

# **Un modèle mathématique pour la supraconductivité**

Cécile Huneau

Etienne Le Masson

Sous la direction de Laure Saint-Raymond

27 juin 2008

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>La théorie de Ginzburg-Landau</b>	<b>4</b>
2.1	La théorie de Landau des transitions de phase du second ordre . . . . .	4
2.2	Équations pour la supraconductivité . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Quantification de la circulation</b>	<b>6</b>
3.1	Dans les superfluides . . . . .	6
3.2	Dans les supraconducteurs . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Résultats mathématiques</b>	<b>8</b>
4.1	Modèle considéré . . . . .	8
4.2	Principaux résultats . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Estimations de l'énergie pour des fonctions à valeurs dans <math>S^1</math></b>	<b>10</b>
5.1	Existence d'un minimum de l'énergie sur un domaine à trous . . . . .	11
5.2	Comportement du minimiseur $u$ et de l'énergie associée quand le diamètre des trous diminue . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Comportement asymptotique de <math>u_\varepsilon</math></b>	<b>15</b>
6.1	Position du problème . . . . .	15
6.2	Une majoration de l'énergie d'interaction et de confinement . . . . .	16
6.3	Les bons et mauvais disques . . . . .	18
6.4	Convergence . . . . .	19
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>A</b>	<b>Propriétés des espaces de Sobolev</b>	<b>22</b>
A.1	Théorie des traces . . . . .	22
A.2	Injections de Sobolev . . . . .	23
A.3	Régularité elliptique . . . . .	23
A.4	Majoration du gradient . . . . .	23
<b>B</b>	<b>Appendice : Un peu de théorie du degré</b>	<b>24</b>

# 1 Introduction

## Qu'est-ce qu'un supraconducteur ?

Certains matériaux dits *supraconducteurs*<sup>1</sup> acquièrent des propriétés remarquables lorsqu'on les refroidit. En dessous d'une certaine température qu'on appelle *température critique*, ils perdent toute résistance électrique et ne se laissent plus traverser par un champ magnétique. Ce dernier effet rend notamment possible l'expérience spectaculaire de lévitation d'un aimant au dessus d'un de ces matériaux.

On classe les supraconducteurs dans deux catégories suivant leur comportement lorsqu'on les soumet à un champ magnétique croissant :

- Les *supraconducteurs de type I* expulsent le champ magnétique jusqu'à une certaine valeur de ce dernier, au-delà de laquelle ils perdent leurs propriétés supraconductrices et se laissent à nouveau traverser par le champ.
- Les *supraconducteurs de type II* entrent, dès que le champ appliqué est suffisamment grand, dans un *état mixte* caractérisé par l'apparition de *lignes de vortex* au voisinage desquelles le matériau n'est plus dans un état supraconducteur, alors qu'il l'est encore en dehors. À mesure que le champ magnétique croît, le nombre de vortex augmente proportionnellement et ces derniers adoptent une organisation régulière appelée *réseau d'Abrikosov*.

La température critique dépend du matériau mais est en général proche du zéro absolu (-273,15 °C). Toutefois, il a été découvert dès 1986 des supraconducteurs pour lesquels cette température est bien plus élevée (Le maximum actuel étant de 136 K). On les appelle *supraconducteurs à haute température critique* et ils ont totalement remis en question les théories décrivant les supraconducteurs dits conventionnels sur lesquels nous nous concentrerons dans ce mémoire.

Les propriétés des supraconducteurs sont à rapprocher de celles des superfluides, comme un gaz d'hélium  $^4\text{He}$  refroidi en dessous de 2,17 K, qui s'écoule alors sans aucun frottements, et dans lequel on voit apparaître des vortex, tourbillons caractéristiques. Ces propriétés communes aux supraconducteurs et aux superfluides sont plus généralement décrites dans les *condensats de Bose-Einstein*, états particuliers de la matière à très basse température.

## La condensation de Bose-Einstein

La situation que nous considérons est celle d'un gaz dans une enceinte. D'après la mécanique quantique, les états – ou niveaux d'énergie – que peuvent occuper les particules sont définis par la configuration du système. Par ailleurs, les particules sont *indiscernables* et se classent dans deux catégories : les *fermions* et les *bosons*. Deux fermions ne peuvent pas occuper le même état quantique, alors que les bosons peuvent tous être dans le même état.

Les particules du gaz adoptent une distribution statistique selon laquelle plus on abaisse la température, plus le nombre de particules occupant les niveaux d'énergie

---

<sup>1</sup>Pour une introduction simple à la superfluidité et aux supraconducteurs, on pourra consulter [6].

inférieurs augmente. Dans un gaz de bosons, à la limite de la température nulle, c'est-à-dire 0 K, les particules occuperont toutes le niveau de plus basse énergie. En fait, il n'est pas nécessaire d'atteindre le zéro absolu pour qu'une fraction macroscopique de bosons soit déjà dans cet état. C'est alors qu'on observe ce qu'on appelle un condensat de Bose-Einstein, qui possède toutes les propriétés que nous avons déjà décrites : écoulement sans frottements et apparition de vortex dans certaines situations. La difficulté dans le cas des supraconducteurs est que l'on s'intéresse à un fluide d'électrons, qui sont des fermions et auxquels on ne peut pas appliquer la théorie des condensats de Bose-Einstein. Ce problème est résolu par la théorie BCS (Bardeen, Cooper, Schrieffer)<sup>2</sup>, qui décrit les supraconducteurs à un niveau microscopique. Selon elle, les électrons d'un supraconducteur s'apparient, malgré la répulsion électrostatique, pour former des *paires de Cooper*, sorte de super-charges qui se comportent comme des bosons.

Dans la section qui suit, nous allons présenter la théorie de Ginzburg-Landau, qui est une approche phénoménologique de la supraconductivité, et qui va nous amener à l'étude d'un problème de minimisation d'énergie. Nous essayerons ensuite de comprendre l'apparition des vortex dans les superfluides et les supraconducteurs en se plaçant à un niveau microscopique (c'est là qu'interviendra l'idée qu'on a affaire à un condensat de Bose-Einstein), et nous verrons que le flux du champ magnétique traversant un supraconducteur est quantifié.

## 2 La théorie de Ginzburg-Landau

### 2.1 La théorie de Landau des transitions de phase du second ordre

On s'intéresse à la transition entre une phase ordonnée et une phase désordonnée à une température critique  $T_c$ . On décrit la transition par un paramètre d'ordre <sup>3</sup>  $\lambda$ . Plus  $\lambda$  est grand, plus le système est ordonné. Si par exemple notre système est un métal ferromagnétique, que l'on peut représenter comme un réseau de dipôles magnétiques, on sait qu'à température nulle tous les dipôles sont alignés. Quand on augmente la température, du fait de l'agitation thermique certains dipôles commencent à sortir de l'alignement. Si on appelle  $\lambda$  la différence entre le nombre de dipôles qui pointent vers le haut et le nombre de dipôles qui pointent vers le bas alors  $|\lambda|$  est un paramètre d'ordre. La température critique est celle à partir de laquelle  $|\lambda|$  est nul en moyenne.

