

À la frontière de l'outre-espace

Camille Horbez

*Introduction au domaine de recherche
Sous la direction de Vincent Guirardel*

Introduction

"Dis-moi, groupe, sur quel joli espace tu agis joliment, et je te dirai qui tu es." Tel est le credo du géomètre des groupes, toujours en quête d'action : pour étudier un groupe (généralement infini dénombrable), on cherche un (joli) espace topologique sur lequel celui-ci agit (joliment, par exemple de manière propre et cocompacte), puis on déduit certaines de ses propriétés algébriques à partir des propriétés topologiques de l'espace construit. Au cours du XX^{ème} siècle, ce jeu du portrait chinois a été appliqué à plusieurs familles importantes de groupes. L'exemple classique est celui du groupe arithmétique $SL(n, \mathbb{Z})$, qui agit de manière propre et cocompacte sur l'espace symétrique $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$, qui est aussi l'espace des ellipsoïdes de \mathbb{R}^n . Un exemple analogue est l'étude du groupe modulaire d'une surface S , i.e. le groupe des difféomorphismes de S modulo les difféomorphismes isotopes à l'identité, via son action sur l'espace de Teichmüller, défini par exemple comme l'espace des classes d'isotopies de métriques hyperboliques sur S (on renvoie par exemple à [10] pour une introduction à ce sujet). Par analogie avec ces deux exemples, Culler et Vogtmann ont construit un espace topologique, appelé l'*outre-espace*, sur lequel le groupe $Out(F_n)$ des automorphismes extérieurs d'un groupe libre de type fini agit ([8]). Ceci marque le début de l'approche géométrique à l'étude du groupe $Out(F_n)$; il s'agit maintenant de comprendre les propriétés topologiques de ce nouvel espace.

L'une des questions majeures a été de construire (et comprendre) une compactification naturelle de l'outre-espace. Thurston a proposé une construction permettant de compactifier l'espace de Teichmüller d'une surface ([24]). Par analogie, on construit une compactification de l'outre-espace, dont Bestvina et Feighn ont donné une description en termes d'actions sur des arbres réels ([4]). L'étude de la frontière de l'outre-espace donne des informations sur les automorphismes du groupe libre. Par exemple, on peut s'intéresser aux propriétés dynamiques de l'action d'un tel automorphisme sur la frontière de l'outre-espace.

Il existe d'autres manières de compactifier l'outre-espace. Par exemple, Kapovich et Lustig construisent de nouvelles compactifications en envoyant injectivement l'outre-espace dans un "espace de courants" ([16]). Dans ce texte introductif, nous présentons une autre compactification, construite à l'aide d'horofonctions. La construction que nous décrivons est rendue possible par l'existence sur l'outre-espace d'une distance asymétrique, analogue à la distance asymétrique de Thurston sur les espaces de Teichmüller (voir [25]), dont l'étude systématique a été initiée par Francaviglia et Martino ([11]). Dans [27], Walsh montre que l'horocompactification de l'espace de Teichmüller est la même que la compactification de Thurston de cet espace. Nous expliquons pourquoi ceci n'est plus vrai dans le cas de l'outre-espace, et nous explicitons le lien existant entre les

deux compactifications.

Ce texte est organisé de la façon suivante. Dans une première partie, nous présentons la construction de l'outre-espace par Culler et Vogtmann (partie 1.1), puis nous en décrivons une définition alternative en termes d'actions de F_n sur des arbres simpliciaux métriques, qui permet d'en construire la compactification de Thurston (partie 1.2). Nous définissons également la distance asymétrique sur l'outre-espace (partie 1.4). Dans la seconde partie de ce texte, nous définissons la compactification par horofonctions de cet espace (partie 2.1). Nous établissons le lien existant entre les deux compactifications de l'outre-espace, en insistant sur le rôle joué par les éléments primitifs de F_n (partie 2.2). Nous montrons en particulier que les deux compactifications sont différentes (partie 2.4).

1 L'outre-espace de Culler-Vogtmann

1.1 Modèle des graphes

L'outre-espace a été introduit par Culler et Vogtmann dans [8], par analogie avec les espaces de Teichmüller dans le cas des surfaces, pour étudier le groupe $Out(F_n)$ des automorphismes extérieurs d'un groupe libre de type fini. Nous présentons ici leur construction de cet espace comme espace de graphes. Nous renvoyons le lecteur à [26] pour une excellente introduction à cette étude. Nous renvoyons également à [20] pour un exposé sur les analogies entre $Out(F_n)$, le groupe modulaire d'une surface et le groupe arithmétique $SL(n, \mathbb{Z})$; nous nous limiterons dans ce texte introductif au cas de $Out(F_n)$.

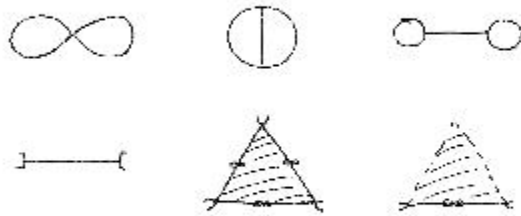
On appellera *graphe métrique* un graphe fini G dont tous les sommets sont de valence supérieure à 3 et dont chaque arête a une longueur $l > 0$. Le graphe G est naturellement muni d'une distance géodésique pour laquelle chaque arête de longueur l est isométrique au segment $[0, l] \subset \mathbb{R}$. Soit R_n le graphe (appelé une *rose*) ayant un sommet et n arêtes. Un *marquage* de G est une équivalence d'homotopie $\rho : R_n \rightarrow G$, où n désigne le rang du groupe fondamental de G (qui est libre). On désignera par (G, ρ) (ou simplement par G lorsque le marquage est sous-entendu) un tel graphe métrique marqué. Deux graphes métriques marqués G et G' sont *équivalents* s'il existe une homothétie $f : G \rightarrow G'$ (i.e. une application multipliant toutes les longueurs par un même scalaire strictement positif) telle que $f \circ \rho$ soit homotope à ρ' . L'*outre-espace* de rang n , noté CV_n , est l'ensemble des classes d'équivalences de graphes métriques marqués de groupe fondamental F_n . On notera $[G, \rho]$ (ou parfois $[G]$, voire G lorsque le contexte est clair) la classe d'équivalence du graphe métrique marqué (G, ρ) .

