Le troisième problème de Hilbert et l'homologie des groupes

Hua Wang et Linyuan Liu

Sous la direction d'Antoine Touzé

Table des matières

1 Introduction

Il est facile de voir que dans $\mathbb{R}^2$, deux polygones ont la même aire si et seulement si l'un peut être découpé en des polygones et puis on peut les rassembler pour former l'autre(voir par exemple le théorème 1.1 dans [2]). Ceci nous permit une naïf façon de définir l'égalité d'aire des polygones dans $\mathbb{R}^2$. Naturellement, on se demande si le résultat se généralise à la dimension plus hautes ? En dimension 3, c'est le fameux troisième problème de Hilbert.

> Étant donnés deux polyèdres d'égal volume, est-il possible de découper le premier polyèdre en des polyèdres et de les rassembler pour former le second polyèdre ?

Ce problème a été résolu premièrement par Dehn, un élève de Hilbert. Dehn découvrit que le tétraèdre régulier et le cube ayant le même volume ne sont pas équivalents par découpage en des polyèdres, donc répondit le troisième problème de Hilbert négativement.

En résolvant le problème, Dehn introduisit un invariant qui s'appelle l'invariant de Dehn plus tard. En 1965, Sydler prouva que deux polyèdres sont équivalents par découpage en des polyèdres si et seulement si ils ont le même volume et le même invariant de Dehn([7]).

On va prouver le théorème de Sydler dans ce exposé. En faire la preuve, on va voir la solution est plutôt algébrique, bien que le problème est géometrique.

2 La définition de l'équivalence par découpage et le théorème de Zylev

D'abord on se donne la définition de polyèdre et de l'équivalence des polyèdres par découpage.

Definition 2.1. Un simplex P d'un espace vectoriel V est le sous-ensemble de V sous la forme $[e_0, \ldots, e_n] = \left\{\sum_{i=0}^n t_i e^i\right\}$, où $t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1$, et $e_1 - e_0, \ldots, e_n - e_0$ sont linéairement indépendants. On dit P est de dimension n, et les simplexes $[e_{i_0}, \ldots, e_{i_k}]$, où $\{i_0, \ldots, i_k\} \subset \{0, 1, \ldots, n\}$, s'appellent les faces de P. Si la face est de dimension 1, on l'appelle une arrêt. Et e_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ s'appellent les sommets.

Definition 2.2. Un sous-ensemble P de $\mathbb{R}^3$ est un polyèdre si P admis une structure de complexe simplicial finie dans $\mathbb{R}^3$. C'est à dire, P est la réunion d'un nombre fini de simplexes de dimension au plus 3, tels que toutes les faces d'un tel simplex sont encore un tel simplex, et l'intersection de deux tels simplexes soit vide, soit une face commune d'eux.

Definition 2.3. Deux polyèdres P et Q sont dits équivalents (par découpage), s'il existe un ensemble I fini et des polyèdres $P_i, Q_i, i \in I$ tels que $P = \bigcup_{i\in I} P_i$, $Q = \bigcup_{i\in I} Q_i$, et $\forall i, j \in I, IntP_i \cap IntP_j = \emptyset, IntQ_i \cap IntQ_j = \emptyset$ et $\forall i$ il existe une isométrie affine τ_i, qui préserve l'orientation, telle que $\tau_i(P_i) = Q_i$. Et on le note $P \sim Q$.

Definition 2.4. Soient P et Q deux polyèdres, on dit P et Q est symétrique si il y a une isométrie affine τ, qui reverse l'orientation, telle que $\tau(P) = Q$.

Proposition 2.5. *Si P et Q sont symétriques, alors ils sont équivalents.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où P est un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$. Soient O le centre de la sphère inscrite et O_i sa projection sur la face $A_jA_kA_l$(où i, j, k, l sont distincts). Alors, P se compose de les six polyèdres $OO_iO_jA_kA_l$. Comme ces polyèdres sont symétrique avec lui-même, chacun d'eux est équivalent avec le polyèdre correspondent dans la décomposition similaire de Q. Donc P et Q sont équivalents. $\square$

Remarque 2.6. D'après la proposition précédente, en fait, on n'a pas besoin de l'hypothèse que τ_i préserve l'orientation.

Il est facile de vérifier que la relation "$\sim$" est une relation d'équivalence et la proposition suivante.

Proposition 2.7. *La réunion ou intersection des deux polyèdres est encore un polyèdre, et si $A \sim B, C \sim D$, on a $A \cup C \sim B \cup D$.* □

Notre premier résultat non trivial est le théorème suivant de Zylev, on le montre d'après R. Schwartz [6].

Théorème 2.8. *Soient trois polyèdres A, B, F tels que $A \cup B \subset F$, si $F - A \sim F - B$, alors $A \sim B$.*

Démonstration. Comme $F - A \sim F - B$, il existes des polyèdres $P_1, \ldots, P_n$ et $Q_1, \ldots, Q_n$ tels que on a les découpages $F - A = \bigcup_{i=1}^n P_i$ et $F - B = \bigcup_{i=1}^n Q_i$, et

$$\forall i, P_i \sim Q_i, vol(P_i) < \frac{1}{2} vol(A), vol(Q_i) < \frac{1}{2} vol(B) = vol(A)$$

On va prouver ce résultat par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est trivial. Supposons le résultat est vrai pour n plus petit. Sous les hypothèses sur les volumes, on a des polyèdres disjoints $T_1, \ldots, T_n$ tels que $\forall k = 1, \ldots, n, \quad , P_k \cap Q_n \sim T_k \subset A$. On définit

$$F' = F - Q_n, \quad B' = F' - \bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i$$

$$P'_k = (P_k - Q_n) \cup T_k \sim Q_k, \quad A' = F' - \bigcup_{i=1}^{n-1} P'_i$$

Notons que $B' = B$ et par récurrence $B' \sim A'$, il reste de montrer $A \sim A'$. Pour ceci, on définit

$$\begin{aligned} A'' &= (A - \bigcup_{i=1}^n T_i) \cup (\bigcup_{i=1}^n (P_i \cap Q_n)) \\ &= (A - \bigcup_{i=1}^n T_i) \cup Q_n \end{aligned}$$

Par définition de T_i, on sait $A'' \sim A$. Comme

$$\begin{aligned}
A' &= F' - \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i' \\
&= (F - Q_n) - \bigcup_{i=1}^{n-1} ((P_i - Q_n) \cup T_i) \\
&= A \cup (\bigcup_{i=1}^{n} (P_i - Q_n)) - \bigcup_{i=1}^{n-1} (P_i - Q_n) - \bigcup_{i=1}^{n-1} T_i \\
&= A \cup (P_n - Q_n) - \bigcup_{i=1}^{n-1} T_i \\
&= (A - \bigcup_{i=1}^{n} T_i) \cup T_n \cup (P_n - Q_n) \\
&= (A - \bigcup_{i=1}^{n} T_i) \cup P_n' \\
&\sim (A - \bigcup_{i=1}^{n} T_i) \cup Q_n \\
&= A''
\end{aligned}$$

Donc $A \sim A'' \sim A' \sim B' = B$. □

Grâce à le théorème de Zylev, on peut définir l'équivalence des polyèdres en le langue des groupes. On introduit le définition suivante.

Definition 2.9. On définit le groupe des polyèdres $\mathcal{P}$ comme le groupe libre sur tous les polyèdres dans $\mathbb{R}^3$, et le groupe d'équivalence $\mathcal{E}$ le sous groupe de P engendré par les éléments de sort que $P - P_1 - P_2 - \cdots - P_n$, où $P = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ est une décomposition de P, et les éléments de sort que $P - Q$, tel que $\exists$ une isométrie affine τ avec $\tau(P) = Q$.

Par le théorème de Zylev et la définition ci-dessus, on voit sans pain la proposition suivante.

Proposition 2.10. *Deux polyèdres P et Q sont équivalents si et seulement si $\kappa(P) = \kappa(Q)$, où $\kappa : \mathcal{P} \to \mathcal{P}/\mathcal{E}$ est la projection canonique.* □

3 L'invariant de Dehn et le théorème de Sydler

Dans cette section, on va donner la définition de l'invariant de Dehn et l'utiliser pour montrer que le tétraèdre régulier et le cube ne sont jamais équivalents. Et puis, on donne l'énoncé du théorème de Sydler, dont la preuve se trouvé dans le chapitre suivant.

Pour définir l'invariant de Dehn, il faut définir une bonne notion d'angle dièdre, car l'angle dièdre associé à une arête d'une polyèdre concave peut être plus grand que π.

Definition 3.1. Soit P un polyèdre, et a une arête de P. Soit O un point appartenant à l'intérieur de a, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le disque planaire centré à O, de rayon ε et orthogonal à a, rencontre P en un secteur S. L'angle dièdre de P associé à a est donc défini comme l'angle au centre de S.

Definition 3.2. Soit P un polyèdre, l'invariant de Dehn de P, noté par $D(P)$ est défini par la formule suivante :

$$D(P) := \sum_{a\in\Lambda} l_a \otimes \overline{\theta_a} \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_\pi$$

où Λ est l'ensemble d'arêtes de P, l_a est la longueur de l'arête a, θ_a est l'angle dièdre de P associé à a, et $\mathbb{R}_\pi = \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

Remarque 3.3. Il est bien sûr plus naturel que l'on utilise $\mathbb{R}_{2\pi}$ à la place de $\mathbb{R}_\pi$, mais par des raisons histoires, plupart de littératures utilisent $\mathbb{R}_\pi$. C'est pas difficile de voir que comme groupes abéliens, on a $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}_\pi$, $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}_{2\pi}$ et $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ sont isomorphismes naturellement. Donc on utilise $\mathbb{R}_\pi$ ici.