À volume et température constants, la grandeur la plus pertinente à étudier est l'énergie libre  $F$ . Celle-ci est minimale quand le système est en équilibre stable. On se place au voisinage de la température critique  $T_c$ . Ainsi  $\lambda$  est très petit et on peut développer  $F$  en puissances de  $\lambda$  :

$$F = F_0 + a\lambda + b\lambda^2 + c\lambda^3 + d\lambda^4$$

---

<sup>2</sup>Voir par exemple [6] pour une approche assez simple

<sup>3</sup>Voir [9]

## 2.2 Équations pour la supraconductivité

Le principe de la théorie de Ginzburg Landau de la supraconductivité est de traiter la fonction d'onde  $\phi$  du supraconducteur comme un paramètre d'ordre. Au dessus d'une température  $T_c$  le fluide (ou gaz d'électron) est dit normal et au fur et à mesure que l'on baisse la température une partie de plus en plus grande du fluide se met dans l'état supraconducteur (c'est un modèle à deux fluides). Ainsi si  $|\phi|^2$  est la densité de fluide dans le « super état », alors  $|\phi|^2$  est nul à  $T_c$  et croît ensuite quand on abaisse la température.

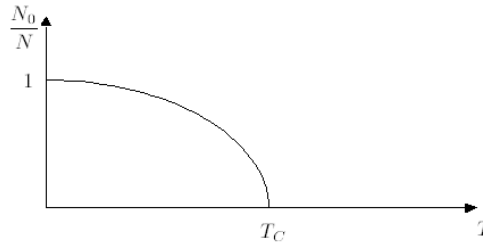


FIG. 1: Proportion  $\frac{N_0}{N}$  de particules dans l'état supraconducteur en fonction de la température

Il y a cependant quelques modifications à apporter du fait de la particularité du paramètre d'ordre choisi :

- $\phi$  est complexe : on ne va en fait garder que les termes en  $|\phi|^2$  qui sont les seuls à avoir un sens macroscopique.
- $\phi$  dépend de la position : il faut prendre en compte dans le développement limiter un terme d'énergie cinétique en  $|\nabla\phi|^2$  et s'intéresser en fait à la densité d'énergie libre  $f(r)$ .

On a donc l'expression suivante pour la densité d'énergie libre :

$$f(r) = f_0 + b|\phi|^2 + d|\phi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\phi|^2$$

où la constante  $\frac{\hbar^2}{2m}$  ne fait en fait que fixer la normalisation de  $\phi$ .

**Que peut-on dire sur  $b$  et  $d$  ?** On s'intéresse pour simplifier à l'expression  $F = F_0 + b\lambda^2 + d\lambda^4$  où  $\lambda$  est un paramètre d'ordre. Les états stables sont ceux pour lesquels  $F$  est minimale, c'est-à-dire tels que  $2b\lambda + 4d\lambda^3 = 0$ . Or par définition d'une transition de phase, quand la température est en dessous de la température critique il doit exister des états stables tels que  $\lambda^2 \neq 0$ . Par conséquent  $\frac{b}{d}$  doit être négatif. Par ailleurs  $d$  doit être positif sinon l'état favorisé à toute température serait celui pour lequel  $\lambda$  est le plus grand possible, ce qui n'est pas réaliste. Ainsi  $d$  est positif et  $b$  est négatif.

**Retour aux supraconducteurs** Ici ce qu'il faut minimiser pour trouver les états stables est  $\int_{\text{domaine}} f(r)dr$ . Cela revient, en posant  $\phi = \sqrt{\frac{|b|}{2d}}u$  à minimiser

$$\int \frac{\hbar^2 |b|}{4md} |\nabla u|^2 + \frac{|b|}{4d} (|u|^2 - 1)^2$$

et donc à minimiser

$$\frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\xi^2} \int (|u|^2 - 1)^2,$$

où l'on a posé  $\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m|b|}}$  ( $\xi$  est appelé longueur de cohérence).

**Interprétation microscopique** Ginzburg et Landau ont formulé leur théorie en 1950, bien avant les théories microscopiques de la superfluidité et de la supraconductivité, cependant leur équation peut se retrouver en partant du microscopique (on arrive alors aux équations de Gross-Pitaevskii <sup>4</sup>)

- La transition de phase peut s'expliquer comme une condensation de Bose-Einstein. <sup>5</sup>
- Le terme en  $b|\phi|^2$  est en fait dû à la présence d'un potentiel extérieur. Il en faut par exemple un pour confiner les particules dans espace fini.
- Le terme en  $d|\phi|^4$  est dû aux interactions entre les particules.
- La longueur de cohérence  $\xi$  correspond à la distance moyenne entre les électrons d'une paire de Cooper et donc à la longueur caractéristique de variation de  $\phi$ . Les vortex auront donc aussi  $\xi$  pour largeur.

**Remarque** Pour  $T$  pas trop proche de  $T_c$ ,  $\xi$  prend des valeurs très petites (de l'ordre de 100 Å dans les supraconducteurs et de 1 Å dans les superfluides).

## 3 Quantification de la circulation

### 3.1 Dans les superfluides

Considérons ici un gaz de bosons bidimensionnel à basse température (par exemple des atomes de  $^4\text{He}$ ). Ces bosons étant tous dans le même état on peut décrire le gaz par une unique fonction d'onde  $\phi$ . De plus sur toute composante simplement connexe du domaine sur laquelle  $\phi$  ne s'annule pas on peut écrire le relèvement :

$$\phi = |\phi| \exp(i\theta)$$

où, si on suppose  $\phi$  holomorphe,  $\theta$  l'est aussi.  $\rho = |\phi|^2$  correspond alors à la densité de superfluide, à laquelle on peut associer un courant  $j_s$  par

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j_s = 0$$

---

<sup>4</sup>voir [9]

<sup>5</sup>Voir l'introduction à ce propos.

et une vitesse  $v_s$  par

$$j_s = \rho v_s$$

On décrit le système par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left( \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \phi$$

où le premier terme correspond à l'énergie cinétique et  $V$  représente un potentiel extérieur, par exemple un potentiel de confinement. Alors, après quelques calculs (on calcule  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  grâce à l'équation de Schrödinger et on l'exprime sous forme d'un gradient) on obtient que partout où  $\rho$  ne s'annule pas

$$v_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta$$

En particulier partout où  $\rho$  ne s'annule pas on a  $\nabla \wedge v_s = 0$  donc le fluide ne peut pas tourner! Pour qu'une rotation soit possible  $\rho$  doit donc s'annuler à certains endroits, d'où l'existence de vortex, à cause desquels le domaine où  $\phi$  ne s'annule pas n'est plus simplement connexe. La circulation de la vitesse n'est plus alors forcément nulle car le relèvement de  $\phi$  n'est plus valable sur le domaine entier. Elle est par contre quantifiée car les discontinuités du relèvement  $\theta$  sont des multiples de  $2\pi$  :

$$\oint_{\Gamma} v_s \cdot dl = \frac{\hbar}{m} 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

où  $\Gamma$  est un contour entourant un vortex. La circulation de  $v_s$  sera par la suite à rapprocher du degré<sup>6</sup> de  $\phi$ .

