

Par contraposée, on a aussi l'énoncé suivant :

Corollaire 1 *Soit* u *une solution de l'équation d'Euler pouvant être prolongée à tout intervalle* $[0; T]$ *pour* $T < T_*$ *(on note aussi* u *le prolongement à* $[0; T[$ *ainsi obtenu). On suppose qu'il existe une constante* M_0 *telle que pour tout* $T < T_*$*, le rotationnel* $\omega = \text{rot } u$ *vérifie*

$$\int_0^{T} |\omega(t)|_\infty dt \leq M_0 < \infty. \tag{36}$$

Alors la solution u *peut être prolongée à tout l'intervalle* $[0; T_*]$.

Remarque : Comme précisé plus haut, le théorème est à plus forte raison vrai pour la quantité $|\nabla u|_\infty$ au lieu de $|\omega|_\infty$. Dans ce cas, la preuve est plus simple : il suffit des deux premières étapes de la démonstration ci-après (voir la majoration (40)).

3.2 Démonstration

On démontre en réalité le corollaire 1. On en reprend les notations et on suppose l'existence de la constante M_0. Dans une première étape, on montre qu'il suffit que $|u(t)|_{H^s}$ soit borné pour pouvoir prolonger u au delà de T_*. On majore ensuite $|u(t)|_{H^s}$ par un terme faisant intervenir $|\nabla u(t)|_\infty$, que l'on estime à son tour en fonction de $|\omega|_\infty$ et de $|\omega|_{L^2}$ (la norme $|u|_{H^3}$ apparaîtra aussi mais sous forme logarithmique). Après avoir majoré la norme L^2 de ω, on conclut la preuve du théorème.

Étape 1 :

Supposons que $u \in C([0, T_*[; H^s) \cap C^1([0, T_*[; H^{s-1})$ soit solution de (1), et que $C = \sup_{t < T_*} |u(t)|_s < \infty$. Par le théorème d'existence locale de l'équation d'Euler, si l'on fixe $t_1 \in [0; T[$, il existe une solution de (1),(2) coïncidant avec u en t_1 et définie sur $[t_1, t_1 + T_0]$. Ici, T_0 ne dépend que de C, pas de t_1. Si on choisit $t_1 > T_* - T_0$, on obtient un prolongement de u, défini sur $[0; t_1 + T_0]$ et solution de (1),(2). On a ainsi prolongé u en une solution définie au moins sur $[0; T_*]$.

Il suffit donc de montrer que la norme H^s de $u(t)$ est bornée en temps.

Étape 2 :

On estime ici $|u(t)|_{H^s}$ en fonction de $|\nabla u|_\infty$. Fixons α un multi-indice de taille inférieure à s. En dérivant (1) suivant ce multi-indice, on obtient

$$\partial_t(\partial_\alpha u) + (u \cdot \nabla)(\partial_\alpha u) + \nabla(\partial_\alpha p) = -F, \tag{37}$$

où $F = \partial_\alpha((u \cdot \nabla)u) - (u \cdot \nabla)(\partial_\alpha u)$. On applique alors l'inégalité

$$|\partial_\alpha(fg) - f\partial_\alpha g|_{L^2} \leq C(|f|_{H^s}|g|_\infty + |\nabla f|_\infty |g|_{H^{s-1}}),$$

à $f = u$ et $g = \nabla u$ (cette inégalité se montre à partir de celle de Gagliardo-Nirenberg ; voir le lemme 5 en fin de démonstration pour plus de détails). On obtient ainsi que

$$|F|_{L^2} \leq C|\nabla u|_\infty |u|_{H^s}. \tag{38}$$

Effectuons le produit scalaire (dans L^2) de $\partial_\alpha u$ avec les membres de (37) :

$$(\partial_\alpha u, \partial_t \partial_\alpha u) + (\partial_\alpha u, (u \cdot \nabla)\partial_\alpha u) + (\partial_\alpha u, \nabla \partial_\alpha p) = -(\partial_\alpha u, F). \tag{39}$$

Comme div $u = 0$ et $u.n = 0$ sur $\partial\Omega$, on a $((u \cdot \nabla)w, w) = 0$ pour $w \in H^1$. Ainsi, $(\partial_\alpha u, (u \cdot \nabla)\partial_\alpha u) = 0$.
De plus, un champ de gradient est orthogonal à un champ de vecteur de divergence nulle. On a donc $(\partial_\alpha u, \nabla \partial_\alpha p) = 0$.
L'équation (39) se simplifie donc en $\partial_t |\partial_\alpha(u)|^2 = -2(\partial_\alpha u, F)$. En utilisant l'inégalité de Hölder et la majoration (38), on a donc $\partial_t |\partial_\alpha(u)|^2 \leq 2C|\nabla u|_\infty |u|_{H^s}^2$.
On intègre finalement cette équation et on obtient :

$$|u(t)|_{H^s} \leq |u(0)|_{H^s} \exp(C \int_0^t |\nabla u(\tau)|_\infty d\tau) \tag{40}$$