Remarque : Puisque les éléments de l'outre-espace sont définis à homothétie près, on peut toujours supposer que les graphes considérés sont normalisés de sorte que la somme des longueurs de leurs arêtes vaille 1. Si l'on avait remplacé "homothéties" par "isométries" dans la définition de la relation d'équivalence sur la collection des graphes métriques marqués, on aurait obtenu l'*outre-espace non projectifié* cv_n .

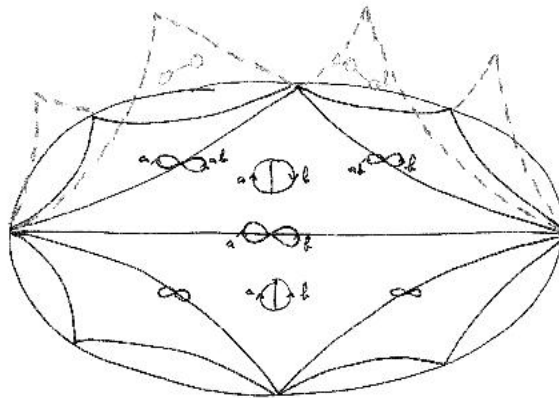
La classe d'équivalence d'un graphe métrique marqué (G, ρ) définit un $(k - 1)$ -simplexe, où k est le nombre d'arêtes de G , en faisant varier les longueurs des arêtes de G , leur somme étant fixée égale à 1. Le simplexe d'un graphe H s'identifie à une face du simplexe de G si H peut être obtenu à partir de G en écrasant une forêt dans G . L'outre-espace est muni de la topologie quotient de la topologie de l'union de tous les simplexes possibles par ces identifications de faces. Cette topologie

est appelée *topologie des simplexes*.

Exemple (Cas de la dimension 2) : Lorsque où $n = 2$, un argument simple de caractéristique d'Euler permet de montrer qu'il y a, à homéomorphisme près, exactement trois graphes homotopes à la rose, à savoir la rose elle-même, le graphe théta, et le graphe en haltères, représentés sur la figure suivante. On représente également les simplexes associés dans CV_n , avec les identifications de faces.



Ces simplexes s'assemblent pour donner la représentation suivante de CV_2 .



Terminons cette partie en indiquant l'action de $Out(F_n)$ sur CV_n . Soit $\Phi \in Out(F_n)$. Alors il existe une équivalence d'homotopie $f : R_n \rightarrow R_n$ telle que l'application induite par f au niveau des

groupes fondamentaux (qui est un élément de $Aut(F_n)$) corresponde à Φ dans $Out(F_n)$. L'action de $Out(F_n)$ sur CV_n est par précomposition des marquages, i.e. $[(G, \rho)]\Phi = [(G, \rho \circ f)]$. Il est facile de vérifier que cela définit bien une action (à droite) de $Out(F_n)$ sur CV_n (en particulier, cela ne dépend pas des choix de f et d'un représentant de $[(G, \rho)]$).

Remarque : L'action de $Out(F_n)$ ainsi définie est propre, mais n'est pas cocompacte (le quotient consiste en un nombre fini de simplexes avec des faces manquantes). Toutefois, l'outre-espace possède une *arête* sur laquelle il se rétracte de manière $Out(F_n)$ -équivariante, et sur laquelle l'action de $Out(F_n)$ est cocompacte. Pour tout $\epsilon > 0$, on peut aussi définir la *partie ϵ -épaisse* comme la partie de l'outre-espace consistant en les graphes dont le rayon d'injectivité est supérieur à ϵ . L'action de $Out(F_n)$ sur cet espace est elle aussi cocompacte.

1.2 Modèle des arbres et compactification de Thurston de l'outre-espace

Si l'outre-espace fut défini historiquement comme un espace de graphes, il en existe d'autres modèles. En particulier, l'outre-espace peut être décrit comme un espace d'actions de F_n sur des arbres métriques. Cette description permet de définir et de décrire la compactification de Thurston de CV_n .

Un *arbre simplicial métrique* est un graphe métrique (non nécessairement fini) simplement connexe. Une action de F_n sur un arbre simplicial métrique T est dite *minimale* si T ne contient pas de sous-arbre invariant propre. On définit l'*outre-espace* comme l'ensemble des classes d'homothéties équivariantes d'actions libres, isométriques et minimales de F_n sur des arbres simpliciaux métriques. L'action de $Out(F_n)$ sur l'outre-espace est par précomposition des actions.

L'espace ainsi défini est naturellement en bijection équivariante avec celui défini en partie 1.1. En effet, si $[G, \rho]$ est la classe d'équivalence d'un graphe métrique marqué, alors un revêtement universel \tilde{G} de G est un arbre simplicial métrique, muni d'une action du groupe fondamental de G qui est identifié à F_n grâce au marquage ρ . Il est facile de vérifier que cette action est libre, minimale et par isométries. Réciproquement, soit $[T]$ la classe d'équivalence d'un arbre simplicial métrique. Choisissons un point base $y_0 \in T$. Soit T_0 un revêtement universel de la rose R_n , et x_0 un relevé du sommet de R_n dans T_0 . Alors il existe une unique application F_n -équivariante de T_0 vers T envoyant x_0 sur y_0 . Celle-ci passe au quotient en une équivalence d'homotopie de R_n vers le graphe quotient T/F_n , donnant le graphe métrique marqué souhaité. Le lecteur vérifiera aisément que ces applications sont $Out(F_n)$ -équivariantes, et inverses l'une de l'autre.