### 3.2 Dans les supraconducteurs

L'étude précédente peut être reprise dans le cas des supraconducteurs car ceux-ci sont en fait des superfluides de paires d'électrons. Quand on place le supraconducteur dans un champ magnétique le hamiltonien du système est modifié, et donc par conséquent l'équation de Schrödinger aussi. Cela se traduit dans le calcul de  $j_s$  par :

$$j_s = q\rho v_s = \rho \frac{q\hbar}{m} \nabla \theta - \rho \frac{q^2}{m} A$$

où  $q$  est la charge des porteurs (c'est à dire  $2e$  dans la théorie BCS) et  $A$  est le potentiel vecteur associé au champ magnétique par  $\nabla \wedge A = B$ . Ainsi :

$$\nabla \wedge j_s + \rho \frac{q^2}{m} B = 0$$

Or d'après les équations de Maxwell on a :

$$\nabla \wedge B = \mu_0 j_s \quad \nabla \cdot B = 0$$

---

<sup>6</sup>Voir l'appendice B sur la théorie du degré.

On obtient ainsi l'équation

$$-\Delta B + \frac{1}{\lambda^2} B = 0$$

Donc  $B$  décroît exponentiellement à l'entrée du supraconducteur avec une longueur caractéristique  $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\rho\mu_0}}$  appelée profondeur de pénétration. Au-delà de cette longueur il n'y a quasiment plus ni courant ni champ magnétique (c'est l'effet Meissner). Si on se place à l'intérieur du supraconducteur (c'est à dire à une distance supérieure à  $\lambda$  du bord) on obtient donc comme dans le cas du superfluide, partout où  $\rho$  ne s'annule pas :

$$\hbar\nabla\theta = qA$$

Cette fois-ci  $\oint_{\Gamma} A$  n'est rien d'autre que le flux  $\Phi_{\Gamma}$  de  $B$  à travers  $\Gamma$ . Pour les raisons expliquées dans le paragraphe précédent, on a la quantification suivante :

$$\Phi_{\Gamma} = \frac{\hbar}{q} \oint \nabla\theta = \frac{\hbar}{q} 2\pi n$$

Ainsi on a deux alternatives : soit le flux de  $B$  à travers le supraconducteur est nul, soit le relèvement de  $\phi$  n'est pas continu et donc il y a des vortex comme annoncé dans l'introduction.

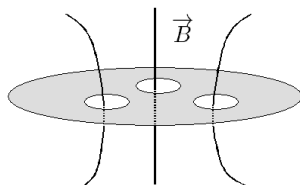


FIG. 2: Flux de  $B$  à travers les vortex

L'étude qui va suivre a en quelque sorte pour but de connaître exactement le nombre de vortex en fonction du flux du champ  $B$  imposé, ainsi que leur positions.

## 4 Résultats mathématiques

### 4.1 Modèle considéré

Soit  $G$  un domaine lisse, borné et simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ . On reprend la fonctionnelle de Ginzburg-Landau introduite dans la section 2 :

$$E_{\varepsilon}(u) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_G (|u|^2 - 1)^2.$$

$E_{\varepsilon}$  est définie pour des applications  $u \in H^1(G; \mathbb{C})$  qu'on identifie à  $H^1(G; \mathbb{R}^2)$ . Ici  $\varepsilon$  est la longueur de cohérence précédemment appelée  $\xi$ . On fixe une condition aux limites en considérant

$$H_g^1 = \{u \in H^1(G; \mathbb{C}) ; u = g \text{ sur } \partial G\},$$



où

$$g : \partial G \rightarrow S^1.$$

Une condition de Dirichlet telle que celle que nous avons définie n'est pas réaliste physiquement. Il n'y a aucune raison pour que la valeur de  $u$  soit fixée ainsi au bord. Ce qui va nous intéresser néanmoins est le degré topologique<sup>7</sup> de  $g$ ,  $d = \deg(g, \partial G)$  qui correspond à la circulation de la vitesse dans le cas d'un superfluide en rotation, ou au flux du champ dans le cas d'un supraconducteur soumis à un champ magnétique. On a vu en effet dans la section précédente que ces quantités sont quantifiées.

On a donc le problème de minimisation

$$\min_{u \in H_g^1} E_\varepsilon(u) \tag{1}$$

pour lequel nous admettrons l'existence d'une solution  $u_\varepsilon$  qui est de classe  $C^\infty$ . Ce qui va nous intéresser est le comportement asymptotique de ce minimiseur quand  $\varepsilon$  tend vers 0. En effet, même si le cas limite  $\varepsilon = 0$  n'a pas de sens physique, nous avons vu que pour des températures proches de la température critique dans les supraconducteurs ou les superfluides, la longueur de cohérence  $\xi = \varepsilon$  est extrêmement petite.

## 4.2 Principaux résultats

Les résultats que nous allons présenter, obtenus par F. Bethuel, H. Brezis et F. Hélein dans [3] concernent le nombre de vortex, correspondant aux zéros de  $u_\varepsilon$ , et leur répartition dans le domaine  $G$ . On s'intéresse au cas où  $d > 0$ . Voici un premier théorème sur la limite des  $u_\varepsilon$  :

**Théorème 4.1.** *Supposons que  $G$  soit étoilé. Alors il existe une sous-suite  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  et exactement  $d$  points  $a_1, \dots, a_d$  dans  $G$  où  $d = \deg(g, \partial G)$ , ainsi qu'une fonction  $C^\infty$  harmonique  $u_* : G \setminus \{a_1, \dots, a_d\} \rightarrow S^1$  avec  $u_* = g$  sur  $\partial G$  tels que*

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_* \quad \text{dans } C_{loc}^k(G \setminus \cup_i \{a_i\}) \quad \forall k.$$

*De plus, toutes les singularités  $a_i$  sont de degré +1.*

Les singularités correspondent aux vortex, ainsi on connaît leur nombre qui est exactement le degré de  $g$ . Il est intéressant de voir que sans aller jusqu'à la limite, pour  $\varepsilon$  assez petit, on a déjà ce résultat sur le nombre de zéros de  $u_\varepsilon$ .

**Théorème 4.2.** *Soit  $G$  un domaine étoilé, et  $d = \deg(g, \partial G)$ . Alors, il existe  $\varepsilon_0$  ne dépendant que de  $g$  et de  $G$ , tel que pour  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $u_\varepsilon$  a exactement  $d$  zéros de degré +1.*

Il reste à connaître la répartition des singularités  $a_i$ . Pour cela on introduit, pour  $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)$  des points distincts de  $G$ , la fonction

$$W = -\pi \sum_{i \neq j} \log |b_i - b_j| + \frac{1}{2} \int_{\partial G} \phi \left( g \wedge \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) - \pi \sum_{i=1}^n R(b_i)$$

<sup>7</sup>Pour des précisions sur la notion de degré d'une application, voir l'appendice B.

où  $\phi$  est la solution du problème de Neumann linéaire :

$$\begin{cases} \Delta\phi = \sum_{i=1}^n 2\pi d_i \delta_{b_i} & \text{sur } G, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = g \wedge \frac{\partial g}{\partial\tau} & \text{sur } \partial G, \end{cases}$$

$\nu$  est la normale unitaire extérieure de  $\partial G$ ,  $\tau$  est le vecteur unitaire tangent à  $\partial G$  tel que  $(\nu, \tau)$  soit direct, et

$$R(x) = \phi(x) - \sum_{j=1}^n d_j \log|x - b_j|$$

est une fonction continue sur  $\bar{G}$ .