Exemple 3.4. L'invariant de Dehn d'un cube est 0, et l'invariant de dehn d'un tétraèdre est $6l\otimes(\arccos\frac{1}{3})+\pi\mathbb{Z}$ [1].

Exemple 3.5. Soit $a, b, \in]0,1[$, on note par $T(a,b)$ le tétraèdre $ABCD$ tel que AB, BC, CD sont orthogonaux entre eux, et $|AB| = \sqrt{a^{-1}-1}$, $|CD| = \sqrt{b^{-1}-1}$, $|BC| = \sqrt{|AB|\cdot|CD|}$. Soient $\alpha, \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tels que $\sin^2\alpha = a, \sin^2\beta = b$. On définit $\alpha * \beta$ l'élément appartenant à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ qui satisfait $\sin^2(\alpha*\beta) = ab$. Alors, $D(T(a,b)) = \cot\alpha\otimes\alpha+\cot\beta\otimes\beta-\cot(\alpha*\beta)\otimes(\alpha*\beta)$.

Par considérer toutes les arêtes dans un découpage et les propriétés du produit tensoriel, on a immédiatement la proposition suivante.

Proposition 3.6. *Si deux polyèdres P et Q sont équivalents, alors $D(P) = D(Q)$*

Démonstration. Il suffit de montrer le théorème au cas spécial que $P = A\cup B$ est un découpage. Pour ceci, on considère une arête commune a de A et B. Les contributions de a pour les invariants de Dehn de A et B sont respectivement $l_a\otimes\alpha$ et $l_a\otimes\beta$, où α et β sont respectivement les angles dièdres de A et B associé à l'arête a. Si a est aussi une arête de P, on a $\alpha+\beta$ est l'angle dièdre de P associé à a, donc les contributions de a à $D(P)$ et à $D(A)$ et $D(B)$ sont égales. De l'autre côté, si a n'est pas une arête de P, on a $\alpha+\beta = \pi$, donc la contribution de a à $D(A)$ et $D(B)$ est $l_a\otimes\alpha + l_a\otimes\beta = l_a\otimes(\alpha+\beta) = l_a\otimes\pi = 0$. Donc dans tous les cases, les contributions de a à $D(P)$ et à $D(A)+D(B)$ sont égales. Notons les autres arêtes des A et B sont aussi les arêtes de P, et les angles dièdres associés de P et de A ou B sont la même. Alors, $D(P) = D(A)+D(B)$. $\square$

Par calcul simple, on sait l'invariant de Dehn d'un tétraèdre régulier T est $6l\otimes\overline{\arccos\frac{1}{3}} = 6l\otimes\left(\arccos\frac{1}{3}+\pi\mathbb{Z}\right)$, où l est la longueur d'arête de T, et l'invariant de Dehn d'un cube est 0.

Dans $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}_\pi$, on a $l\otimes\overline{q\theta} = (ql)\otimes\overline{\theta}$, $\forall q\in\mathbb{Q}$. Par ailleurs, on peut prouver la proposition suivante en utiliser la propriété universelle du produit tensoriel.

Proposition 3.7. *Soit $\{\pi\}\cup\Gamma$ une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ sur le corps $\mathbb{Q}$, $\forall t\in\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}_\pi$, $\exists! T\subset\Gamma$ tel que T est un ensemble fini, et*

$$t = \sum_{\tau\in T} l_\tau\otimes\overline{\tau}, \quad l_\tau \neq 0$$

$\square$

Donc pour montrer $D(P)\neq 0$, il reste de démontrer $\arccos\frac{1}{3}\notin\pi\mathbb{Q}$.

1. On va montrer plus tar que c'est non nul.

Théorème 3.8. *Si* $\cos\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ *et* $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$*, alors* $\exists n \in \mathbb{N}$ *et* $m \in \mathbb{Z}$*,* m *impaire, tels que* $\cos\alpha = \frac{m}{2^n}$*.*

Démonstration. Soient $p, q \in \mathbb{Q}$, tels que $pgcd(p,q) = 1$, $q > 0$ et $\alpha = \frac{p}{q}\pi$. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists$ un polynôme $Q_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de degré n dont le coefficient du monôme dominant est 2^{n-1}, tel que $Q_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \forall\theta$. Soit $\theta = \frac{\pi}{2}$, $Q_n(0) = c_n = 0, -1,$ ou 1 En particulier, on a $Q_q(\cos\alpha) = \cos(q\alpha) = \cos(p\pi) = d_q = 0, -1,$ ou 1, donc $Q_q(x) - d_q$ est un polynôme qui annule $\cos\alpha$ dont le coefficient du monôme dominant est 2^{q-1} et le coefficient constant est $c_q - d_q = -2, -1, 0, 1$ ou 2. On sait toutes racine rationnelle non nulle de tel polynôme sont de sort que l'énoncé du théorème, ceci termine la preuve. □

D'après le théorème, on a immédiatement

Corollaire 3.9. $\arccos\frac{1}{3} \notin \pi\mathbb{Q}$*, donc* $\forall$ *tétraèdre régulier* T*,* $D(T) \neq 0$*,* T *ne peut pas être équivalent qu'un cube.* □

On sait que si deux polyèdres P et Q sont équivalents, alors $vol(P) = vol(Q)$ et $D(P) = D(Q)$. Le théorème de Sydler, dont la preuve se trouve dans la section suivante, déclare que cet condition est aussi suffisante.

Théorème 3.10 (Théorème de Sydler)**.** *Deux polyèdre* P *et* Q *sont équivalents si et seulement si ils ont le même volume et le même invariant de Dehn.*

4 Preuve du théorème de Sydler et la caractérisation de $D(\mathcal{P})$

Les démonstration dans cette section se réfèrent à [4], [5] et [1].

4.1 Quelque lemmes géométriques

Lemme 4.1. *Deux polygones ont la même aire si et seulement si ils sont équivalents par découpage.*

Démonstration. Par la figure suivante, et le théorème de Zylev, on sait que un polygone quelconque est équivalent avec un rectangle de dont l'une des côtes est de longueur 1. Donc on a immédiatement le lemme. □

D'après le lemme précédent, on a immédiatement le lemme suivant.

Lemme 4.2. *Tout prisme est équivalent à un prisme rectangulaire ayant pour base un carré fixe de côté 1.*
Par suite, deux prismes P *et* Q *sont équivalents si et seulement si ils ont le même volume.* □

Lemme 4.3. *En utilisant les notations dans exemple 3.5, on a pour tous* $a, b, c \in]0,1[$*,les éléments*

$$T(a,b) + T(ab,c) \quad \text{et} \quad T(a,c) + T(ac,b)$$

dans $\mathcal{P}$ *sont équivalents*

Démonstration. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tels que $\sin^2\alpha = a$,$\sin^2\beta = b$,$\sin^2\gamma = c$. Et on définit $* : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2 \to \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ au moyen de $\sin^2(\theta_1 * \theta_2) = \sin^2\theta_1 \sin^2\theta_2$, $\forall\theta_1, \theta_2 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Il suffit de montrer que les deux éléments sont congruents modulo les prismes, car ils ont le même volume.

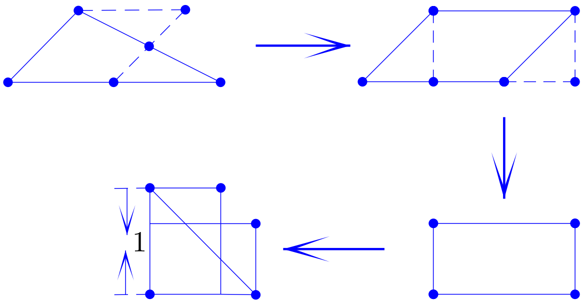

Figure 1

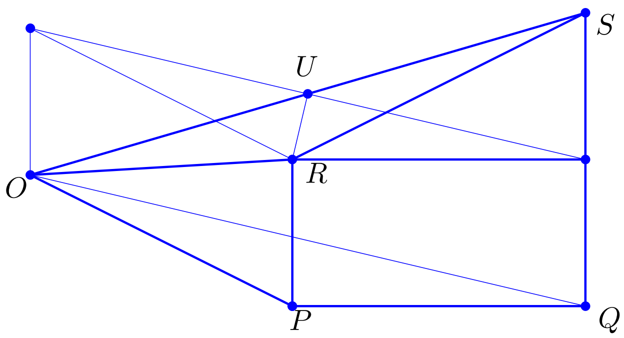

Figure 2

Dans Fig 2 on voit que un polyèdre $OPQSR$ est équivalent à un prisme si $OP = PQ, SQ = 2RP$,SQ et RP sont orthogonaux à la face OPQ.

Dans Fig 3,le polyèdre $ABCD$ est $T(a, b)$ et le polyèdre $ABEF$ est $T(a, c)$.

Comme $\angle DCF = \angle DEF = \pi/2$,le quadrangle $CDEF$ est inscriptible dont le centre du cercle circonscrite est le centre de la diagonale DF, noté par G. Donc les points A, C, D, E, F sont contenus dans une même sphère. On note H le centre de cette sphère et donc HG est orthogonal au plan AEF.

Soient I,J les projections de H sur les plans $ABCF$ et $ABDE$. Alors $HI = \frac{\cot \beta}{2}, HJ = \frac{\cot \gamma}{2}$,car G et H ont les même distances de ces plans. Comme I,J sont des centres des cercles circonscrites des triangles ACF et ADE respectivement, on a $\angle AIF = 2(\pi - \angle ACF) = 2\beta$ et $\angle AJD = 2\angle AED = 2\gamma$.