Soit $g \in F_n$ et T un arbre simplicial métrique muni d'une action libre, minimale et par isométries de F_n . On définit la *longueur de translation* de g dans T , notée $\|g\|_T$, comme

$$\|g\|_T := \inf_{x \in T} d(x, gx).$$

(Via l'identification entre les deux modèles de l'outre-espace que nous avons présentés, si G est le graphe correspondant à T , la longueur de translation $\|g\|_G$ s'interprète aussi comme la plus petite longueur d'un lacet dans G représentant g dans $\pi_1(G)$, identifié à F_n grâce au marquage). Comme F_n agit par isométries sur T , pour tous $g, h \in F_n$ et tout $x \in T$, on a $d(x, h^{-1}ghx) = d(hx, ghx)$, d'où $\|g\|_T = \|h^{-1}gh\|_T$. Notons $\mathcal{C}(F_n)$ l'ensemble des classes de conjugaison de F_n . On a donc une application

$$\begin{aligned} cv_n &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{C}(F_n)} \\ T &\mapsto (\|g\|)_{g \in \mathcal{C}(F_n)} \end{aligned} \quad ,$$

qui passe au quotient pour donner une application

$$\begin{aligned} i: CV_n &\rightarrow \mathbb{P}\mathbb{R}^{\mathcal{C}(F_n)} \\ T &\mapsto (\|g\|)_{g \in \mathcal{C}(F_n)} \end{aligned}$$

Culler et Morgan ont montré que cette application i est injective ([7]). En particulier, on peut voir l'outre-espace CV_n comme un sous-espace de $\mathbb{P}\mathbb{R}^{\mathcal{C}(F_n)}$ et le munir de la topologie induite. On appelle cette topologie la *topologie des axes* ; elle est équivalente à la topologie des simplexes ([19]). Culler et Morgan ont montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'adhérence $i(\overline{CV_n})$ (notée par la suite $\overline{CV_n}$) est compacte ([7]). C'est donc une compactification de CV_n , appelée la *compactification de Thurston* de l'outre-espace.

On propose maintenant une description explicite de cette compactification, due à Bestvina et Feighn. Un *arbre réel* est un espace métrique non vide T dans lequel deux points quelconques $x, y \in T$ sont toujours reliés par un unique arc topologique (i.e. le plongement d'un intervalle de \mathbb{R} dans T), qui est alors isométrique au segment $[0, d(x, y)]$. Dans [6], Cohen et Lustig définissent une action *très petite* de F_n sur un arbre réel comme une action pour laquelle tous les stabilisateurs d'arêtes sont cycliques maximaux, et les stabilisateurs de tripodes triviaux. Ils montrent qu'une action simpliciale par isométries de F_n sur un arbre simplicial métrique est dans $\overline{CV_n}$ si et seulement si elle est très petite. En utilisant des techniques dues à Rips, Bestvina et Feighn ont généralisé ce résultat à toutes les actions de F_n sur des arbres réels ([4]). Autrement dit, on a le résultat suivant.

Théorème 1.1. ([4]) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la compactification de Thurston $\overline{CV_n}$ de l'outre-espace est l'espace des actions très petites par isométries de F_n sur des arbres réels.*

1.3 Le cas des actions simpliciales et la théorie de Basse-Serre

Parmi les actions de F_n dans la frontière de l'outre-espace, certaines sont des actions sur des arbres simpliciaux. Si ceci est vrai de toutes les actions dans $\overline{CV_2}$ (voir [9], où la frontière de l'outre-espace de rang 2 est complètement décrite), il y a au contraire des actions non simpliciales dans $\overline{CV_n}$ dès que $n \geq 3$ (voir par exemple [18]). La théorie de Basse-Serre permet de décrire les actions sur des arbres simpliciaux à l'aide de décompositions de F_n en graphes de groupes.

Un *graphe de groupes* est la donnée d'un graphe X connexe, d'un groupe de sommet G_v pour chaque sommet v de X et d'un groupe d'arête G_e pour chaque arête e de X , ainsi que de morphismes injectifs $G_e \hookrightarrow G_v$ lorsque v est une extrémité de e . De même que précédemment, on peut définir un *graphe de groupes métrique* en attribuant une longueur à chacune de ses arêtes.

Étant donné une action de F_n très petite et par isométries sur un arbre simplicial T , considérons le graphe métrique quotient $G = T/F_n$. Soit τ un sous-arbre maximal de G (qui contient nécessairement tous les sommets de G), que l'on relève en un sous-arbre $\tilde{\tau}$ de T . Choisissons un relevé \tilde{e} de chaque arête $e \in G - \tau$ qui soit adjacent à $\tilde{\tau}$. Pour tout sommet v (resp. toute arête e) de G , on choisit pour G_v (resp. G_e) le stabilisateur dans F_n du relevé de v (resp. e) ainsi choisi. Étant donné une arête e de G et v l'une de ses extrémités, si le relevé \tilde{v} de v dans \tilde{e} est dans $\tilde{\tau}$, on choisit pour morphisme $G_e \hookrightarrow G_v$ l'inclusion du stabilisateur de \tilde{e} dans le stabilisateur de \tilde{v} . Sinon, soit $g_e \in F_n$ un élément envoyant \tilde{v} sur le relevé de v dans $\tilde{\tau}$. Le morphisme $G_e \hookrightarrow G_v$ est donné par $h \mapsto g_e h g_e^{-1}$. On obtient ainsi le *graphe de groupes quotient* de T .