Nous verrons dans la section 5.2 que  $W$  est une fonction obtenue à partir de l'énergie une fois retirée une quantité qui diverge. On l'appelle *énergie renormalisée* et elle possède les propriétés suivantes :

- $W \rightarrow +\infty$  dès que deux des  $b_i$  fusionnent
- $W \rightarrow +\infty$  dès qu'un des  $b_i$  se rapproche du bord  $\partial G$  (Cela provient du fait que  $R(b_i) \rightarrow -\infty$  quand  $b_i \rightarrow \partial G$ )

Autrement dit les singularités  $b_i$  se repoussent, tandis que la condition aux limites sur  $\partial G$  produit un effet de confinement.

On peut alors énoncer le théorème suivant qui nous renseigne sur l'emplacement des singularités.

**Théorème 4.3.** *Les singularités  $(a_i)$  minimisent l'énergie renormalisée  $W$  sur  $G^d$ .*

Nous ne détaillerons dans la suite que certains points de l'étude qui permet d'établir ces théorèmes. Le problème est abordé suivant deux approches qui se complètent. La première consiste assez naturellement à considérer la minimisation de l'énergie pour des fonctions à valeur dans  $S^1$ , pour lesquelles le deuxième terme de l'énergie s'annule. La difficulté dans ce cas est que si  $\deg(g, \partial G) \neq 0$ , alors  $H_g^1(G; S^1)$  est vide.<sup>8</sup> On est alors amené à percer des trous dans le domaine  $G$  (qui peuvent se réduire à un point) pour que le problème ait un sens. Cette approche est abordée dans la section 5, et fait apparaître l'énergie renormalisée. La deuxième approche consiste à étudier directement la convergence de  $u_\varepsilon$  pour des fonctions de  $H_g^1(G; \mathbb{C})$ . Les trous laissent place aux zéros de  $u_\varepsilon$  et aux singularités de la limite, qui n'est plus définie sur tout  $G$  et qui s'avère être de norme 1. Des éléments de cette étude sont présentés dans la section 6.

## 5 Estimations de l'énergie pour des fonctions à valeurs dans $S^1$

Dans cette section, on s'intéresse à la minimisation de l'énergie pour des fonctions à valeurs dans le cercle unité

$$\min_{u \in H_g^1(G; S^1)} \int_G |\nabla u|^2.$$

---

<sup>8</sup>Voir l'appendice B.

Ce problème n'a pas de sens si  $\deg(g, \partial G) \neq 0$  et  $G$  est simplement connexe, car alors  $H_g^1(G; S^1)$  est vide.<sup>9</sup> En « perçant des trous » dans le domaine, on peut contourner cette difficulté.

### 5.1 Existence d'un minimum de l'énergie sur un domaine à trous

Soit donc  $G$  un ouvert de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$ , borné et simplement connexe, et soient  $\omega_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$  des parties ouvertes de classe  $C^\infty$  simplement connexes de  $G$ , deux à deux disjointes. Soit enfin  $\Omega = G \setminus \bigcup_{i=1}^n \bar{\omega}_i$ .

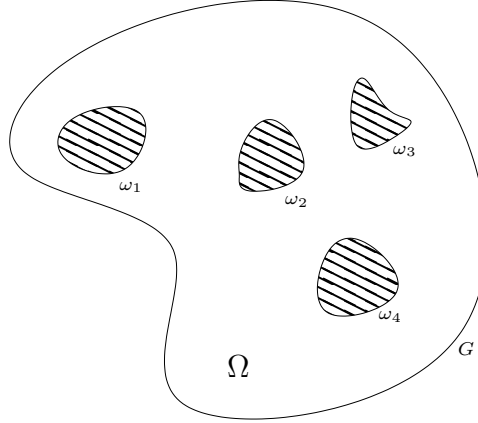


FIG. 3: Domaine  $\Omega$

On considère la famille de fonctions

$$\mathcal{E} = \{v \in H^1(\Omega; S^1) \mid \deg(v, \partial G) = d \text{ et } \deg(v, \partial \omega_i) = d_i \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n\}$$

où les  $d_i \in \mathbb{Z}$  sont donnés et  $d = \sum d_i$ .

On étudie le problème de minimisation

$$E = \inf_{v \in \mathcal{E}} \int_{\Omega} |\nabla v|^2. \quad (2)$$

La valeur de  $E$  est reliée à la solution  $\phi$  du problème linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \phi = C_i & \text{sur } \partial \omega_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial G, \\ \int_{\partial \omega_i} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 2\pi d_i & i = 1, 2, \dots, n, \end{array} \right. \quad (3)$$

où  $\nu$  est la normale unitaire extérieure des  $\omega_i$  ainsi que de  $G$ , et les  $C_i$  sont des constantes fixées.

<sup>9</sup>Voir l'appendice sur la théorie du degré pour comprendre pourquoi.

En effet, le résultat suivant, que nous admettrons, établit l'existence d'un minimum de l'énergie (une solution du problème (2)), en le reliant au problème linéaire.

**Théorème 5.1.** *L'infimum  $E$  du problème de minimisation (2) est atteint pour une fonction  $u \in \mathcal{E}$ , unique à un facteur de phase près. De plus,*

$$E = \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2,$$

où  $\phi$  est la solution du problème linéaire précédent.

Le problème (3) admet une solution unique. Nous allons détailler sa résolution par une méthode variationnelle.

**Formulation variationnelle** Pour obtenir une formulation variationnelle du problème (3), supposons que  $\phi$  soit solution suffisamment régulière. On multiplie l'équation  $\Delta \phi = 0$  par  $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , constante sur les  $\partial\omega_i$  et nulle sur  $\partial G$ , et on intègre le résultat sur  $\Omega$ . On obtient après application de la formule de Green (intégration par parties) et décomposition de l'intégrale sur  $\partial\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\omega_i} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \int_{\partial G} \psi \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0.$$

Enfin, les conditions aux limites donnent :

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \nabla \psi - 2\pi \sum_{i=1}^n d_i \psi|_{\partial\omega_i} = 0. \quad (4)$$

Par continuité, cette égalité est valable pour tout  $\psi$  dans le sous-espace vectoriel suivant :

$$V = \{\psi \in H^1(\Omega; \mathbb{R}); \psi = 0 \text{ sur } \partial G, \psi = \text{Const.} = \psi|_{\partial\omega_i} \text{ sur chaque } \partial\omega_i\}.$$

En effet,  $V$  est fermé dans  $H^1(\Omega)$  et  $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap V$  est dense dans  $V$ .<sup>10</sup>

On est donc ramené à résoudre

$$(F'(\phi), \psi) = 0 \quad \forall \psi \in V,$$

où  $F$  est donnée par

$$F(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 - 2\pi \sum_{i=1}^n d_i \phi|_{\partial\omega_i}.$$

Une solution du problème (3) est donc un point critique de  $F$  dans  $V$ .