On considère le polyèdre $ABDFHIJ$.

D'abord on regarde Fig 4. Les points $ABCDHJ$ sont les mêmes que Fig 3. H et J sont

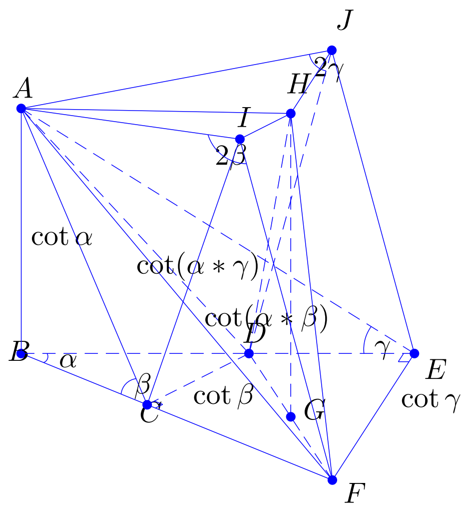

FIGURE 3

des centre des segments AK et AM. Comme $ABCD$ est $T(a,b)$, on obtient en calculer que $AD = \cot(\alpha * \beta)$. Donc AD, DM, MK sont orthogonaux et $MK = 2HJ = \frac{\cot\gamma}{2}, \angle AMD = \frac{1}{2}\angle AJD = \gamma$. On en déduit que $ADMK$ est $T(ab,c)$.

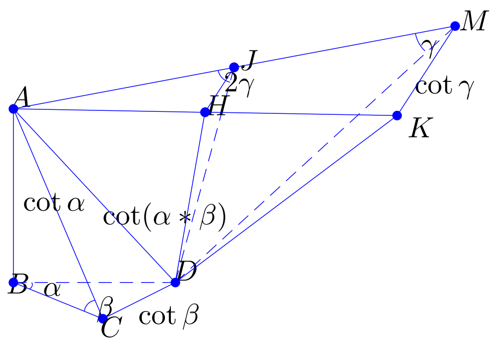

FIGURE 4

De même, dans Fig 5, H et I sont des centre des segments AK et AL, et $AFLK$ est $T(ac,b)$.

Comme les polyèdres $AICHD, FICHD, DJMHK$ sont de même type que le polyèdre $OPQRS$ dans Fig 3, on voit que le polyèdre $ABDFHIJ$ est congruent à $T(a,b) + T(ab,c)$ modulo les prismes.

De même, il est aussi congruent à $T(a,c) + T(ac,b)$. On en déduit que $T(a,b) + T(ab,c)$ et $T(a,c) + T(ac,b)$
dans $\mathcal{P}$ sont équivalents. $\square$

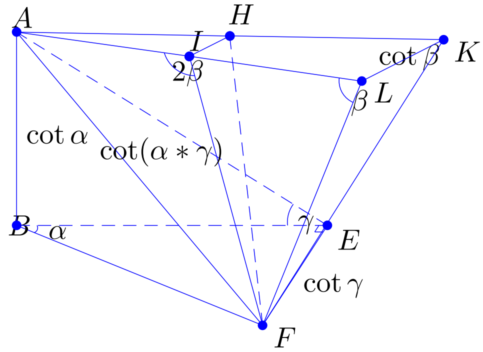

FIGURE 5

Lemme 4.4. *Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, les éléments*
$aT(\frac{a+b}{a+b+c}, \frac{a}{a+b}) + bT(\frac{a+b}{a+b+c}, \frac{b}{a+b})$ *et*
$aT(\frac{a+c}{a+b+c}, \frac{a}{a+c}) + cT(\frac{a+c}{a+b+c}, \frac{c}{a+c})$ *dans $\mathcal{P}$ sont équivalents.*

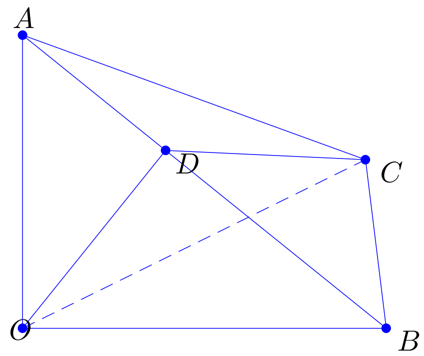

FIGURE 6

Démonstration. Soit $OABC$ un tétraèdre dont les arrêtes $OA = \sqrt{bc}.OB = \sqrt{ac}, OC = \sqrt{ab}$ sont orthogonaux. Ce tétraèdre peut être découpé en les deux tétraèdres dans la première somme du lemme par le plan passant OC orthogonal à AB(Fig 6). De même, il est découpé en les deux tétraèdres dans la deuxième somme par le plan passant OB orthogonal à AC(Fig 7). On en déduit le lemme. □

Lemme 4.5. *Soient $\xi, \eta, \zeta \in]0, \pi/2[$ dont la somme est π,alors il existe un parallélépipède rectangle $\boldsymbol{R}$ avec les diagonales $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{CD}, \boldsymbol{EF}, \boldsymbol{GH}$ tel que les angles dièdres à l'arrête $\boldsymbol{AB}$ des six tétraèdres en lesquels $\boldsymbol{R}$ est découpé par les plans $\boldsymbol{ABCD}, \boldsymbol{ABEF}, \boldsymbol{ABGH}$ sont $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}$.*

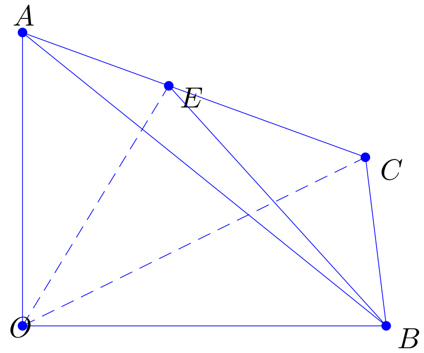

Figure 7

Démonstration. Par Fig 8

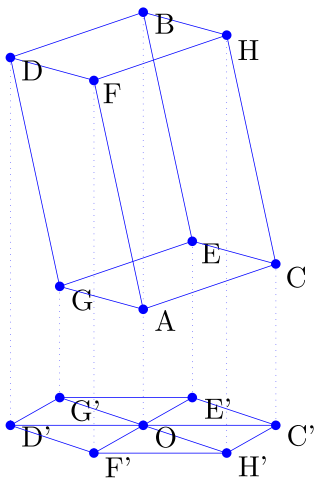

Figure 8

□

4.2 Quelques résultats sur les équations fonctionnelles

Théorème 4.6. *Soient A, X deux groupes abéliens. Soit $F : A^2 \to X$ une application satisfaisant :*

$$F(a,b) = F(b,a), \qquad (1)$$
$$F(a,b) + F(a+b,c) = F(b,c) + F(a,b+c). \qquad (2)$$

Alors si X est divisible, il existe une application $f : A \to X$ telle que

$$F(a,b) = f(a+b) - f(a) - f(b). \tag{3}$$

Démonstration. En prenant $b = 0$ dans (2), on voit que $F(a,0) = F(0,c) = F(0,0)$ pour tous $a, c \in A$. Donc le produit cartésien $W = A \times X$ a une structure d'un groupe abélien avec la loi de composition

$$(a,x) + (b,y) = (a+b, x+y+F(a,b))$$

L'élément neutre 0_W est $(0, -F(0,0))$. On note $\varphi : W \to A$ la projection canonique qui est évidemment un homomorphisme de groupe. Elle est surjective dont le noyau peut être identifié à X par l'isomorphisme $(0,x) \mapsto x$.
Donc on a une suite exacte courte des groupes abéliens :

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow W \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$$

Il suffit de trouver un homomorphisme de A à W relevant φ (i.e. cette suite est scindée),car ce homomorphisme a la forme $a \mapsto (a, f(a))$ où $f : A \to X$ est l'application qu'on veut.Donc il suffit de montrer que il existe un sous-groupe S de W tel que $\varphi|_S : S \to A$ est bijective.
On définit $S_0 = \{0_W\}, A_0 = \{0\}$. Alors $\varphi|_{S_0}$ est bijective de S_0 à A_0. Soient S_1 un sous-groupe de W et A_1 un sous-groupe propre de A tels que $\varphi|_{S_1}$ est bijective de S_1 à A_1. Soit $a \in A \backslash A_1$. On définit $A_2 = A_1 + \mathbb{Z}a$. On veut trouver un élément x de X tel que φ est une bijection de $S_2 = S_1 + \mathbb{Z}(a,x)$ à A_2, et puis on en déduit la résultat par récurrence transfinie.
Il évident que $\varphi|_{S_2} : S_2 \to A_2$ est surjective pour tout $x \in X$. $\varphi|_{S_2}$ se passe à un homomorphisme $\bar{\varphi} : S_2/S_1 \to A_2/A_1$. Il suffit de trouver x tel que $\bar{\varphi}$ est injective, car $\varphi|_{S_1}$ est bijective de S_1 à A_1.
Par définition, $A_2/A_1 = <[a]>, S_2/S_1 = <[(a,x)]>$ et $\bar{\varphi}([(a,x)]) = [a]$. Si $|<[a]>| = \infty$,$\bar{\varphi}$ est automatiquement injective. Sinon, on suppose que $|<[a]>| = p$, et il suffit de trouver x tel que $p[(a,x)] = [0]$.
Comme $p[a] = [0]$,on a $pa \in A_1$. Donc il existe $y \in X$ tel que $(qa, y) \in S_1$,car $\varphi|_{S_1}$ est bijective de S_1 à A_1. Comme X est divisible, on peut trouver $x \in X$ tel que

$$qx + \sum_{i=0}^{q-1} F(a, ia) = y.$$

Donc

$$q(a,x) = (qa, qx + \sum_{i=0}^{q-1} F(a, ia)) = (qa, y) \in S_1.$$

C'est à dire,$p[(a,x)] = [0]$ dans S_2/S_1. □

Théorème 4.7. *Soient A un corps de caractéristique 0 et X un espace vectoriel sur A. Soit $F : A^2 \to X$ une application satisfaisant :*

$$F(a,b) = F(b,a), \tag{4}$$
$$F(a,b) + F(a+b,c) = F(b,c) + F(a,b+c), \tag{5}$$
$$F(ac,bc) = cF(a,b). \tag{6}$$