Soit G un graphe de groupes métrique. Pour chaque sommet v (resp. chaque arête e) de G , choisissons un espace métrique pointé (X_v, \star_v) (resp. (X_e, \star_e)) de groupe fondamental G_v (resp.

G_e), de sorte que lorsqu'un sommet v est une extrémité d'une arête e , on ait une inclusion de (X_e, \star_e) dans X_v et un chemin p_e reliant \star_e à \star_v dans X_v , tels que l'inclusion de X_e dans X_v induise via p_e le morphisme injectif $G_e \hookrightarrow G_v$. Pour chaque arête e , on considère l'espace $X_e \times [0, 1]$, et l'on recolle $X_e \times \{0\}$ et $X_e \times \{1\}$ aux espaces X_v correspondant pour obtenir un espace X_G . On définit le *groupe fondamental* de (G, v) comme le groupe fondamental de (X_G, \star_G) . Considérons le revêtement universel de X_G , et écrasons les relevés de $X_e \times [0, 1]$ sur $[0, 1]$ et les relevés de X_v en un point. On obtient ainsi un arbre simplicial métrique, qu'on appelle le *revêtement universel* de G . Le théorème suivant, dû à Serre, établit une dualité entre l'action sur T et le graphe de groupes quotient.

Théorème 1.2. ([22]) *Soit T un arbre métrique, muni d'une action de F_n par isométries. Si G est le graphe quotient de T , il existe un isomorphisme entre $\pi_1(G, \star)$ et F_n tel que l'action de F_n sur le revêtement universel de G (via le marquage donné par cet isomorphisme) soit isomorphe à l'action sur T .*

1.4 Propriétés métriques de l'outre-espace

Il existe sur l'outre-espace une distance asymétrique, dont l'étude systématique a été initiée par Francaviglia et Martino dans [11]. Dans cette partie, nous définissons cette distance, et en présentons quelques propriétés importantes. Nous revenons pour cela au modèle des graphes de l'outre-espace. Pour plus d'informations sur cette distance, nous renvoyons le lecteur à [11].

Soit $[G, \rho]$ et $[G', \rho']$ deux éléments de CV_n , que l'on suppose normalisés de sorte que la somme des longueurs des arêtes vaille 1. Une *différence de marquages* entre G et G' est une équivalence d'homotopie $f : G \rightarrow G'$ telle que $f \circ \rho$ soit homotope à ρ' . Le *facteur de dilatation* de G vers G' est

$$\Lambda(G, G') = \inf\{Lip(f) \mid f : G \rightarrow G' \text{ différence de marquage}\},$$

où $Lip(f)$ désigne la constante de Lipschitz de l'application f . Francaviglia et Martino montrent que $d(G, G') := \log \Lambda(G, G')$ définit une distance asymétrique (i.e. d satisfait tous les axiomes d'une distance, sauf la symétrie) sur CV_n ([11, Theorem 4.17]), qui induit la topologie des simplexes ([11, Theorem 4.9 and Theorem 4.18]).

Remarque : Étant donné une distance asymétrique d sur un espace topologique, on peut toujours la symétriser en posant $d_{sym}(x, y) = d(x, y) + d(y, x)$. Toutefois, plusieurs indices laissent croire que l'outre-espace a par nature un caractère asymétrique, lié au caractère asymétrique du groupe $Out(F_n)$ lui-même : certains automorphismes de F_n ont des propriétés différentes de leur inverse. Nous renvoyons à [2] pour une étude de l'asymétrie de l'outre-espace.

On décrit maintenant une caractérisation alternative de la distance entre deux points, qui donne en particulier un moyen simple de calculer cette distance. Soit $g \in F_n$, et $G \in CV_n$. Un *candidat* dans G est un lacet γ dans G qui est

- soit un cercle plongé dans G ,
- soit un bouquet de cercles plongé dans G , i.e. $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$, où γ_1 et γ_2 sont deux cercles plongés dans G qui ne se rencontrent qu'en un unique point,

- soit un graphe en haltères, i.e. $\gamma = \gamma_1\gamma_3\gamma_2\overline{\gamma_3}$, où γ_1 et γ_2 sont deux cercles plongés dans G qui ne se rencontrent pas, et γ_3 est un chemin plongé dans G qui rencontre γ_1 et γ_2 uniquement en leur origine (le chemin $\overline{\gamma_3}$ est le chemin γ_3 parcouru en sens inverse).

Remarquons en particulier qu'un graphe G donné ne contient qu'un nombre fini de candidats. La proposition suivante, due à White, donne un moyen explicite de calculer la distance entre deux points de CV_n . On renvoie à [11, Proposition 3.15] ou à [1, Theorem 2.1] pour une démonstration de celle-ci.

Proposition 1.3. *Soit $G, G' \in CV_n$. Alors*

$$d(G, G') = \log \sup_{g \in F_n - \{1\}} \frac{\|g\|_{G'}}{\|g\|_G}.$$

De plus, la borne supérieure est atteinte en un élément $g \in F_n$ représenté par un candidat dans G .

2 Compactification de l'outre-espace par horofonctions

2.1 Horocompactification d'un espace métrique asymétrique

On définit, sous un certain nombre d'hypothèses, la notion d'*horocompactification* d'un espace métrique (asymétrique). Celle-ci fut introduite pour la première fois par Gromov (dans le cas symétrique) dans [13]. Nous renvoyons également à [3, II.1] pour plus de détails sur la construction d'une compactification d'un espace métrique par des horofonctions, ou encore à l'exposé de Walsh dans [27, partie 2], spécifique au cas d'un espace métrique asymétrique.