---

<sup>10</sup>La fermeture découle de la continuité de la trace, voir à ce sujet l'appendice A.1. Par ailleurs, comme  $\Omega$  est régulier,  $C^\infty(\bar{\Omega})$  est dense dans  $H^1(\Omega)$  (pour une démonstration, voir le chapitre IX de [4]).

**Existence d'un minimum** Montrons que la fonctionnelle  $F$  est minorée. On va utiliser pour cela l'inégalité suivante qui découle du théorème de trace, pour  $\phi \in H^1(\Omega)$  :

$$|\phi|_{\partial\Omega} \leq C_1 \|\phi\|_{H^1(\Omega)}. \quad (5)$$

On remarque aussi que tout  $\phi \in V$  peut être prolongé en  $\tilde{\phi} \in H_0^1(G)$  en posant  $\tilde{\phi}|_{\omega_i} = \text{cste} = \phi|_{\partial\omega_i}$ . On a alors

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{\phi}\|_{L^2(G)} < \infty \quad \text{et} \quad \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla\tilde{\phi}\|_{L^2(G)}, \quad (6)$$

le gradient de  $\tilde{\phi}$  étant nul sur les  $\omega_i$ . Cela montre bien en particulier que  $\tilde{\phi}$  est dans  $H_0^1(G)$ . On dispose alors de l'inégalité de Poincaré pour  $\tilde{\phi}$  et par suite, grâce à (6),

$$\|\phi\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)} \quad (7)$$

En notant  $\|\phi\| = \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$ , on a donc par l'inégalité de trace (5)

$$F(\phi) \geq \frac{1}{2} \|\nabla\phi\|^2 - C_3 \|\phi\|_{H^1}$$

où l'on pose  $C_3 = 2n\pi \max_i \{d_i\} C_1$ , et enfin

$$F(\phi) \geq \frac{1}{2C_2^2} \|\phi\|_{H^1}^2 - C_3 \|\phi\|_{H^1}$$

par l'inégalité de Poincaré (7). Cela prouve bien que  $F$  est minorée.

On considère maintenant une suite minimisante  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $F$ , c'est-à-dire telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\phi_n) = \inf_{\phi \in V} F(\phi)$ . Comme pour  $a$  assez grand on a  $F(\phi_n) \leq a$ , on déduit à partir de l'inégalité précédente que la suite  $(\phi_n)$  est bornée en norme  $H^1$ . Par conséquent, quitte à extraire, on peut supposer que  $\phi_n$  converge faiblement vers  $\phi$  dans  $H^1$ . Comme par ailleurs  $F$  est convexe et continue (*a fortiori* semi-continue inférieurement),  $F$  est faiblement s.c.i. et,

$$F(\phi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(\phi_n).$$

Donc  $\phi$  est bien un minimum de  $F$ .

**Unicité** L'unicité du minimum découle de la convexité stricte de  $F$ . En effet  $x \mapsto |x|^2$  est strictement convexe et donc par linéarité de l'intégrale le premier terme de  $F$  l'est aussi. Le deuxième terme est linéaire. Si maintenant  $\phi$  et  $\psi$  sont deux éléments distincts de  $V$  réalisant le minimum de  $F$  sur  $V$ , alors  $\frac{\phi+\psi}{2} \in V$  et  $F(\frac{\phi+\psi}{2}) < \inf_{v \in V} F(v)$ , ce qui est absurde.

**Retour à une solution de (3)** Montrons qu'une solution du problème variationnel est solution de (3), ce qui prouvera l'équivalence des deux problèmes.

Supposons que  $\phi \in V$  vérifie

$$\int_{\Omega} \nabla\phi \nabla\psi - 2\pi \sum_{i=1}^n d_i \psi|_{\partial\omega_i} = 0 \quad \forall \psi \in V.$$

Alors<sup>11</sup>,  $\phi \in H^2(\Omega)$  et on peut utiliser la formule de Green pour trouver

$$-\int_{\Omega} \psi \Delta \phi + \sum_{i=1}^n \psi|_{\partial\omega_i} \left[ \int_{\partial\omega_i} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - 2\pi d_i \right] = 0 \quad \forall \psi \in V. \quad (8)$$

On en déduit en choisissant  $\psi \in H_0^1(\Omega) \subset V$  que

$$\Delta \phi = 0,$$

puis en revenant à (8) avec  $\psi \in V$  tel qu'une des constantes  $\psi|_{\partial\omega_i}$  soit non nulle :

$$\int_{\partial\omega_i} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 2\pi d_i.$$

□

## 5.2 Comportement du minimiseur $u$ et de l'énergie associée quand le diamètre des trous diminue

On va maintenant considérer le cas particulier d'un domaine où les trous sont des disques dont on va faire tendre le rayon vers 0. Nous présenterons les résultats sans démonstration.

Soit  $G$  un domaine lisse, borné et simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ . Soient  $n$  points  $a_1, \dots, a_n$  de  $G$  et  $n$  entiers  $d_1, \dots, d_n$  de  $\mathbb{Z}$ . Soit  $g : \partial G \rightarrow S^1$  telle que  $\deg(G, \partial G) = d$ , où  $d = \sum_{i=1}^n d_i$ . Soit enfin  $\rho$  une constante positive que l'on fera tendre vers 0. On pose  $\Omega_\rho = G \setminus \cup_{i=1}^n \overline{B(a_i, \rho)}$ , et on considère le problème de minimisation

$$\min_{u \in \mathcal{E}_\rho} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u|^2,$$

avec

$$\mathcal{E}_\rho = \{v \in H^1(\Omega_\rho; S^1) \mid v = g \text{ sur } \partial G \text{ et } \deg(v, \partial B(a_i, \rho)) = d_i\}.$$

C'est une variante du problème précédent pour laquelle on peut montrer de même qu'il existe un unique minimiseur  $u_\rho$ , associé à une fonction scalaire  $\phi_\rho$ . Par ailleurs,  $\phi_\rho$  converge vers  $\phi_0$  uniformément quand  $\rho$  tend vers 0, où  $\phi_0$  est la solution du problème de Neumann

$$\begin{cases} \Delta \phi_0 = \sum_{i=1}^n 2\pi d_i \delta_{a_i} & \text{sur } G, \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial \nu} = g \wedge \frac{\partial g}{\partial \tau} & \text{sur } \partial G, \end{cases}$$

On a alors le résultat fondamental suivant, qui donne le comportement de l'énergie quand  $\rho$  tend vers 0, et dans lequel apparaît l'énergie renormalisée dont nous avons parlé en introduction.

<sup>11</sup>Voir le théorème sur la régularité elliptique en appendice.