Alors il existe une application $f : A \to X$ telle que

$$
\begin{aligned}
F(a,b) &= f(a+b) - f(a) - f(b), && (7)\\
f(ab) &= bf(a) + af(b). && (8)
\end{aligned}
$$

Démonstration. D'après (5) et (6), le produit cartésien $W = A \times X$ a une structure d'un anneau avec l'addition et la multiplication comme ci-dessous :

$$
\begin{aligned}
(a,x)+(b,y) &= (a+b, x+y+F(a,b))\\
(a,x)(b,x) &= (ab, bx+ay).\\
0_W = (0, -F(0,0)) &\quad , \quad 1_W = (1,0).
\end{aligned}
$$

La projection $\varphi : W \to A$ est un homomorphisme des anneaux.
Il est facile de vérifier que une application $f : A \to X$ vérifiera les équations (7) et (8) si $\{(a, f(a))|a \in A\}$ est un sous-anneau de W. Donc il suffit de montrer que il existe un sous-anneau S de W tel que $\varphi|_S : S \to A$ est bijective.
On définit $S_0 = \mathbb{Z}1_W, A_0 = \mathbb{Z}1$. Ils sont des sous-anneaux de W et de A tels que $\varphi|_{S_0}$ est bijective de S_0 à A_0.
Soient $S_1 \supseteq S_0$ un sous-anneau de W et A_1 un sous-anneau propre de A tels que $\varphi|_{S_1}$ est bijective de S_1 à A_1.Soit $a \in A \backslash A_1$.On définit $A_2 = A_1[a]$ un sous-anneau de A.On veut trouver un élément x de X tel que φ est une bijection de $S_2 = S_1[(a,x)]$ à A_2, et puis on en déduit la résultat par récurrence transfinie.
$\varphi|_{S_1}$ se prolonge à un isomorphisme entre les anneaux des polynômes $S_1[T]$ et $A_1[T]$,notée par $\bar{\varphi}$.
On note $I = \{P[T] \in A_1[T], \text{tel que}\, P(a) = 0\}$ et $J = \{P[T] \in S_1[T], \text{tel que}\, P((a,x)) = 0_W\}$. Ils sont des idéals de $A_1[T]$ et $S_1[T]$ tels que

$$
\begin{aligned}
A_2 &\simeq A_1[T]/I,\\
S_2 &\simeq S_1[T]/J.
\end{aligned}
$$

Donc si on souhaite que $\varphi|_{S_1}$ se prolonge à une bijection de S_2 à A_2, il suffit de trouver un $x \in X$ tel que $\bar{\varphi}(J) = I$.
Soit $P[T] \in S_1[T]$ tel que $P((a,x)) = 0_W = (0, -F(0,0))$. Alors $\bar{\varphi}(P)(a) = \varphi(P((a,x))) = 0$. Donc on a $\bar{\varphi}(J) \subseteq I$ pour $x \in X$ quelconque.
Soit $Q \in I$ non-nul qui a le plus petit degré. On note $\bar{Q} \in S_1[T]$ avec $\bar{\varphi}(\bar{Q}) = Q$. Pour $x \in X$ quelconque, on a $(a,x) = (a,x_0) + (0,x)$ où $x_0 = -F(0,0)$. Comme $(0,x)^2 = 0_W$, par la formule de Taylor, on a

$$\bar{Q}((a,x)) = \bar{Q}((a,x_0)) + \bar{Q}'((a,x_0))(0,x).$$

Comme $0 = Q(a) = \varphi(\bar{Q}((a,x)))$, il existe $z \in X$ tels que $\bar{Q}((a,x)) = (0,z)$. On note $\bar{Q}'((a,x_0)) = (b,y)$, alors $b = Q'(a) \neq 0$, car $\deg Q' < \deg Q$ et $Q' \neq 0$. Donc l'équation $\bar{Q}((a,x)) = 0_W$ a une solution $x = z/b$. Avec ce x, on a $\bar{\varphi}(J) \supseteq I$ car pour tout $P \in I$, il existe $d \in A_1$ non-nul et $R \in A_1[T]$ tels que $dP = QR$.
Donc on a trouvé un x tel que $\bar{\varphi}(J) = I$, ceci finit la preuve. □

Lemme 4.8. *Soient A un groupe abélien ordonné et X un groupe abélien. On note $A_+ = \{a \in A | a > 0\}$. Soit $F : A_+^2 \to X$ une application satisfaisant les équations (1) et (2). Alors F se prolonge à une application $\bar{F} : A^2 \to X$ satisfaisant les équations (1) et (2) pour tous $a, b, c \in A$.*

Démonstration. On définit $\bar{F}(a,b) = 0$ lorsque l'un des éléments $a, b, a+b$ est 0. Sinon, on définit $\bar{F}(a,b)$ par la table ci-dessous :

a	b	$a+b$	$\bar{F}(a,b)$
$+$	$+$	$+$	$F(a,b)$
$+$	$-$	$+$	$-F(a+b,-b)$
$+$	$-$	$-$	$F(-a-b,a)$
$-$	$+$	$+$	$-F(a+b,-a)$
$-$	$+$	$-$	$F(-a-b,b)$
$-$	$-$	$-$	$-F(-a,-b)$

On peut vérifier facilement que l'application $\bar{F} : A^2 \to X$ satisfait les conditions. □

Lemme 4.9. *Soient A un corps ordonné de caractéristique 0 et X un espace vectoriel sur A. On note $A_+ = \{a \in A | a > 0\}$. Soit $F : A_+^2 \to X$ une application satisfaisant les équations (4), (5), (6). Alors F se prolonge à une application $\bar{F} : A^2 \to X$ satisfaisant les équations (4), (5), (6) pour tous $a, b, c \in A$.*

Démonstration. La preuve est la même que le lemme 4.8. □

Théorème 4.10. *Soit V un espace vectoriel réel. Alors pour toute application $F :]0,1[^2 \to V$ satisfaisant :*

$$F(a,b) = F(b,a), \tag{9}$$
$$F(a,b) + F(ab,c) = F(b,c) + F(a,bc), \tag{10}$$

il existe une application $f :]0,1[\to V$ telle que

$$F(a,b) = f(ab) - f(a) - f(b). \tag{11}$$

Démonstration. On obtient ce théorème en prenant $A =]0,+\infty[$ avec la multiplication comme la loi de composition et $X = V$ dans Théorème4.6 et Lemme4.8. □

Théorème 4.11. *Soit V un espace vectoriel réel. Alors pour toute application $F :]0,+\infty[^2 \to V$ satisfaisant :*

$$F(a,b) = F(b,a), \tag{12}$$
$$F(a,b) + F(a+b,c) = F(b,c) + F(a,b+c), \tag{13}$$
$$F(ac,bc) = cF(a,b). \tag{14}$$

il existe une application $f :]0,+\infty[\to V$ telle que

$$F(a,b) = f(a+b) - f(a) - f(b), \tag{15}$$
$$f(ab) = bf(a) + af(b). \tag{16}$$

Démonstration. On obtient ce théorème en prenant $A = \mathbb{R}$ et $X = V$ dans Théorème4.7 et Lemme4.9. □

4.3 La preuve du théorème de Sydler

D'abord, on fait quelque préparations pour la démonstration.

Notons par lemme , deux prismes sont équivalents si et seulement si ils ont le même volume. Soit $\mathcal{F}$ le sous groupe de $\mathcal{P}$ engendré par $\mathcal{E}$(voir la définition 2.9) et tous les prismes. On a la proposition suivante.

Proposition 4.12. *Deux polyèdres P et Q sont équivalents si et seulement si $p(P) = p(Q)$, où $p : \mathcal{P} \to \mathcal{P}/\mathcal{F}$ est la projection canonique.* $\square$

Et puis, on note par H_t le homothétie par rapport t pour $t > 0$. On définit la multiplication par un nombre réel et un élément dans $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ comme ci-dessous

$$t[P] = \begin{cases} [H_t(P)] & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -[H_{-t}(P)] & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

où $[\cdot] = p$ est la projection canonique.

C'est facile de voir que (par exemple [1]) $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ munie avec cette multiplication est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. On peut aussi munir une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi$ par definir $t(l \otimes \tau) = (tl) \otimes \tau$. Et puis, on peut vérifier que l'invariant de Dehn D induit un homomorphisme $\overline{D}$ entre l'espaces vectoriels de $\mathcal{P}/\mathcal{F}$ à $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi$. Le théorème de Sydler est exactement l'injectivité de l'homomorphisme D.

Maintenant, l'injectivité de $\overline{D}$, donc le théorème de Sydler peut être obtenu par le théorème suivant par $V = \mathcal{P}/\mathcal{F}$ et $\Phi = Id$.