Soit (X, d) un espace métrique asymétrique. Fixons un point base $b \in X$. A tout point $z \in X$, on associe une fonction

$$\psi_z : X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x, z) - d(b, z).$$

Cela définit une application

$$\psi : X \rightarrow \mathcal{C}(X) \\ z \mapsto \psi_z,$$

où $\mathcal{C}(X)$ est l'espace des fonctions continues à valeurs réelles sur X , que l'on munit de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de (X, d_{sym}) .

Proposition-Définition 2.1. *Soit (X, d) un espace métrique asymétrique géodésique. On suppose que l'espace métrique (X, d_{sym}) est propre, et que pour tout $x \in X$ et toute suite (x_n) d'éléments de X , la distance $d(x_n, x)$ tend vers 0 si et seulement si $d(x, x_n)$ tend vers 0. Alors ψ est un homéomorphisme de X sur son image, et l'adhérence de $\psi(X)$ dans $\mathcal{C}(X)$ est compacte. On appelle cette adhérence $\overline{\psi(X)}$ l'horocompactification de X . (Les éléments de $\overline{\psi(X)} - \psi(X)$ sont appelés des horofonctions.)*

Si l'on change le point base b en un nouveau point base b' , les nouvelles fonctions ψ'_z obtenues vérifient $\psi'_z = \psi_z - \psi_z(b')$. L'horocompactification est donc indépendante d'un choix de point base à homéomorphisme près.

Les hypothèses de la proposition précédente sont satisfaites dans l'outre-espace ([11]). On peut donc définir l'horocompactification de l'outre-espace.

2.2 Horocompactification de l'outre-espace et éléments primitifs

Dans cette partie, nous établissons le lien entre l'horocompactification de l'outre-espace et la compactification de Thurston. On appelle élément *primitif* de F_n un élément de F_n faisant partie d'une base de F_n . Le but de cette partie est d'établir la proposition suivante.

Proposition 2.2. *L'horocompactification de l'outre-espace est homéomorphe au quotient $\overline{CV_n}/\sim$, où $T \sim T'$ si et seulement si pour tout élément $g \in F_n$ primitif, les longueurs de translation $\|g\|_T$ et $\|g\|_{T'}$ sont proportionnelles.*

Dans la suite de ce texte, nous noterons $\widetilde{CV_n}$ le quotient $\overline{CV_n}/\sim$.

Démonstration : Soit $x \in CV_n$. Par définition de la distance sur l'outre-espace, pour tout $z \in CV_n$, on a

$$\psi_z(x) = \log \frac{\sup_{g \in F_n - \{1\}} \frac{\|g\|_z}{\|g\|_x}}{\sup_{g \in F_n - \{1\}} \frac{\|g\|_z}{\|g\|_b}}.$$

Cette expression est encore définie lorsque $z \in \overline{CV_n}$. On peut donc étendre l'application ψ en une application $\overline{CV_n} \rightarrow \mathcal{C}(CV_n)$, encore notée ψ .

De plus, lorsque $z \in CV_n$, les bornes supérieures dans l'expression de $\psi_z(x)$ sont atteintes sur un ensemble fini $\mathcal{F}(x)$ d'éléments primitifs de F_n , à savoir l'ensemble des éléments de F_n qui sont représentés par des candidats dans x ou dans b . Par continuité, ceci est encore vrai lorsque $z \in \overline{CV_n}$ (puisque par définition de la topologie sur $\mathbb{P}\mathbb{R}^{\mathcal{C}(F_n)}$, il existe une suite de réels λ_n telle que pour tout $g \in F_n$, la suite $\lambda_n \|g\|_{z_n}$ converge vers $\|g\|_z$). En particulier, si $z \sim z'$, alors $\psi_z = \psi_{z'}$. L'application ψ passe donc au quotient en une application $\psi : \widetilde{CV_n} \rightarrow \mathcal{C}(CV_n)$.

Lemme 2.3. *L'application $\psi : \widetilde{CV_n} \rightarrow \mathcal{C}(CV_n)$ est continue.*

Démonstration : Par définition de la topologie quotient, il suffit de vérifier que $\psi : \overline{CV_n} \rightarrow \mathcal{C}(CV_n)$ est continue. Soit $x \in CV_n$. Soit $z \in \overline{CV_n}$, et soit z_n une suite d'éléments de $\overline{CV_n}$ qui converge vers z . On sait que pour tout $z \in CV_n$, on a

$$\psi_z(x) = \log \frac{\sup_{\mathcal{F}(x)} \frac{\|g\|_z}{\|g\|_x}}{\sup_{\mathcal{F}(x)} \frac{\|g\|_z}{\|g\|_b}}.$$

Par ailleurs, par définition de la topologie sur $\mathbb{P}\mathbb{R}^{\mathcal{C}(F_n)}$, il existe une suite de réels λ_n telle que pour tout $g \in F_n$, la suite $\lambda_n \|g\|_{z_n}$ converge vers $\|g\|_z$. Donc $\psi_{z_n}(x)$ converge vers $\psi_z(x)$. Or il est facile de voir que pour tout espace métrique (asymétrique) X , les éléments de $\overline{\psi(X)}$ sont 1-lipschitziens pour la distance d_{sym} , si bien que la convergence ponctuelle de ψ_{z_n} vers ψ suffit pour conclure quant à la convergence de ψ_{z_n} vers ψ au sens de la topologie de la convergence sur les parties compactes. Dans le cas de l'outre-espace, on sait que la distance d_{sym} est propre, donc on a la convergence au sens de la topologie de la convergence sur les parties bornées. \square

Lemme 2.4. *L'application $\psi : \widetilde{CV_n} \rightarrow \mathcal{C}(CV_n)$ est injective.*