**Théorème 5.2.** Soit  $R(x) = \phi_0(x) - \sum_{j=1}^n d_j \log|x - a_j|$ . Alors  $R$  est une fonction harmonique  $C^\infty$  sur  $G$  et le comportement de l'énergie quand  $\rho \rightarrow 0$  est donné par

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 = \pi \left( \sum_{i=1}^n d_i^2 \right) \log(1/\rho) + W + O(\rho) \quad (9)$$

où

$$W = -\pi \sum_{i \neq j} d_i d_j \log|a_i - a_j| + \frac{1}{2} \int_{\partial G} \phi_0 \left( g \wedge \frac{\partial g}{\partial \tau} \right) - \pi \sum_{i=1}^n d_i R(a_i) \quad (10)$$

est une quantité qui ne dépend que de  $G$ , des  $a_i$  et des  $d_i$  (pas de  $\rho$ ). On l'appelle énergie renormalisée dans la mesure où c'est ce qu'il reste de l'énergie après que la quantité en  $\log(1/\rho)$ , qui diverge, a été ôtée.

Les principales propriétés de l'énergie renormalisée sont :

- $W \rightarrow +\infty$  dès que deux des  $a_i$  fusionnent
- $W \rightarrow +\infty$  dès qu'un des  $a_i$  se rapproche du bord  $\partial G$  (Cela provient du fait que  $R(a_i) \rightarrow -\infty$  quand  $a_i \rightarrow \partial G$ )

On a par ailleurs convergence de la suite  $u_\rho$  vers une fonction  $u_0$  quand  $\rho$  tend vers 0, qui possède les propriétés suivantes :

- $u_0$  est une fonction harmonique  $C^\infty$  définie sur  $G \setminus \cup_i \{a_i\}$
- $u_0 = g$  sur  $\partial G$
- $\left| u_0(z) - \beta_i \frac{(z - a_i)}{|z - a_i|} \right| \leq C|z - a_i|$  quand  $z \rightarrow a_i, \forall i$ .

On appelle  $u_0$  l'*application harmonique canonique* associée à  $(a_i)$ , car on peut montrer qu'une application vérifiant ces trois propriétés est unique.

## 6 Comportement asymptotique de $u_\varepsilon$

### 6.1 Position du problème

Soit  $G \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert lisse, borné et étoilé en 0. On considère la fonctionnelle

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_G (|u|^2 - 1)^2$$

qui est définie pour des fonctions<sup>12</sup>  $u \in H_g^1$

où

$$H_g^1 = \{u \in H^1(G, \mathbb{C}); u = g \text{ sur } \partial G\}$$

et  $g : G \rightarrow \mathbb{U}$  est  $C^\infty$ . On pose  $d = \deg(g, \partial G)$ . Le minimum de  $E_\varepsilon$  est atteint par une unique fonction  $u_\varepsilon$  qui est  $C^\infty$  et qui satisfait

---

<sup>12</sup>Voir A.2

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon (|u_\varepsilon|^2 - 1) & \text{dans } G \\ u_\varepsilon = g & \text{sur } \partial G \end{cases} \quad (11)$$

Le caractère  $C^\infty$  est dû aux résultats de régularité elliptique <sup>13</sup> qui vont s'appliquer récursivement. On a déjà le résultat suivant :

**Proposition 6.1.**  $|u_\varepsilon| \leq 1$

*Preuve.* Déjà,  $u_\varepsilon$  est bornée. En effet par la régularité elliptique  $u_\varepsilon \in H^2$ . Or grâce aux injections de Sobolev <sup>14</sup>  $W^{2,2} \subset L^\infty$ . On remarque ensuite :

$$-\frac{1}{2} \Delta |u_\varepsilon|^2 = u_\varepsilon \cdot \Delta u_\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} |u_\varepsilon|^2 (1 - |u_\varepsilon|^2)$$

Si on pose  $v_\varepsilon = |u_\varepsilon|^2 - 1$  on a

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon - av \leq 0 & \text{dans } G \\ v_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial G \end{cases}$$

. où  $a$  est bornée et positive. On en déduit  $v \leq 0$ . En effet soit  $x_0$  tel que  $v(x_0) = \max_{\overline{G}} v$ . Supposons  $v(x_0) > 0$ . Posons

$$w = v + \varepsilon \exp(\lambda x_1)$$

pour  $\lambda^2 > \max a$  et  $\varepsilon$  assez petit pour que  $\forall x \in \partial G \quad \varepsilon \exp(\lambda x_1) < w(x_0)$ . Alors le maximum de  $w$  est strictement positif et est atteint en  $y_0 \in G$  (il n'est pas atteint sur  $\partial G$  grâce à la condition sur  $\varepsilon$ ). Or on a

$$-\Delta w + aw \leq \varepsilon \exp \lambda x_1 (a - \lambda^2) < 0$$

que l'on applique en  $y_0$ . Alors  $w$  et  $a$  sont positifs et donc  $\Delta w > 0$  ce qui contredit la maximalité.  $\square$

La deuxième partie de l'énergie est celle qui remplace en quelque sorte la condition d'être à valeurs dans  $S^1$ . Dans cette partie nous allons découper le domaine  $G$  en bons et mauvais disques, ces derniers contenant bien évidemment les zéros. La distinction entre les deux se fera au moyen de la seconde partie de l'énergie, c'est à dire  $\frac{1}{4\varepsilon^2} \int_G (|u|^2 - 1)^2$ . Sur les bons disques, on aura plus précisément  $|u_\varepsilon(x)| \geq \frac{1}{2}$ . De plus le nombre de mauvais disques sera borné indépendamment de  $\varepsilon$  et leur taille va rétrécir.

## 6.2 Une majoration de l'énergie d'interaction et de confinement

**Théorème 6.1.** *Il existe une constante  $C$  dépendant seulement de  $g$  et  $G$  telle que toute solution  $u_\varepsilon$  de (11) satisfait*

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_G (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 \leq C$$

<sup>13</sup>Voir A.3

<sup>14</sup>Voir A.2



*Preuve.* Rappelons que  $G$  est étoilé par rapport à l'origine et donc  $x \cdot \nu \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in \partial G$ . Multiplions (1) par  $x \cdot \nabla u_\varepsilon$  et intégrons sur  $G$ . On a alors

$$\int_G -(x \cdot \nabla u_\varepsilon) \Delta u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_G (x \cdot \nabla u_\varepsilon) (u_\varepsilon (|u_\varepsilon|^2 - 1))$$

Or on a

$$(x \cdot \nabla u_\varepsilon) (u_\varepsilon (|u_\varepsilon|^2 - 1)) = \frac{1}{4} \nabla ( (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 ) \cdot x = \frac{1}{4} \nabla ( (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 ) \cdot \nabla \left( \frac{x^2}{2} \right)$$

Donc en appliquant la formule de Green-Riemann et en remarquant que  $|u_\varepsilon| = 1$  sur  $\partial G$ , on obtient

$$\int_G (x \cdot \nabla u_\varepsilon) (u_\varepsilon (|u_\varepsilon|^2 - 1)) = \frac{1}{2} \int_G (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2$$

Et par ailleurs

$$\int_G -(x \cdot \nabla u_\varepsilon) \Delta u_\varepsilon = \int_G \nabla (x \cdot \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon - \int_{\partial G} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} (x \cdot \nabla u_\varepsilon)$$

Quelques calculs élémentaires donnent :

$$\nabla (x \cdot \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon = |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2} x \cdot \nabla |\nabla u_\varepsilon|^2$$