Théorème 4.13. *$\forall$ espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$, et un homomorphisme $l : \mathcal{P}/\mathcal{F} \to V$, $\exists$ un homomorphisme $\Phi : \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi \to V$ tel que $l = \Phi \circ \overline{D}$. Autrement dit, $\forall l : \mathcal{P}/\mathcal{F} \to V$ qui est un homomorphisme, il exists un homomorphisme $\Phi : \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi \to V$, tel que on a le diagramme commutatif suivant.*

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{P} \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "D"] & \\
\mathcal{P}/\mathcal{F} \arrow[rr, "\overline{D}"] \arrow[dr, "l"'] & & \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi \arrow[dl, dashed, "\Phi"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Si tel Φ exists, on définit $\varphi : \mathbb{R} \to V$ comme $\varphi(t) = \Phi\left(1 \otimes \overline{t}\right)$. On voit $\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t), \forall s, t \in \mathbb{R}$ et $\varphi(\pi) = 0$. Inversement, une telle φ induit naturellement un homomorphisme Φ entre les espaces vectoriels. Donc le théorème est vrai si on peut construire une telle φ telle que

$$l(p(P)) = \sum l_v \otimes \varphi(\alpha_v) \tag{17}$$

où la somme traverse tous les arêtes de P.

Pour $a, b \in]0,1[$, on définit $F :]0,1[^2 \to V$

$$F(a,b) = l \circ p(T(a,b)) \tag{18}$$

D'après lemme, on a

$$F(a,b) = F(b,a), \qquad \forall a,b \in \left]0,1\right[, \tag{19}$$
$$F(a,b) + F(ab,c) = F(a,c) + F(ac,b), \qquad \forall a,b,c \in \left]0,1\right[. \tag{20}$$

Par lemme, on sait $\exists f : \left]0,1\right[\to V$ telle que

$$F(a,b) = f(a) + f(b) - f(a+b) \tag{21}$$

Par lemme 4.4, on a

$$\begin{aligned} &aF\left(\frac{a+b}{a+b+c}, \frac{a}{a+b}\right) + bF\left(\frac{a+b}{a+b+c}, \frac{b}{a+b}\right) \\ &= aF\left(\frac{a+c}{a+b+c}, \frac{a}{a+c}\right) + cF\left(\frac{a+c}{a+b+c}, \frac{c}{a+c}\right), \forall a,b,c > 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Par (21) et (22), on a

$$\left[af\left(\frac{a}{a+b}\right) + bf\left(\frac{b}{a+b}\right)\right] + \left[(a+b)f\left(\frac{a+b}{a+b+c}\right) + cf\left(\frac{c}{a+b+c}\right)\right] \tag{23}$$
$$= \left[af\left(\frac{a}{a+c}\right) + cf\left(\frac{c}{a+c}\right)\right] + \left[(a+c)f\left(\frac{a+c}{a+b+c}\right) + bf\left(\frac{b}{a+b+c}\right)\right], \forall a,b,c > 0. \tag{24}$$

Donc si on définit $G : \left]0,+\infty\right[^2 \to V$ comme

$$G(a,b) = af\left(\frac{a}{a+b}\right) + bf\left(\frac{b}{a+b}\right). \tag{25}$$

Par (24) et la définition de G, on a immediatement les équations suivantes

$$G(a,b) = G(b,a), \tag{26}$$
$$G(a,b) + G(a+b,c) = G(a,c) + G(a+c,c), \tag{27}$$
$$G(\lambda a, \lambda b) = \lambda G(a,b). \tag{28}$$

Par théorème 4.11, on sait que $\exists g : \left]0,+\infty\right[\to V$ telle que pour tous $a,b > 0$

$$G(a,b) = ag(a) + bg(b) - (a+b)g(a+b), \tag{29}$$
$$g(a) + g(b) - g(ab) = 0. \tag{30}$$

Notons $g(1) = 0$ par (30), et $\forall a,b \in \left]0,1\right[$, tels que $a+b=1$, on a

$$af(a) + bf(b) = G(a,b) = ag(a) + bg(b). \tag{31}$$

On introduit la fonction $h : \left]0,1\right[\to V$ par $h = f - g$. D'après (21) et (30), on a

$$F(a,b) = h(a) + h(b) - h(ab), \forall a,b \in \left]0,1\right[, \tag{32}$$

où h satisfait le propriété suivante.

$$h(a) + h(b) = 1, \forall a,b > 0,\ a+b = 1. \tag{33}$$

Maintenant on définit

$$\varphi(\xi)=\begin{cases}\tan\xi\, h\left(\sin^2\xi\right) & \text{si } \xi\notin(\pi/2)\,\mathbb{Z},\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\tag{34}$$

Par (32) et (18), on a immediatement

$$l\circ\varphi\left(T\left(a,b\right)\right)=\cot\alpha\,\varphi\left(\alpha\right)+\cot\beta\,\varphi\left(\beta\right)+\cot\left(\alpha*\beta\right)\,\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha*\beta\right).\tag{35}$$

Donc, (17) est vrai pour tous les tétraèdres de sort que $T\left(a,b\right)$ et puis pour tous les $\lambda\left(a,b\right)$.

On vérifie facilement que $\varphi\left(\pi\right)=0$ et $\varphi\left(\xi+\eta\right)=\varphi\left(\xi\right)+\varphi\left(\eta\right)=0$ si $\xi+\eta\in\left(\pi/2\right)\mathbb{Z}$. Et $\forall\xi,\eta,\zeta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ avec la somme π, on utilise lemme 4.5 et le fait que l'invariant de Dehn d'un parallélépipède rectangle est 0, et on a $\varphi(\xi)+\varphi(\eta)+\varphi(\zeta)=0$ (Les contributions des tous les angles annulent). Donc on a $\varphi(\xi+\eta)=\varphi(\xi)+\varphi(\eta)$ si ξ,η et $\pi-\xi-\eta$ sont dans $]0,\frac{\pi}{2}[$, et puis pour ξ,η et $\pi-\xi-\eta$ dans $[0,\frac{\pi}{2}]$ aussi.

Si $\xi,\varphi,\xi+\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$, on a encore

$$\varphi(\xi+\eta)=-\varphi(\pi-(\xi+\eta))=-\varphi(\frac{\pi}{2}-\xi)-\varsigma(\frac{\pi}{2}-\eta)=\varphi(\xi)+\varphi(\eta).$$

$\forall\xi,\eta\in\mathbb{R}$, on a $\xi=m\frac{\pi}{2}-\xi_0$ et $\eta=n\frac{\pi}{2}-\eta_0$, où $m,n\in\mathbb{Z}$ et $\xi_0,\eta_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Donc

$$\varphi(\xi+\eta)=-\varphi(\xi_0)-\varphi(\eta_0)=-\varphi(\xi_0+\eta_0)=\varphi(\xi+\eta).\tag{36}$$

Donc, φ est une fonction telle que $\varphi(\xi+\eta)=\varphi(\xi)+\varphi(\eta)$ et $\varphi(\pi)=0$. Comme (17) est vrai pour tous les $\lambda T(a,b)$, et un tétraèdres quelconq peut être engendré par tels tétraèdres, on sait (17) est vrai pour tous les tétraèdres et donc pour tous les polyèdres. Ceci termine notre preuve. □

4.4 La caractérisation de $D(\mathcal{P})$

Maintenant, une question naturelle est de demander que quand un élément de $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}_\pi$ est l'invariant de Dehn d'un polyèdre ? On va répondre la question dans cette section.

On sait que $D\left(\mathcal{P}\right)=\overline{D}\left(\mathcal{P}/\mathcal{F}\right)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}_\pi$. $\forall$ espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$, le homomorphisme $\Phi:\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}_\pi\to V$, qui s'annule sur $D\left(\mathcal{P}\right)$, est un homomorphisme vérifiant le théorème 4.13, avec $l=0$. Par la preuve de du théorème 4.13, il est claire que un tel homomorphisme est de sorte que $\varphi\left(t\right)=\Phi\left(1\otimes\bar{t}\right)$ est sous la forme dans (34), où $h:]0,1[\to V$ est une fonction telle que

$$h(a)+h(b)-h(ab)=0,\quad\forall a,b\in]0,1[,\tag{37}$$

et de plus,

$$ah(a)+bh(b)=0,\quad\forall a,b\in]0,1[,\ a+b=1.\tag{38}$$

Definition 4.14. Une fonction $d:\mathbb{R}\to V$ est dit une dérivation, si $\forall a,b\in\mathbb{R}$, d vérifie les propriétés suivantes,

$$d(a+b)=d(a)+d(b),\tag{39}$$

et

$$d(ab)=ad(b)+bd(a).\tag{40}$$

Soit d une dérivation, on a par (40), $d(1) = d(1) + d(1)$, donc $d(1) = 0$. En outre, par (39), $d(a+1) = d(a)$, donc 1 est une période de d. La fonction $h :]0,1[\to V$ définie par $h(a) = d(a)/a$ évidement satisfait (37) et (38).

Réciproquement, soit $h :]0,1[\to V$ vérifie (37) et (38). Définissons une fonction périodique $d : \mathbb{R} \to V$ avec période 1 comme $d(a) = ah(a)$, $\forall a \in]0,1[$ et $d(1) = 0$, alors d est une dérivation.