Démonstration : Soit $z, z' \in \overline{CV_n}$ vérifiant $\psi_z = \psi_{z'}$, et soit $g \in F_n$ un élément primitif. Soit $x \in CV_n$ une rose dont l'un des pétales représente g . En attribuant à ce pétale une longueur $\epsilon > 0$ suffisamment petite par rapport aux autres pétales, on obtient $\psi_z(x) = \frac{\|g\|_z}{\epsilon A}$, où $A = \sup_{\mathcal{F}} \frac{\|g\|_z}{\|g\|_b}$,

et de même $\psi_{z'}(x) = \frac{\|g\|_{z'}}{\epsilon B}$, où $B = \sup_{\mathcal{F}} \frac{\|g\|_{z'}}{\|g\|_b}$. En particulier, comme $\psi_z = \psi_{z'}$, le rapport $\frac{\|g\|_z}{\|g\|_{z'}}$ est constant égal à $\frac{B}{A}$, donc $z \sim z'$. \square

Remarque : L'idée de la démonstration du lemme 2.4 est de "sélectionner" l'élément primitif g dans la rose x . Pour cela, au lieu de faire tendre la longueur du pétale correspondant vers 0, on aurait également pu considérer les images de x par un automorphisme envoyant la base $\{g, g_2, \dots, g_n\}$ correspondant aux pétales de x sur $\{g, g_2 g^k, \dots, g_n g^{(n-1)k}\}$ pour k suffisamment grand. L'intérêt de cette construction est qu'elle permet également de comprendre la compactification de l'épine de l'outre-espace ou de la partie épaisse.

Fin de la démonstration de la proposition 2.2 : D'après les lemmes 2.3 et 2.4, l'application ψ se factorise en une injection continue de \widetilde{CV}_n à valeurs dans $\mathcal{C}(CV_n)$. Comme $\mathcal{C}(CV_n)$ est un espace topologique séparé, il en est de même de \widetilde{CV}_n , donc \widetilde{CV}_n est compact comme quotient séparé d'un espace compact. En tant que bijection d'un espace compact vers un espace séparé, l'application ψ définit un homéomorphisme de \widetilde{CV}_n sur son image. En particulier, l'image $\psi(\widetilde{CV}_n)$ est compacte, donc fermée dans $\mathcal{C}(CV_n)$. De plus, par continuité de ψ , on a $\psi(CV_n) \subset \psi(\widetilde{CV}_n) \subset \overline{\psi(CV_n)}$, i.e. $\psi(CV_n) \subset \psi(\widetilde{CV}_n) \subset \overline{\psi(CV_n)}$. Comme $\psi(\widetilde{CV}_n)$ est fermé dans $\mathcal{C}(CV_n)$, on a donc $\psi(\widetilde{CV}_n) = \overline{\psi(CV_n)}$. L'espace $\overline{CV}_n = \widetilde{CV}_n / \sim$ est donc l'horocompactification de CV_n . \square

Il est naturel de se demander si, comme dans le cas de l'espace de Teichmüller, l'horocompactification de l'outre-espace coïncide avec la compactification de Thurston. Autrement dit, est-il vrai que tout élément de \overline{CV}_n est caractérisé par les longueurs de translation des éléments primitifs de F_n ? L'objectif des deux prochaines parties est de montrer que ceci n'est pas le cas. Pour cela, on commence par décrire un algorithme dû à Whitehead qui permet de détecter des mots non primitifs de F_n .

2.3 Mots primitifs, algorithme de Whitehead

Soit $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ une base de F_n , et $w \in F_n$. Le *graphe de Whitehead* de w par rapport à B , défini dans [28], est le graphe dont les sommets sont donnés par les éléments $x_i^{\pm 1}$, deux sommets $x_i^{\epsilon_i}$ et $x_j^{\epsilon_j}$ étant reliés par une arête si $x_i^{\epsilon_i} x_j^{-\epsilon_j}$ apparaît dans l'écriture cyclique réduite de w dans la base B . Un *sommet séparant* d'un graphe X est un sommet v tel que $X - \{v\}$ soit non connexe. Dans [28], Whitehead décrit un algorithme permettant de décider si un mot de F_n est primitif. En particulier, il montre la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Si $w \in F_n$ est primitif, alors son graphe de Whitehead par rapport à toute base de F_n possède un sommet séparant.*

Stallings a ensuite proposé une autre version de l'algorithme de Whitehead permettant de déterminer si un élément de F_n est contenu dans un facteur libre propre ([23]). En particulier, il montre la proposition suivante.

Proposition 2.6. *Soit $w \in F_n$. Si le graphe de Whitehead de w par rapport à une base est disconnexe, alors w est contenu dans un facteur libre.*

Nous utilisons ces deux propositions pour construire des mots non primitifs, qui nous serviront dans la prochaine partie à donner des exemples de points distincts dans la compactification de Thurston de l'outre-espace, mais confondus dans l'horocompactification.

Proposition 2.7. *Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ une base de F_n , et $w \in \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe $v \in F_n$ tel que le mot $vx_nwx_n^{-1}$ soit cycliquement réduit et primitif.*
2. *Le mot w est contenu dans un facteur libre propre de $\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$.*

Démonstration : Si w est contenu dans un facteur libre propre de $\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$, soit v un élément primitif de $\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ contenu dans un facteur libre complémentaire, alors $vx_nwx_n^{-1}$ est primitif.

Supposons maintenant que w n'est contenu dans aucun facteur libre propre de $\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$. Alors w n'est pas primitif, donc $x_nwx_n^{-1}$ n'est pas primitif. De plus, il existe une base $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ de F_{n-1} dans laquelle le graphe de Whitehead de w est connexe et n'a pas de sommet séparant.