On applique la formule de Green-Riemann :

$$\int_G \nabla (x \cdot \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x \cdot \nu) |\nabla u_\varepsilon|^2 = \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x \cdot \nu) \left( \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \tau} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 \right)$$

On remarque aussi :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} (x \cdot \nabla u_\varepsilon) = (x \cdot \nu) \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 + (x \cdot \tau) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \tau} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}$$

Les dérivées par rapport à  $\tau$  sont intéressantes car  $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \tau} = \frac{\partial g}{\partial \tau}$  sur  $\partial G$ . On obtient au final :

$$\frac{1}{2\varepsilon^2} \int_G (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 = \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x \cdot \nu) \left( \frac{\partial g}{\partial \tau} \right)^2 - \int_{\partial G} (x \cdot \tau) \frac{\partial g}{\partial \tau} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} + \frac{1}{2} \int_{\partial G} (x \cdot \nu) \left( \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2$$

Or le deuxième membre est un polynôme du second degré en  $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}$  à coefficient dominant strictement négatif car  $x \cdot \nu \geq \alpha > 0$  donc est majoré par une constante dépendant seulement de  $g$  et de la forme de  $G$ .  $\square$

### 6.3 Les bons et mauvais disques

**Théorème 6.2.** *Il existe des constantes positives  $\mu_0$  et  $\lambda_0$  (dépendant seulement de  $G$  et  $g$ ) telles que si  $u_\varepsilon$ , solution de (11) satisfait*

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{G \cap B_{2l}} (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 \leq \mu_0$$

sur un disque  $B_{2l}$  de rayon  $2l$  avec  $\frac{l}{\varepsilon} \geq \lambda_0$  et  $l \leq 1$  alors

$$\forall x \in G \cap B_l \quad |u_\varepsilon(x)| \geq \frac{1}{2}.$$

*Preuve.* On a <sup>15</sup>

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty(G)} \leq \frac{C}{\varepsilon}$$

donc

$$\forall x, y \in G \quad |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq \frac{C}{\varepsilon} |x - y|$$

Soit  $x_0 \in G$ . Supposons  $|u_\varepsilon(x_0)| < \frac{1}{2}$ . Alors

$$\forall x \in G \cap B(x_0, \frac{\varepsilon}{4C}) \quad |u_\varepsilon(x)| \leq \frac{3}{4}$$

Et donc

$$(1 - |u_\varepsilon(x)|^2) \geq \frac{1}{16}$$

Or comme le domaine est étoilé il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\text{mes}(G \cap B(x, r)) \geq \alpha r^2$  et donc

$$\int_{G \cap B(x_0, \frac{\varepsilon}{4C})} (1 - |u_\varepsilon(x)|^2) \geq \frac{\alpha \varepsilon^2}{(16C)^2}$$

Donc  $\lambda_0 = \frac{1}{4C}$  et  $\mu_0 < \frac{\alpha}{(16C)^2}$  conviennent. □

**Définition 6.1.** *On appelle bon disque un  $B(x_i, \lambda_0 \varepsilon)$  tel que*

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{G \cap B(x_i, 2\lambda_0 \varepsilon)} (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 < \mu_0$$

*Les autres  $B(x_i, \lambda_0 \varepsilon)$  sont appelés mauvais disques.*

**Lemme 6.1.** *Pour tout  $\varepsilon$  il existe une famille finie  $(B(x_i, \lambda_0 \varepsilon))_{i \in I}$  telle que  $x_i \in G$ ,  $G \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, \lambda_0 \varepsilon)$  et  $\|x_i - x_j\| > \lambda_0 \frac{\varepsilon}{2}$ .*

*Preuve.*  $G$  est relativement compact donc il existe une famille  $(x_i)$  finie telle que  $G \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, \lambda_0 \frac{\varepsilon}{2})$ . Maintenant pour chaque  $i$  on remarque que si  $\|x_i - x_1\| > \lambda_0 \frac{\varepsilon}{2}$  alors  $B(x_i, \lambda_0 \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(x_1, \lambda_0 \varepsilon)$  et donc on peut enlever un tel  $i$  de la famille. On continue ensuite avec le  $x_j$  le plus proche non supprimé. □

---

<sup>15</sup>Voir l'Appendice A.4

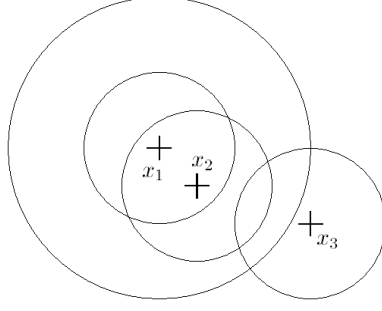


FIG. 4: Exemple :  $x_2$  peut être supprimé mais  $x_3$  doit être gardé

Appelons  $J$  l'ensemble des mauvais disques.

**Théorème 6.3.** *Il existe  $N$  dépendant seulement de  $g$  et  $G$  tel que  $\text{card}J \leq N$ .*

*Preuve.* Soit  $x \in G$ . Les  $x_i$  tels que  $x \in B(x_i, 2\lambda_0\varepsilon)$  sont au plus éloignés de  $2\lambda_0\varepsilon$  de  $x$  et occupent chacun la surface d'un disque  $B(x_i, \frac{1}{4}\lambda_0\varepsilon)$ . En faisant un rapport de surface on voit qu'il y a au plus  $\frac{(2+0.25)^2}{0.25^2} = 27$   $x_i$  tels que  $x \in B(x_i, 2\lambda_0\varepsilon)$ . Ainsi on a :

$$\sum_{i \in I} \int_{B(x_i, 2\lambda_0\varepsilon)} (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 \leq 27 \int_G (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2$$

Et donc d'après le théorème de majoration de l'énergie de confinement et d'interaction on a

$$\mu_0 \text{card}J \leq \frac{27}{\varepsilon^2} \int_G (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 \leq \mu_0 N$$

où  $N$  ne dépend que de  $G$  et  $g$ . □

## 6.4 Convergence

Nous allons dans cette partie présenter sans démonstration la suite de l'analyse de l'équation. Considérons pour chaque  $\varepsilon$  l'ensemble des centres  $x_i^\varepsilon$  des mauvais disques. Vu que le cardinal de cet ensemble est borné indépendamment de  $\varepsilon$ , on peut considérer les centres comme des  $N$ -uplets (quitte à faire des répétitions) à valeur dans  $G^N$  qui est relativement compact. Il existe donc une suite  $\varepsilon_n$  et un  $N$ -uplet  $(a_i)$  tel que  $(x_i^{\varepsilon_n})$  converge vers  $(a_i)$ . On ne garde par la suite que les  $a_i$  distincts.

Alors que l'on a

$$\int_G |\nabla u_\varepsilon|^2 \rightarrow \infty \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Pour tout compact  $K$  inclus dans  $\overline{G} \setminus \bigcup \{a_i\}$  il existe  $C_K$  tel que

$$\int_K |\nabla u_{\varepsilon_n}|^2 \leq C_K$$

Donc quitte à extraire de façon diagonale on peut supposer que  $u_{\varepsilon_n}$  converge uniformément sur tout compact de  $\overline{G} \setminus \bigcup \{a_i\}$ . Appelons  $u_*$  cette limite. Comme

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_G (|u_\varepsilon|^2 - 1)^2 \leq C$$

on a  $|u_*| = 1$ . On remarque par ailleurs que  $u_*$  n'est pas dans  $H^1$ .