Pour monter ceci, notons d'abord que (39) est vraie pour $a, b \in [0,1]$ et $a + b = 1$, et (40) est vraie pour tous $a, b \in [0,1]$. Supposons maintenant $a, b \in [0,1]$ et $a + b \in]0,1]$. Alors, par (40), on a

$$d(a) = d(\frac{a}{a+b}(a+b)) = \frac{a}{a+b}d(a+b) + (a+b)d(\frac{a}{a+b}), \tag{41}$$

et

$$d(b) = d(\frac{b}{a+b}(a+b)) = \frac{b}{a+b}d(a+b) + (a+b)d(\frac{b}{a+b}). \tag{42}$$

On somme (41) et (42), et puis on a (39) est vérifié pour tous $a, b \in [0,1]$, avec $a + b \in]0,1]$. Donc (39 est vraie pour tous $a, b, a+b \in [0,1]$. Si on a $a, b \in [0,1]$, mais $a + b \in [1,2]$, alors $1-a, 1-b, (1-a)+(1-b) \in [0,1]$. Donc

$$\begin{aligned} d(a) + d(b) &= -d(1-a) - d(1-b) = -d(2-a-b) \\ &= d(a+b-1) = d(a+b). \end{aligned}$$

et $\forall a, b \in [0,1]$ (39) est vraie.

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\exists a_0, b_0 \in [0,1]$ et $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $a = a_0 + m$ et $b = b_0 + n$. Comme d est de période 1, on a

$$d(a+b) = d(a_0 + b_0) = d(a_0) + d(b_0) = d(a) + d(b).$$

Donc, d vérifie (39).

De plus,

$$\begin{aligned} d(ab) &= d(a_0b_0 + na_0 + mb_0) = d(a_0b_0) + d(na_0) + d(mb_0) \\ &= b_0d(a_0) + a_0d(b_0) + nd(a_0) + md(b_0) = bd(a) + ad(b). \end{aligned}$$

Donc, d vérifie (40), et d est une dérivation.

Si on définit $h :]0,1[\to V$ par $h(a) = d(a)/a$, où d est une dérivation donné, alors dans l'équation (34), on a

$$\tan\xi h(\sin^2\xi) = \tan\xi d(\sin^\xi)/\sin^2\xi = 2\tan\xi\sin\xi d(\sin\xi)/\sin^2\xi = 2d(\sin\xi)/\cos\xi.$$

Donc, par définir $0/0 = 0$, on a le théorème suivant.

Théorème 4.15. *$\forall$ espace vectoriel V sur $\mathbb{R}$, les homomorphismes $\Phi : \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi \to V$, qui s'annulent sur $D(\mathcal{P})$, correspondent bijectivement avec toutes les dérivations $d : \mathbb{R} \to V$ au moyen de*

$$\Phi(1 \otimes \xi) = 2d(\sin\xi)/\cos\xi. \tag{43}$$

□

Prenons $V = \mathbb{R}$, par le théorème de Hahn-Banach, on sait que $D(\mathcal{P})$ est l'intersection des les noyaux de tous les homomorphismes de $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi$ à $\mathbb{R}$, qui s'annulent sur $D(\mathcal{P})$. D'après le théorème (4.15), on a la caractérisation de $D(\mathcal{P})$ suivante.

Théorème 4.16. *Le sous espace $D(\mathcal{P}) = \overline{D}(\mathcal{P}/\mathcal{F})$ de $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi$ se compose de les éléments sous la forme $\sum_{i=1}^n l_i \otimes \xi_i$ tels que*

$$\sum_{i=1}^n l_i d(\sin\xi_i)/\cos\xi_i = 0 \tag{44}$$

pour toutes dérivations $d : \mathbb{R} \to V$. □

4.5 Le module des différentielles de Kähler et une suite exacte courte

D'après le théorème (4.16), on a associé la caractérisation de $D(\mathcal{P})$ avec la dérivation de $\mathbb{R}$. Cette caractérisation peut être ecriré sous une mieux forme si on utilise la notion du module des différentielles de Kähler.

Definition 4.17. Soient R un anneau unitaire commutatif, M un module à gauche unitaire sur R, et $d : R \to M$ un homomorphisme entre les modules à gauche sur R. On dit d est une dérivation si de plus $\forall a, b \in R$, on a

$$d(ab) = ad(b) + bd(a).$$

Dans toute la suite, on suppose tous anneaux sont unitaires et commutatifs, et tous modules sont les modules unitaires à gauche. Rappelons que si $f : A \to B$ est un homomorphisme des anneaux, M un module sur B. On peut alors munir M une structure naturelle de module sur A, c'est à dire, $\forall a \in A, m \in M$, on envoie (a, m) vers $f(a)m$. Par abus de notation, on le note am.

Definition 4.18. Soient $\psi : R \to S$ un homomorphisme des anneaux, M un module sur S. On dit un homomorphisme des R-modules $d : S \to M$ une dérivation R-linéaire(sur S), si on a

$$\forall a, b \in S, d(ab) = ad(b) + bd(a).$$

On dit le S-module $\Omega_{S/R}$ le module des différentielles de Kähler de S sur R, si on a une dérivation R-linéaire $d_R : S \to \Omega^1_{S/R}$ qui factorise toutes les dérivations R-linéaires sur S.

Si d est une dérivation R-linéaire, alors $d(1) = d(1 \cdot 1) = 2d(1)$, $d(1) = 0$, donc $d(r) = rd(1) = 0$, $\forall r \in R$.

Proposition 4.19. *Pour tous homomorphisme des anneaux $\psi : R \to S$, le module des différentielles de Kähler existe.*

Démonstration. Soit $\Omega^1(S)$ le S-module libre sur l'ensemble des symboles $\{ds | s \in S\}$. Soit N le sous module de $\Omega^1(S)$ engendré par les éléments de l'une des formes suivantes.

(a) dr, $r \in R$,

(b) $d(s + t) - ds - dt$,

(c) $d(st) - sdt - tds$.

On définit $\Omega^1_{S/R}$ comme le module quotient $\Omega(S)/N$. Et puis, on définit $\delta_R : S \to \Omega^1_{S/R}$ par

$$\delta_R(s) = ds + N = \overline{ds}, \forall s \in S. \tag{45}$$

Alors, on a immédiatement que δ_R est une dérivation R-linéaire.

$\forall \delta : S \to M$ dérivation R-linéaire, comme $\Omega(S)$ est libre, $\exists$ un homomorphisme des S-modules $\Psi : \Omega(S) \to M$, telle que on a le diagramme commutatif des applications suivant.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "\delta"'] & \Omega(S) \arrow[d, dashed, "\Psi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

où $d(s) = ds$, $\forall s \in S$. Alors, comme δ est une dérivation R-linéaire, on a $\Psi(dr) = \delta(r) = 0$, $\Psi(d(s+t)-ds-dt) = \delta(s+t)-\delta(s)-\delta(t) = 0$, et $\Psi(d(st)-sdt-tds) = \delta(st)-s\delta(t)-t\delta(s) = 0$. Donc, Ψ s'annule sur N, Ψ induit une homomorphisme des S-modules $\psi : \Omega^1_{S/R} \to M$ telle que on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\delta_{S/R}"] \arrow[dr, "d"] \arrow[ddr, "\delta"'] & & \Omega^1_{S/R} \arrow[ddl, dashed, "\psi"] \\
& \Omega(S) \arrow[ur] \arrow[d, "\Psi"] & \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Alors, $\delta = \psi \circ \delta_{S/R}$. Ceci termine la preuve. □

Remarque 4.20. On dit $\delta_{S/R}$ dans la preuve la dérivation canonique.

Soient $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$ le module des différentielles de Kähler de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$, et $\delta_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$ la dérivation canonique. Comme $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$ est un module sur le corps $\mathbb{R}$, il est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Par le théorème (4.16), on a un homomorphisme des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, noté $\delta : \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi \to \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$, tel que $\delta(1 \otimes \xi) = \frac{2\delta_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}(\sin \xi)}{\cos \xi}$, et δ s'annule sur $D(\mathcal{P}) = \overline{D}(\mathcal{P}/\mathcal{F})$.

On a alors une suite des espaces vectoriels réels suivante

$$0 \hookrightarrow \mathcal{P}/\mathcal{F} \xrightarrow{\overline{D}} \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} \to 0. \tag{46}$$

On va montrer que la suite (46) est exacte. Le théorème de Sydler entraîne que la suite est exacte en $\mathcal{P}/\mathcal{F}$, et on sait que $\overline{D}(\mathcal{P}/\mathcal{F}) \subset \text{noyau}(\delta)$. $\forall \sum_{i=1}^n l_i \otimes \xi_i \in \text{noyau}(\delta)$, et $\forall$ dérivation $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $d(\mathbb{Q}) = 0$ car $d(1) = 0$ et $nd(\frac{1}{n}) = d(1) = 0$. Alors d est une dérivation $\mathbb{Q}$ linéaire, donc $\exists$ un homomorphisme des espaces vectoriels, $\psi : \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$, tel que $d = \psi \circ \delta_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n l_i d(\sin \xi_i)/\cos \xi_i &= \sum_{i=1}^n l_i \psi(\delta_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}(\sin \xi_i))/\cos \xi_i && (47) \\
&= (1/2)\psi(\sum_{i=1}^n 2 l_i \delta_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}(\sin \xi_i)/\cos \xi_i) && (48) \\
&= \psi(\delta(\sum_{i=0}^n l_i \otimes \xi_i)) = 0. && (49)
\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème (4.16), on a $\sum_{i=0}^n l_i \otimes \xi_i \in \overline{D}(\mathcal{P}/\mathcal{F})$. Donc $\overline{D}(\mathcal{P}/\mathcal{F}) = \text{noyau}(\delta)$, et la suite (46) est exacte en $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi$. Il reste à vérifier que l'homomorphisme δ est surjectif. Par la preuve de proposition (4.19), on sait que $\Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$ est un espace vectoriel engendré par les éléments $\overline{ds}$, $s \in \mathbb{R}$. $\forall s \in \mathbb{R}$. Si $s \in \mathbb{Z}$, on a $\overline{ds} = 0 \in \delta(\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi)$. Donc on peut supposer que $s \notin \mathbb{Z}$, et $\exists \xi$ tel que $\sin \xi \equiv s (mod\, \mathbb{Z})$, et $\cos \xi \neq 0$. Alors $\overline{ds} = \overline{\sin \xi} = \delta_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}(\sin \xi) = \delta((1/2)\cos \xi \otimes \xi) \in \delta(\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi)$. Donc $\delta(\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}_\pi) = \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$, l'homomorphisme δ est surjectif. Donc la suite (46) est exacte.