Soit $v \neq 1$ un élément de F_{n-1} . Soit a la première lettre de w et b sa dernière lettre. Soit c_1 la dernière lettre de v . Le graphe de Whitehead de $W = vx_nwx_n^{-1}$ dans la base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de F_n contient le graphe de Whitehead de w , dans lequel on remplace l'arête entre b et a^{-1} par une arête entre b et x_n et une arête entre a^{-1} et x_n , ainsi qu'une arête de x_n^{-1} vers c_1 . Ce graphe est donc connexe, et le seul sommet séparant possible est c_1 , à condition que x_n^{-1} ne soit relié à aucun autre sommet. En particulier, la première lettre de v est c_1^{-1} .

Si $c_1 \neq x_n$, on reprend l'argument dans la base $\{x_1, \dots, x_{n-1}, c_1x_n\}$, et l'on obtient $v = c_1^{-1}c_2^{-1} \dots c_2c_1$. En itérant à nouveau cet argument tant que $c_i \neq x_n$, on obtient $v = c_1^{-1}c_2^{-1} \dots c_k^{-1} \dots c_k \dots c_2c_1$. Si v ne contient pas x_n , le processus doit s'arrêter, et on obtient $v = 1$: contradiction. Si v contient x_n , au cours du processus, on obtient une base de la forme $\{x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n\}$ dans laquelle W s'écrit $v'x'_n{}^2wx'_n{}^{-2}$. Mais alors, le sommet $x'_n{}^{-1}$ du graphe de Whitehead de W dans cette base ne peut être relié qu'à lui-même, si bien que W est encore une fois cycliquement conjugué à w , qui n'est pas primitif : contradiction. \square

2.4 L'horocompactification et la compactification de Thurston de l'outre-espace sont distinctes.

On exhibe maintenant une famille d'exemples de points dans la frontière de Thurston de l'outre-espace que l'on ne peut différencier dans l'horocompactification. Autrement dit, les longueurs de translation de tous les éléments primitifs de F_n sont les mêmes, ce qui répond négativement à une question de Carette, Francaviglia, Kapovich et Martino ([5, Problem 6.1]). Ainsi, contrairement au cas de l'espace de Teichmüller ([27]), l'injection de l'outre-espace dans son horocompactification ne s'étend pas continûment en un homéomorphisme de \overline{CV}_n vers \widetilde{CV}_n .

Considérons un graphe de groupes H ayant trois sommets v_0, v_1 et v_2 reliés deux à deux par une arête (on note ces arêtes e_{01} et e_{12} et e_{02}), et pour lequel

- le groupe de sommet H_{v_0} est isomorphe à F_{n-1} ,
- le groupe de sommet H_{v_1} est cyclique, engendré par un mot $w_1 \in F_n$,
- le groupe de sommet H_{v_2} est cyclique, engendré par un mot $w_2 \in F_n$,
- le groupe d'arête $H_{e_{01}}$ est égal à G_{v_1} ,
- le groupe d'arête $H_{e_{02}}$ est égal à G_{v_2} ,
- le groupe d'arête $H_{e_{12}}$ est trivial, et e_{12} a pour étiquette $e_n \in F_n$.

Considérons un graphe de groupes G de groupe fondamental F_n qui contient H , dans lequel les longueurs des arêtes hors de H sont fixées. Pour $t_1, t_2 \in [0, 1]$ vérifiant $t_1 + t_2 \leq 1$, on définit G_{t_1, t_2} à partir de G en donnant à e_{01} une longueur t_1 , à e_{02} une longueur t_2 , et à e_{12} une longueur $1 - t_1 - t_2$. Alors pour $(t_1, t_2) \neq (t'_1, t'_2)$, les graphes de groupes G_{t_1, t_2} et $G_{t'_1, t'_2}$ définissent des points

différents de la compactification de Thurston de CV_n . Par contre, ils ne définissent pas toujours des points distincts dans l'horocompactification de CV_n . Plus précisément,

- Le groupe G_{t_1, t_2} dépend de t_1 dans l'horocompactification de CV_n si et seulement si w_1 appartient à un facteur libre propre de F_{n-1} .
- Le groupe G_{t_1, t_2} dépend de t_2 dans l'horocompactification de CV_n si et seulement si w_2 appartient à un facteur libre propre de F_{n-1} .

En effet, pour "lire" la longueur t_i dans G_{t_1, t_2} , il faut lire la longueur de translation d'un mot cycliquement réduit de la forme $ve_nwe_n^{-1}$, pour un certain $v \in F_n$. On utilise alors la proposition 2.7.

2.5 Questions et perspectives

Terminons ce texte introductif en mentionnant quelques questions ouvertes relatives à l'horocompactification de l'outre-espace, qui nous serviront de fil conducteur pour notre travail de thèse.

Notre premier objectif est de donner une description explicite de l'horocompactification de l'outre-espace. Dans un premier temps, il semble naturel de chercher à en déterminer la partie simpliciale. Autrement dit, étant donné deux actions simpliciales, très petites, par isométries de F_n sur deux arbres simpliciaux métriques T et T' , à quelle condition sont-ils différenciables à l'aide des longueurs de translation des éléments primitifs de F_n ? Nous conjecturons que les exemples donnés en partie 2.4 sont les seules obstructions à cette différenciation. On peut également s'intéresser au cas d'actions duales à une lamination sur une surface, ou au cas où les actions sont limites fortes d'actions simpliciales. On espère alors pouvoir conclure en utilisant la théorie de Rips.

L'étude de l'horocompactification de l'outre-espace répond à plusieurs motivations. Trouver une compactification de l'outre-espace (ou plus exactement, de l'épine ou de la partie épaisse de l'outre-espace) possédant un certain nombre de propriétés topologiques intéressantes pourrait permettre, grâce à [21], de montrer la conjecture de Novikov pour $Out(F_n)$, une question importante en L -théorie. Il s'agit donc en premier lieu de comprendre les propriétés topologiques fondamentales de l'horocompactification de l'outre-espace. On sait par exemple que la compactification de Thurston de CV_n est contractile, de dimension topologique finie ([4], [12]). Qu'en est-il de l'horocompactification? Une autre motivation pour cette étude vient du fait que l'horofrontière d'un espace métrique semble être un bon cadre pour étudier un certain nombre de propriétés de cet espace, par exemple pour l'étude de marches aléatoires sur cet espace ([17]). L'horofrontière de l'outre-espace est-elle un bord de Poisson? On pourra également étudier la dynamique de $Out(F_n)$ sur l'horofrontière de l'outre-espace.