Remarque : Lorsque div $u = 0$ sur Ω, $u.n = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\omega =$ rot u, il existe pour tout $1 < p < \infty$ une constante C telle que $|\nabla u|_{L^p} \leq C|\omega|_{L^p}$. Ici, on voudrait l'appliquer à $p = \infty$, ce qui achèverait la démonstration du théorème, mais le résultat tombe en défaut pour $p = \infty$. C'est pourquoi on doit passer par la majoration (41). Le fait que ce soit un cas limite explique, de manière informelle, la présence d'un logarithme dans cette majoration.

Étape 3 :

On va maintenant établir une estimation de $|\nabla u|_\infty$ en fonction de $|\omega|_{L^2}$ et de $|\omega|_\infty$. Le but de cette étape est de montrer l'inégalité suivante :

$$|\nabla u|_\infty \leq C(1 + (1 + \log^+ |u|_3)|\omega|_\infty + |\omega|_{L^2}), \tag{41}$$

où C désigne une constante universelle et $\log^+ a = \sup(0, \log a)$.

Puisque l'on s'est placé dans $\mathbb{R}^3$, on peut utiliser l'expression de u en fonction de $\omega = \text{rot } u$ donnée par la loi de Biot et Savart : pour $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x,y) \wedge \omega(y) dy,$$

où $K(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{(x-y)}{|x-y|^3}$.

Soit $\rho \leq 1$ et $\zeta_\rho(x)$ de classe C^∞ telle que $\zeta_\rho(x) = 1$ si $|x| < \rho$, $\zeta_\rho(x) = 0$ si $|x| > 2\rho$ et $|\nabla \zeta_\rho(x)| \leq \frac{2}{\rho}$. On a alors

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x,y)(\omega(y))\zeta_\rho(x-y)dy + \int_{\mathbb{R}^3} K(x,y)(\omega(y))(1-\zeta_\rho(x-y)),$$

puis par dérivation sous l'intégrale,

$$\nabla_x u(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \nabla_x K(x,y)(\omega(y))dy}_{\textit{noté } \nabla u^{(1)}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \nabla_x \big(K(x,y)\omega(y)(1-\zeta_\rho(x-y))\big)dy}_{\textit{noté } \nabla u^{(2)}}.$$

– Estimons d'abord $\nabla u^{(1)}$. Par antisymétrie de $K(x,y)$, on a

$$\nabla u^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla_x K(x,y))\omega(y)dy = -\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla_y K(x,y))\omega(y)dy,$$

puis par la formule de Stokes,

$$\nabla u^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^3} (K(x,y))\nabla_y \omega(y)dy.$$

On remarque que $y \mapsto K(x-y)$ appartient à $L^p(y \in \mathbb{R}^3, |x-y| < 2\rho)$ pour $p < 3/2$ (en effet, $y \mapsto |x-y|^{-2p}$ est intégrable au voisinage de x si $2p < \dim(\mathbb{R}^3)$). Prenons p=4/3. L'inégalité de Hölder donne

$$|\nabla u^{(1)}| \leq |K|_{L^{4/3}(y:|x-y|<2\rho)} |\nabla \omega|_{L^4(y:|x-y|<2\rho)}.$$

Or à l'aide des coordonnées sphériques, on trouve que $|K|_{L^{4/3}(y:|x-y|<2\rho)}$ est proportionnel à $\rho^{\frac{1}{4}}$. Par ailleurs, on a l'inégalité de Sobolev $|\nabla\omega|_{L^4} \leq C|\nabla\omega|_{H^1}$. Comme $|\nabla\omega|_{H^1} \leq |u|_{H^3}$, on obtient finalement

$$|\nabla u^{(1)}| \leq C\rho^{\frac{1}{4}} |u|_{H^3}. \tag{42}$$

– Majorons maintenant $\nabla u^{(2)}$. La fonction $y \mapsto \nabla_x \big(K(x,y) \wedge \omega(y)(1-\zeta_\rho(x-y))\big)$ est nulle sur le domaine $|x-y| \leq \rho$, et on note $\nabla u^{(2),\leq 2}$ son intégrale sur le domaine $\rho \leq |x-y| \leq 2$ et $\nabla u^{(2),>2}$ son intégrale sur le domaine $|x-y| > 2$. Ainsi, $\nabla u^{(2)} = \nabla u^{(2),\leq 2} + \nabla u^{(2),>2}$.
  – Pour $\nabla u^{(2),\leq 2}$, on utilise la relation $\nabla(f \wedge g) = (\nabla f) \wedge g + f \wedge (\nabla g)$, puis les majorations $|\nabla K(x-y)| \leq C|x-y|^{-3}$ et $|\nabla \zeta_\rho| \leq 2\rho^{-1}$. On obtient ainsi, en utilisant les coordonnées sphériques :