5 Théorème de Sydler et homologie des groupes

Definition 5.1. Soit G un groupe.Un G-module à gauche se compose d'un groupe abélien M, avec une action de groupe $\rho : G \times M \to M$ telle que $g(a+b) = ga + gb$.

Definition 5.2. Soient G un groupe et M un G-module à gauche. Le groupe d'homologie $H_q(G, M)$ est le q-ième groupe d'homologie du complexe de chaînes $C_*(G, M)$ dont la chaîne de degré n a les générateurs de la forme :
$(g_1, g_2, \ldots, g_n, x)$ avec $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$ et $x \in M$
où l'opérateur de bord $\partial : C_n(G, M) \to C_{n-1}(G, M)$ définie par :

$$\begin{aligned}\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n, x) &= (g_2, \ldots, g_n, g_1^{-1}x) + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i(g_1, \ldots, g_ig_{i+1}, \ldots, g_n, x) \\ &\quad +(-1)^n(g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}, x).\end{aligned}$$

On peut montrer par un calcul simple que $\partial_n \circ \partial_{n-1} = 0$.
Pour convention, on pose $C_{-1}(G, M) = 0$ et $\partial_0 = 0$.

On donne sans preuve l'énoncé du résultat de Dupont [2] :

Théorème 5.3. *Il y a une suite exacte des groupe abéliens :*

$$0 \longrightarrow H_2(SO(3), \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{P}_3/\mathcal{Z}_3 \xrightarrow{\bar{D}} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_\pi \longrightarrow H_1(SO(3), \mathbb{R}^3) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{F}_3$ est défini comme dans la section et $\bar{D}$ est l'invariant de Dehn.

Ce théorème est indépendant du théorème de Sydler. Rappelons que l'on a une suite exacte courte : $0 \longrightarrow \mathcal{P}_3/\mathcal{Z}_3 \xrightarrow{\bar{D}} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_\pi \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} \longrightarrow 0$.

Donc on a :

$$\begin{aligned}H_2(SO(3), \mathbb{R}^3) &= \ker(\bar{D} : \mathcal{P}_3/\mathcal{Z}_3 \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_\pi) = 0 \\ H_1(SO(3), \mathbb{R}^3) &= \frac{\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_\pi}{Im(\bar{D} : \mathcal{P}_3/\mathcal{Z}_3 \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_\pi)} = \Omega^1_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}.\end{aligned}$$

6 L'invariant de Hadwiger

On note V un espace vectoriel réel de dimension k et $\mathcal{P}(V)$ le groupe abélien libre engendré par tous les polyèdres dans V. On définit $\mathcal{Z}(V)$ le sous groupe engendré par tous les éléments de la forme $[P \cup P'] - [P] - [P']$ où $P \cap P]$ est dégénéré ou de la forme $[P] - [u(P)]$ où u est une translation. On note $\Pi(V) = \mathcal{P}(V)/\mathcal{Z}(V)$.

Soient V^{k-1} un sous-espace vectoriel de dimension $k-1$ et e^{k-1} un vecteur qui n'est pas dans V^{k-1}. On considère un homomorphisme des groupes :

$$h(V^{k-1}, e^{k-1}) : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V^{k-1})$$

dont la valeur d'un polytope P est défini de la façon suivante : considérons les faces F de P parallèles de V^{k-1}. On note F' la projection d'une telle face sur V^{k-1} dans la direction de e^{k-1}. Alors la valeur $h(V^{k-1}, e^{k-1})(P)$ est la somme $\sum \varepsilon F$ s'étend sur toutes ces faces où pour chaque F le facteur ε est $+1$ si e^{k-1} est de direction à l'intérieur du polyèdre P à partir de la face F et -1 sinon. Par cette définition ,$h(V^{k-1}, e^{k-1})(\mathcal{Z}(V)) \subseteq \mathcal{Z}(V^{k-1})$, donc il induit un homomorphisme de $\Pi(V)$ à $\Pi(V^{k-1})$.

Il y a un premier théorème d'équivalence :

Théorème 6.1. *Deux polyèdres P,Q dans V ont la même classe dans $\Pi(V)$ (i.e. ils sont équivalents par décomposition et translation) si et seulement si ils ont le même volume et, pour tout V^{k-1} et tout $e^{k-1} \notin V^{k-1}$,*
$h(V^{k-1}, e^{k-1})(P)$ et $h(V^{k-1}, e^{k-1})(Q)$ ont la même classe dans $\Pi(V^{k-1})$.

La nécessité est évident. La suffisance pour arbitraire dimension est prouvée par Jessen et Thorup [3]. On ne le prouve dans ce article.

Dans la suite , on note Vol_i le volume dans un sous-espace vectoriel de dimension i (on néglige l'orientation) .

Considérons une suite décroissante $V = V^k \supseteq V^{k-1} \supseteq V^{k-2} \supseteq \cdots \supseteq V^i$, où V^j est un sous-espace vectoriel de dimention j. On choisit e^j pour $j = i, i+1, \cdots, k-1$ un vecteur tel que $e^j \in V^{j+1}$ mais $e^j \notin V^j$. On note $\bar{V}^j$ l'un des deux demi-espaces ouverts de V^{j+1} divisés par V^j qui contient e^j.

La suite $\Phi = (V, \bar{V}^{k-1}, \bar{V}^{k-2}, \cdots, \bar{V}^i)$ s'appelle un i-drapeau. On associe à chaque drapeau Φ une fonction de Hadwiger : $H_\Phi : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{R}$ comme la suite :

Il n'y a que un k-drapeau $\Phi = (V)$, et pour lui on définit $H_\Phi = Vol_k$. Pour un i-drapeau Φ avec $i < k$, on définit la fonction de Hadwiger par :

$$H_\Phi(X) = Vol_i h(V^i, e^i) h(V^{i+1}, e^{i+1}) \cdots h(V^{k-1}, e^{k-1}) X.$$

On obtiendra un autre théorème d'équivalence à partir du théorème 6.1 :

Théorème 6.2. *Deux polyèdres P,Q dans V ont la même classe dans $\Pi(V)$ (i.e. ils sont équivalents par décomposition et translation) si et seulement si ils ont les mêmes invariants de Hadwiger. Plus précisément, pour tout drapeau Φ, on a $H_\Phi(P) = H_\Phi(Q)$.*

Démonstration. la part de la nécessité est évident. Pour la suffisance, on prouve par récurrence sur la dimension.

Si $k = 1$, il est évident. Supposons que le théorème est vrai pour dimension $k-1$. Soient V un espace vectoriel réel de dimension k et P,Q deux polyèdres dans V qui ont les mêmes invariants de Hadwiger.
$\forall V^{k-1}$ et $\forall e^{k-1} \notin V^{k-1}$ fixés , pour tout drapeau $\Phi^{k-1} = (V^{k-1}, \bar{V}^{k-2}, \cdots, \bar{V}^i)$ de V^{k-1}, on a

$$H_{\Phi^{k-1}}(h(V^{k-1}, e^{k-1})P) = H_\Phi(P) = H_\Phi(Q) = H_{\Phi^{k-1}}(h(V^{k-1}, e^{k-1})Q),$$

où $\Phi = (V, \bar{V}^{k-1}, \bar{V}^{k-2}, \cdots, \bar{V}^i)$ est un drapeau de V.

Donc par l'hypothèse de récurrence, on sait que $h(V^{k-1}, e^{k-1})(P)$ et $h(V^{k-1}, e^{k-1})(Q)$ ont la même classe dans $\Pi(V^{k-1})$, pour tout V^{k-1} et tout $e^{k-1} \notin V^{k-1}$. Donc d'après le théorème 6.1, on déduit que P et Q sont équivalents par décomposition et translation . $\square$

7 Structure linéaire de $\Pi(V)$

Soit V un espace vectoriel réel de dimension k.Dans cette section, on note pratiquement $\mathcal{P}$(Π,$\mathcal{Z}$ resp.) à la place de $\mathcal{P}(V)$($\Pi(V)$,$\mathcal{Z}(V)$ resp.).

Étant donné $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_i$ une décomposition en somme directe des sous-espaces vectoriels, on a les projections $p_1, p_2, \ldots, p_i$ correspondante à cette décomposition. On définit le produit

$$P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_i = \bigcap_{j=1}^{i} p_j^{-1}(P_j)$$

où P_j sont des polyèdres de V_j. Il est un polyèdre de V. Un tel polyèdre s'appelle un i-cylindre.