Il existe une notion de nombre d'intersection entre deux points de l'outre-espace, introduite par Guirardel dans [14]. On peut alors chercher à compactifier l'outre-espace par les nombres d'intersection plutôt que par les fonctions longueur : on a une application $i : CV_n \rightarrow \mathbb{R}^{CV_n}$ qui est injective, et son adhérence est probablement projectivement compacte. Le nombre d'intersection n'étant pas continu sur $\overline{CV_n}$, on obtiendrait une compactification différente de la compactification de Thurston. Dans [15, Theorem 2.2], nous exhibons un lien entre le nombre d'intersection et la distance de Lipschitz sur la partie épaisse de l'outre-espace. Il est alors naturel de se demander s'il existe un lien entre l'horocompactification de l'outre-espace (ou du moins, celle de son épine ou de sa partie épaisse) et cette compactification par les nombres d'intersection. On pourra également

étudier l'existence de liens avec d'autres compactifications de l'outre-espace, par exemple celles de Kapovich et Lustig ([16]).

Références

- [1] Y. Algom-Kfir, *Strongly contracting geodesics in Outer Space*, Geom. and Topol. **15** (2011), 2181–2233.
- [2] Y. Algom-Kfir and M. Bestvina, *Asymmetry of outer space*, Geometriae Dedicata **156** (2012), no. 1, 81–92.
- [3] W. Ballmann, *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, volume 25 of DMV Seminar (Basel Birkhäuser Verlag, ed.), With an appendix by Misha Brin.
- [4] M. Bestvina and M. Feighn, *Outer limits*, 1994.
- [5] M. Carette, S. Francaviglia, I. Kapovich, and A. Martino, *Spectral rigidity of automorphic orbits in free groups*, arXiv :1106.0688v4 [math.GR] (2012).
- [6] M.M. Cohen and M. Lustig, *Very small group actions on \mathbb{R} -trees and Dehn twist automorphisms*, Topology **34** (1995), no. 3, 575–617.
- [7] M. Culler and J.W. Morgan, *Group actions on \mathbb{R} -trees*, Proc. Lond. Math. Soc. **55** (1987), no. 3, 571–604.
- [8] M. Culler and K. Vogtmann, *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Invent. math. **84** (1986), 91–119.
- [9] ———, *The boundary of outer space in rank two*, Arboreal group theory (Berkeley,CA,1988) (Math. Sci. Res. Inst. Publ., ed.), vol. 19, Springer, New York, 1991, pp. 189–230.
- [10] B. Farb and D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton University Press, 2011.
- [11] S. Francaviglia and A. Martino, *Metric properties of outer space*, Publ. Mat. **55** (2011), 433–473.
- [12] D. Gaboriau and G. Levitt, *The rank of actions on \mathbb{R} -trees*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **28** (1995), no. 5, 549–570.
- [13] M. Gromov, *Hyperbolic manifolds, groups and actions*, Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference 182-213 (Princeton University Press, ed.), 1981.
- [14] V. Guirardel, *Coeur et nombre d'intersection pour les actions de groupes sur les arbres*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **38** (2005), no. 6, 847–888.
- [15] C. Horbez, *Sphere paths in outer space*, arXiv :1201.6027v1 [math.GT] (2012).
- [16] I. Kapovich and M. Lustig, *The actions of $out(f_k)$ on the boundary of outer space and on the space of currents : minimal sets and equivariant incompatibility*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **27** (2007), no. 3, 827–847.
- [17] A. Karlsson and F. Ledrappier, *On laws of large numbers for random walks*, Ann. Probab. **34** (2006), no. 5, 1693–1706.
- [18] G. Levitt, *Constructing free actions on \mathbb{R} -trees*, Duke Math. J. **69** (1993), no. 3, 615–633.
- [19] F. Paulin, *The Gromov topology on \mathbb{R} -trees*, Topol. Appl. **32** (1989), no. 3, 197–221.

- [20] ———, *Sur les automorphismes de groupes libres et de groupes de surfaces*, Astérisque **339** (2011), 323–356, Soc. Math. France.
- [21] D. Rosenthal, *Split injectivity of the Baum-Connes assembly map*, Pure and Applied Mathematics Quarterly (Special Issue : In honor of F. Thomas Farrell and Lowell E. Jones, Part 2 of 2) **8** (2012), 453–479.
- [22] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, sl_2* , Astérisque **56** (1983), Soc. Math. Franc.
- [23] J.R. Stallings, *Whitehead graphs on handlebodies*, Geometric group theory down under (Canberra, 1996) (Berlin de Gruyter, ed.), 1999, pp. 317–330.
- [24] W.P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, American Mathematical Society. Bulletin. New Series **19** (1988), no. 2, 417–431.
- [25] ———, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces*, arXiv :math/9801039v1 [math.GT], 1998.
- [26] K. Vogtmann, *Automorphisms of free groups and outer space*, Geometriae Dedicata **94** (2002), 1–31.
- [27] C. Walsh, *The horoboundary and isometry group of Thurston’s Lipschitz metric*, arXiv :1006.2158v3 [math.GT] (2011).
- [28] J.H.C. Whitehead, *On certain sets of elements in a free group*, Proc. Lond. Math. Soc. **41** (1936), 48–56.