$$\nabla u^{(2),\leq 2} \leq C\Big(\int_\rho^2 r^{-3} r^2 dr + \int_\rho^{2\rho} r^{-2}\rho^{-1} r^2 dr\Big)|\omega|_\infty$$

, d'où

$$\nabla u^{(2),\leq 2} \leq C(\log 2 - \log\rho + 1)|\omega|_\infty. \tag{43}$$

- Pour $\nabla u^{(2),>2}$: on a $\zeta_\rho(x-y) = 0$ pour $|x-y| > 2$ et l'inégalité $|\nabla K| \leq C|x-y|^{-3}$ montre que ∇K est dans $L^2(y : |x-y| > 2)$. Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\nabla u^{(2),>2} \leq C^{'}|\omega|_{L^2}. \tag{44}$$

- Avec (42), (43) et (44), on obtient

$$|\nabla u|_\infty \leq C\big(\rho^{\frac{1}{4}}|u|_{H^3} + (1-\log(\rho))|\omega|_\infty + |\omega|_{L^2}\big), \tag{45}$$

où C est une constante. Pour obtenir l'inégalité (41), il faut prendre une valeur convenable pour ρ. Si $|u|_{H^3} \leq 1$, on choisit $\rho = 1$. Sinon, on prend $\rho = |u|_{H^3}^{-4}$, et (41) est vérifiée dans les deux cas.

Étape 4 :

Dans cette étape, on estime la norme de $\omega(t)$ dans L^2. En appliquant le rotationnel aux deux membres de l'équation d'Euler (1), on a :

$$\partial_t\omega + \text{rot }((u\cdot\nabla)u) = 0.$$

On vérifie par exemple avec les expressions en coordonnées cartésiennes que rot $((u\cdot\nabla)u) = (u\cdot\nabla)(\text{rot } u) - (\text{rot } \ u\cdot\nabla)u$. Ainsi :

$$\partial_t\omega + (u\cdot\nabla)(\omega) = (\omega\cdot\nabla)u. \tag{46}$$

On effectue le produit scalaire avec ω, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\frac{d|\omega|_{L^2}^2}{dt} = ((\omega\cdot\nabla)u, \omega). \tag{47}$$

Or u s'exprime partir de son rotationnel ω :

$$u = -\text{rot }(\Delta^{-1}\omega).$$

La transformée de Fourier "échangeant dérivation et moments", on a donc une relation entre les transfomées de Fourier de ∇u et de ω du type

$$\widehat{\nabla u}(\zeta) = S(\zeta)\hat{\omega}(\zeta),$$

où S est une matrice bornée en ζ (ses termes sont de la forme $\dfrac{\zeta_i\zeta_j}{|\zeta|^2}$), et donc il existe une constante C telle que $|\nabla u|_{L^2} \leq C|\omega|_{L^2}$. En combinant cette inégalité et la relation (47), on obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\frac{d|\omega|_{L^2}^2}{dt} \leq 2C|\omega(t)|_\infty|\omega|_{L^2}^2.$$

Cette inégalité différentielle donne :

$$|\omega(t)|_{L^2} \leq |\omega(0)|_{L^2}\exp(C\int_0^t|\omega(\tau)|_\infty d\tau) \leq |\omega(0)|_{L^2}\exp CM_0.$$

Ainsi, $\omega(t)$ est borné dans L^2.

Étape 5 :

On achève à présent la démonstration du théorème. En combinant l'inégalité (41) et le résultat de l'étape 4, on a :

$$|\nabla u|_\infty \leq C\big(1 + (1 + \log^+ |u|_{H^3})|\omega|_\infty\big),$$

où C désigne une constante dépendant de M_0. Par concavité du logarithme, $1 + \log^+(x) \leq 2\log(x + e)$, d'où :

$$|\nabla u|_\infty \leq C\big(1 + \log(|u|_{H^3} + e)|\omega|_\infty\big).$$

Posons $y(t) = |u(t)|_{H^s} + e$. En injectant l'inégalité précédente dans l'inégalité (40), on obtient :

$$y(t) \leq |u(0)|_{H^s} \exp\Big(C\int_0^t (1 + |\omega(\tau)|_\infty log(y(t)))d\tau\Big) + e,$$