On note par $\mathcal{D}_i$ le sous-groupe de $\mathcal{P}$ engendré par les i-cylindres et $\mathcal{Z}$, et on pose $\mathcal{C}_i = \mathcal{D}_i/\mathcal{Z}$. On obtient les filtrations ci-dessous :

$$\mathcal{P} = \mathcal{D}_1 \supseteq \mathcal{D}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{D}_k \supseteq \mathcal{Z},$$
$$\Pi = \mathcal{C}_1 \supseteq \mathcal{C}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}_k \supseteq \{0\} = \mathcal{C}_{k+1}.$$

On note $H_t : \Pi \to \Pi$ le homothétie par rapport t pour $t > 0$ et

$$H_t\,[P] = \begin{cases} [H_t\,(P)] & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ (-1)^k\,[H_{-t}\,(P)] & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

Soit $a_1, \ldots, a_k$ des vecteurs linéairement indépendants. On note par $[a_1, \ldots, a_k]$ la classe d'équivalence dans Π du simplexe déterminé par les $k+1$ points $0, a_1, \ldots, a_k$. On ne considère pas l'orientation.

Lemme 7.1. *Pour $a_1, \ldots, a_k$ des vecteurs linéairement indépendants quelconques, et pour tous réels s, t, on a*

$$H_{s+t}\,[a_1, \ldots, a_k] = \sum_{j=0}^{k} H_s\,[a_1, \ldots, a_j] \times H_t\,[a_{j+1}, \ldots, a_k] \tag{50}$$

Les termes avec $j = 0$ et $j = k$ sont $H_t\,[a_1, \ldots, a_k]$ et $H_s\,[a_1, \ldots, a_k]$ respectivement.

Démonstration. Si $s = 0$ ou $t = 0$, le résultat est évident, donc il suffit de considérer le cas où $s \neq 0$ et $t \neq 0$. Si on a la validité de cette formule sur le cas où $s + t > 0$, on peut en déduire que elle est aussi valide dans le cas où $s + t < 0$ par remplacer s, t par $-s, -t$. De plus, on peut obtenir la formule dans le cas où $s < 0, t > 0$ à partir du cas où $t < 0, s > 0$ par remplacer $[a_1, \ldots, a_k]$ par $[-a_k, \ldots, -a_1]$. Donc il suffit de considérer les trois cas suivants :

(i) $s > 0, t > 0$. Dans le système de coordonnées avec les bases $a_1, \ldots, a_{k-1}, -a_k$, $H_{s+t}\,[a_1, \ldots, a_k]$ est représenté par le simplexe :
$$S = \{(x_1, \ldots, x_k) | 0 \leq x_k \leq \cdots \leq x_1 \leq s + t\},$$
et le j-ième terme de la somme est représenté par le polyèdre :
$$P_j = \{(x_1, \ldots, x_k) | 0 \leq x_k \leq \cdots \leq x_{j+1} \leq t \leq x_j \leq \cdots \leq x_1 \leq s + t\}.$$
Puisque S est composé de $P_0, \ldots, P_k$, on en déduit la formule.

(ii) $t < 0, s{+}t > 0$. Dans le système de coordonnées avec les bases $a_1, \ldots, a_k$, $H_{s+t}\,[a_1, \ldots, a_k]$ est représenté par le simplexe :
$$S = \{(x_1, \ldots, x_k) | 0 \leq x_k \leq \cdots \leq x_1 \leq s + t\},$$
et le j-ième terme de la somme est $(-1)^{k-j}\,[P_j]$ où P_j est le polyèdre :

$$\begin{aligned} P_j &= \{(x_1, \ldots, x_k) | t \leq x_j \leq \cdots \leq x_1 \leq s + t, \\ &\qquad t \leq x_{j+1} \leq \cdots \leq x_k \leq 0\}. \end{aligned}$$

Pour $0 < j < k$, considérons le polyèdre :

$$\begin{aligned} Q_j &= \{(x_1, \ldots, x_k) | t \leq x_{j+1} \leq x_j \leq \cdots \leq x_1 \leq s + t, \\ &\qquad t \leq x_{j+1} \leq \cdots \leq x_k \leq 0\}, \end{aligned}$$

et posons $Q_0 = P_0, \quad Q_k = S$. Comme pour $0 < j \leq k$ P_j est composé de Q_j et Q_{j-1}, on a :
$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-j}\,[P_j] = (-1)^k\,[Q_0] + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-j} ([Q_j] + [Q_{j-1}]) = [Q_k]\,.$$

(iii) $t < 0, s + t = 0$. La preuve est comme dans le cas précédent, avec 0 à la place du S.

$\square$

D'après le lemme, on a la formule : pour tout $\xi \in \mathcal{C}_1$,

$$H_{t+t'}[\xi] \equiv H_t[\xi] + H_{t'}[\xi] \qquad mod.\mathcal{C}_2.$$

On en déduit la congruence : pour tout $\xi \in \mathcal{C}_1$ et tout entier t ,

$$H_t[\xi] \equiv t[\xi] \qquad mod.\mathcal{C}_2. \tag{51}$$

Si $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_i \in \mathcal{D}_i$, par appliquer le lemme sur les sous-espaces V_j, on déduit que

$$\begin{aligned} H_t[P] &= [H_t P_1 \times \cdots \times H_t P_i] \\ &\equiv t^i [P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_i] \qquad mod.\mathcal{C}_{i+1}. \end{aligned}$$

Donc on a la congruence : pour tout $\xi \in \mathcal{C}_i$ et tout entier t ,

$$H_t[\xi] \equiv t^i[\xi] \qquad mod.\mathcal{C}_{i+1}. \tag{52}$$

Pour tout entier $t \neq 0$ et tout i, $H_t(\mathcal{C}_i) = \mathcal{C}_i$. Donc H_t induit un automorphisme de $\mathcal{C}_i/\mathcal{C}_{i+1}$.D'après la formule(52),$\mathcal{C}_i/\mathcal{C}_{i+1}$ est uniquement divisible pour tout i,donc Π est uniquement divisible. Donc Π a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

Pour $1 \leq j \leq k$ et $\xi = [a_1, \ldots, a_k] \in \Pi$,où $a_1, \ldots, a_k$ sont des vecteurs linéairement indépendants, on définit

$$\begin{aligned} \psi_j(\xi) &= \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_j = k} \{(x_1, \ldots, x_k) | 0 \leq x_k \leq \cdots \leq x_{n_{j-1}} \leq 1, \\ & \quad 0 \leq x_{n_{j-1}-1} \leq \cdots \leq x_{n_{j-2}} \leq 1, \ldots, 0 \leq x_{n_1} \leq \cdots \leq x_1 \leq 1\} \end{aligned}$$

où la somme s'étend sur toutes les suites $(n_1, n_2, \ldots, n_j)$ vérifiant $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_j = k$ et les coordonnées sont correspondants aux bases $a_1, \ldots, a_{k-1}, -a_k$.

ψ_j induit une application linéaire $\bar{\psi}_j : \Pi \to \mathcal{C}_j$, telle que on a

$$H_t[\xi] = \sum_{j=1}^{k} \binom{n}{k} \bar{\psi}_j([\xi]) = \sum_{j=1}^{k} \binom{n}{k} [\psi_j(\xi)]. \tag{53}$$

pour tout entier t, car

$$\begin{aligned} & \{(x_1, \ldots, x_k) | 0 \leq x_k \leq \cdots \leq x_1 \leq t\} \\ = & \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_j = k} \bigcup_{0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_j \leq t-1} \{(x_1, \ldots, x_k) | t_1 \leq x_k \leq \cdots \leq x_{n_{j-1}} \leq t_1 + 1, \\ & t_2 \leq x_{n_{j-1}-1} \leq \cdots \leq x_{n_{j-2}} \leq t_2 + 1, \ldots, t_j \leq x_{n_1} \leq \cdots \leq x_1 \leq t_j + 1\} \\ = & \sum_{j=1}^{k} \binom{n}{k} \sum_{1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_j = k} \{(x_1, \ldots, x_k) | 0 \leq x_k \leq \cdots \leq x_{n_{j-1}} \leq 1, \\ & 0 \leq x_{n_{j-1}-1} \leq \cdots \leq x_{n_{j-2}} \leq 1, \ldots, 0 \leq x_{n_1} \leq \cdots \leq x_1 \leq 1\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \binom{n}{k} \psi_j(\xi),$$

où les "=" veulent dire "ont la même classe d'équivalence dans Π.

Donc il y a des opérateurs $\mathbb{Q}$-linéaires $e_1, \ldots, e_k$ dans Π telles que

$$H_t [\xi] = \sum_{j=1}^{k} t^j e_j([\xi]). \tag{54}$$

En utilisant la relation $H_{tt'} = H_t H_{t'}$, on déduit que $e_j^2 = e_j, e_i e_j = o$ si $i \neq j$. Donc ce sont des projecteurs d'une décomposition $\Pi = \Pi^1 \oplus \cdots \oplus \Pi^k$,où $\Pi^j = Im(e_j)$. On a $H_t [\xi] = t^j [\xi]$ pour $[\xi] \in \Pi^j$ et $\mathcal{C}_j = \sum_{i \geq j} \Pi^i$.

Références

[1] Pierre Cartier. Decomposition des polyedres : le point sur le troisieme probleme de hilbert. *Seminaire Bourbaki*, 27 :261–288, 1986.

[2] Johan L Dupont. *Scissors congruences, group homology and characteristic classes.* Citeseer, 2001.

[3] B Jessen and A Thorup. The algebra of polytopes in affine spaces. *Math. Scand*, 43 :211–240, 1978.

[4] Borge Jessen. The algebra of polyhedra and the dehn-sydler theorem. *Mathematica Scandinavica*, 22 :241–256, 1968.

[5] Børge Jessen, Jørgen Karpf, and Anders Thorup. Some functional equations in groups and rings. *Mathematica Scandinavica*, 22 :257–265, 1968.

[6] Rich Schwartz. The dehn-sydler theorem explained. *Internet Resource*, 2010.

[7] J P Sydler. Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 40(1) :43–80, 1965.