puis par convexité de l'exponentielle,

$$y(t) \leq C \exp\Big(C' \int_0^t |\omega(\tau)|_\infty \log y(t)\Big) d\tau,$$

où les constantes C et C' dépendent de M_0, de T_* et de $|u(0)|_{H^s}$. On pose $z(t) = \log y(t)$ et alors

$$z(t) \leq \log(C) + C' \int_0^t |\omega(\tau)|_\infty z(\tau) d\tau.$$

Par le lemme de Gronwall, on a donc la majoration :

$$z(t) \leq \log(C) \exp(C' \int_0^{T_*} |\omega(\tau)|_\infty d\tau) = \log(C) \exp(C' M_0).$$

Ainsi, $|u(t)|_{H^s}$ est majoré par une constante, ce qui conclut la preuve d'après l'étape 1.

Finalement, il nous reste à montrer l'inégalité admise au début de l'étape 2. Elle découle du lemme suivant :

Lemme 5 (S.Klainerman et A.Majda) *Soit $f, g \in H^s$ et α un multi-indice de taille $N \leq s$. Alors*

$$|\partial_\alpha(fg)|_{L^2} \leq C_N(|f|_\infty |D^N g|_{L^2} + |g|_\infty |D^N f|_{L^2}), \tag{48}$$

$$|\partial_\alpha(fg) - f\partial_\alpha g|_{L^2} \leq C_N(|Df|_\infty |D^{N-1} g|_{L^2} + |g|_\infty |D^N f|_{L^2}). \tag{49}$$

Preuve : La preuve se base sur l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (que l'on ne montre pas ici) :

$$|D^i f|_{L^{2r/i}} \leq C_r |f|_\infty^{1-r/i} |D^r f|_{L^2}^{i/r}, \tag{50}$$

pour $r \geq i \geq 0$. En appliquant la formule de Leibniz, puis l'inégalité de Hölder, puis la relation (50), on a :

$$|\partial_\alpha(fg)|_{L^2} \leq C_\alpha \sum_{\beta+\gamma=\alpha} |\partial_\beta f \partial_\gamma g|_{L^2} \leq C_\alpha \sum_{\beta+\gamma=\alpha} |\partial_\beta f|_{L^{2N/|\beta|}} |\partial_\gamma g|_{L^{2N/|\gamma|}}$$

$$\leq C_\alpha \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_\beta C_\gamma (|f|_\infty |D^N g|)^{|\gamma|/N} (|g|_\infty |D^N f|)^{|\beta|/N}$$

$$\leq C_N(|f|_\infty |D^N g|_{L^2} + |g|_\infty |D^N f|_{L^2},$$

la dernière inégalité venant de l'inégalité de concavité du logarithme. D'où (48). Pour montrer (49), on remarque que

$$|\partial_\alpha(fg) - f\partial_\alpha g|_{L^2} \leq C_\alpha \sum_{\beta+\gamma=\alpha, \beta\neq 0} |\partial_\beta f \partial_\gamma g|_{L^2} \leq C_\alpha \sum_{\beta+\gamma=\alpha-1} |\partial_\beta (Df) \partial_\gamma g|_{L^2},$$

d'où (49) en reprenant les inégalités précédentes en remplaçant f par Df et N par $N-1$.

Références

[1] J.T. Beale,T. Kato, et A. Majda, Remarks on the Breakdown of Smooth Solutions for the 3D Euler Equations, Commun. Math. Phys. 94, 61-66 (1984).

[2] D. Chae, On the spectral dynamics of the deformation tensor and new a priori estimates for the 3D Euler equations, Comm. Math. Phys. 263 (2006), no.3, 789-801.

[3] D. Ebin et J. Marsden, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid Ann. of Math, 92 (1970), 102-163.

[4] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer (1983)

[5] E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit, *Hydrodynamique physique*, EDP Sciences (2001).

[6] T. Kato, Non-stationary flows of viscous and ideal fluids in R^3, J.Functional Analysis 9 (1972), 296-305.

[7] S. Klainerman et A. Majda, Singular limits of quasilinear hyperbolic systems, Commun. Pure Appl. Math. 34, 481-524 (1981).

[8] A. Majda et A. Bertozzi, *Vorticity and Incompressible Flow*, Cambridge University Press (2002).

[9] R. Temam, On the Euler Equations of Incompressible Perfect Fluids, Journal of Functional Analysis 20, 32-43 (1975).

[10] W. Wolibner, Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long, Math. Z. 37 (1993), pp.698-726.

Je remercie vivement Olivier Glass pour son suivi complet de cet exposé de maîtrise, pour sa remarquable disponibilité et ses explications fort éclairantes.