#### Propriétés intéressantes de $u_*$

- Les  $a_i$  sont dans  $G$
- Pour tout  $i$  on a  $\deg(u_*, a_i) = 1$  (où le degré de  $u_*$  par rapport à un point  $a_i$  est le degré par rapport à un petit contour d'indice 1 autour de  $a_i$ ).
- Par une propriété du degré (voir l'appendice) il y a donc exactement  $d$   $a_i$  distincts, où  $d = \deg(g, \partial G)$ .

**Lien avec l'énergie renormalisée** La configuration  $(a_i)$  est un minimum de l'énergie renormalisée  $W$ . De plus  $u_*$  coïncide avec l'application canonique associée aux  $(a_i)$ .

**Remarque 1** Cette partie ne donne que l'existence de la limite. C'est par l'étude de  $W$  que l'on peut localiser les vortex.

**Remarque 2**  $W$  peut avoir plusieurs minima et donc  $u_\varepsilon$  peut avoir plusieurs valeurs d'adhérence ( $u_*$  n'est pas forcément unique)

## 7 Conclusion

La thématique des vortex représente un domaine très actif tant en physique qu'en mathématique. Des expériences ont été menées avec des condensats de Bose-Einstein (au LKB par exemple) ainsi qu'avec des superfluides.

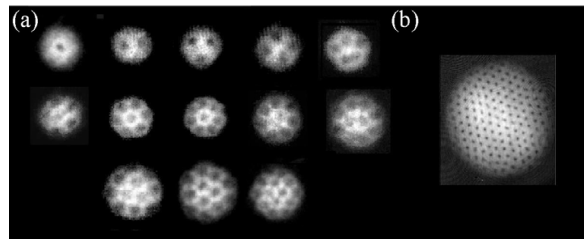


FIG. 5: Réseaux de Vortex obtenus dans un condensat au LKB (a) et au MIT (b)

Sur le plan mathématique des études ont été menées depuis celle de Bethuel, Brezis et Hélein dont il est question dans ce mémoire. Elles sont résumées dans [1] et s'intéressent aux points suivants :

- Etudier des équations microscopiques pour la supraconductivité et la superfluidité (par exemple Gross-Pitaevskii)

- Se placer en trois dimension, ce qui demande d'étudier la forme des vortex en plus de leur position
- Etudier des potentiels piégeant particulier, en particulier des pièges annulaires

## A Propriétés des espaces de Sobolev

### A.1 Théorie des traces

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Posons  $\Gamma = \partial\Omega$ . On cherche à donner un sens à  $u|_\Gamma$  pour  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Remarquons que ce problème n'a rien d'évident car les fonctions de  $W^{1,p}$  sont définies p.p. et  $\Gamma$  est négligeable. Nous allons voir qu'il est malgré tout possible de définir  $u|_\Gamma$  pour  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  si  $\Omega$  est un ouvert suffisamment régulier. Nous nous restreindrons au cas  $\Omega = \mathbb{R}_+^N$  et  $\Gamma = \partial\Omega = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ , le cas général pourrait ensuite se traiter à l'aide de cartes locales.

Pour des fonctions  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ , on dispose de l'opérateur

$$\begin{aligned} T : C_c^1(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow L^p(\Gamma) \\ u &\longmapsto u|_\Gamma \end{aligned}$$

On a alors le lemme suivant :

**Lemme A.1.** *Il existe une constante  $C$  telle que*

$$\|u|_\Gamma\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$$

*Preuve.* On pose  $G(t) = |t|^{p-1}t$ . Soit  $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ . Alors

$$G(u(x', 0)) = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_N} G(u(x', x_N)) dx_N = - \int_0^{+\infty} G'(u(x', x_N)) \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N) dx_N.$$

Et comme on a

$$G'(t) = p|t|^{-1},$$

on en déduit

$$\begin{aligned} |u(x', 0)|^p &\leq p \int_0^\infty |u(x', x_N)|^{p-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N) \right| dx_N \\ &\leq C \int_0^\infty |u(x', x_N)|^p dx_N + \int_0^\infty \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N) \right| dx_N, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité  $pa^{p-1}b \leq a^p + b^p$  qui se déduit de la formule du binôme. On obtient alors l'inégalité du lemme en intégrant en  $x'$ .  $\square$

Grâce à ce lemme, on peut par densité prolonger continûment l'opérateur  $T$  en

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$$

$Tu$  s'appelle alors la *trace* de  $u$  sur  $\Gamma$ , qu'on note encore  $u|_\Gamma$ .

**Remarque** La notion de trace donne une formule de Green pour les fonctions de  $H^2(\Omega)$  identique à celle pour les fonctions  $C^2$ .

Dans les parties qui vont suivre, les résultats, dont les démonstrations sont très techniques seront simplement énoncés.

## A.2 Injections de Sobolev

**Théorème A.1.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ouvert de classe  $C^1$  avec  $\partial\Omega$  borné. Alors*

$$\forall q \geq N \quad W^{1,N}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$$

$$\forall p > N \quad W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$$

avec injection continue.

**Remarque** Nous utilisons dans le mémoire les conséquences suivantes en dimension 2 :  $W^{1,2} \subset L^4$  et  $W^{2,2} \subset L^\infty$ .

## A.3 Régularité elliptique

**Théorème A.2.** *Soit  $\Omega$  un ouvert de classe  $C^{m+2}$  avec  $\partial\Omega$  borné. Soit  $f \in H^m(\Omega)$  et  $u \in H_0^1(\Omega)$  tel que*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

alors  $u \in H^{m+2}(\Omega)$  et il existe une constante  $C$  indépendante de  $\Omega$  telle que

$$\|u\|_{H^{m+2}} \leq C \|f\|_{H^m}$$

**Remarque** Ce théorème donne la régularité pour le problème de Dirichlet homogène. Cependant si la condition au bord n'est pas homogène mais est une fonction  $g$  lisse alors il suffit de soustraire une fonction harmonique et lisse  $h$  valant  $g$  sur  $\partial\Omega$  pour avoir le même résultat de régularité.

## A.4 Majoration du gradient

**Lemme A.2.** *Si  $u$  vérifie  $-\Delta u = f$  sur  $\Omega \in \mathbb{R}^N$  alors il existe une constante  $C$  dépendant de  $N$  seulement telle que*

$$\forall x \in \Omega \quad |\nabla u(x)| \leq C(\|u\|_{L^\infty} \|f\|_{L^\infty} + \frac{1}{\text{dist}(x, \partial\Omega)^2} \|u\|_{L^\infty}^2)$$

**Lemme A.3.** *Soit  $\Omega$  un ouvert lisse et borné de  $\mathbb{R}^N$ . Si  $u$  vérifie*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

alors il existe une constante  $C$  dépendant de  $\Omega$  seulement telle que

$$\|\nabla u\|_{L^\infty}^2 \leq C \|f\|_{L^\infty} \|u\|_{L^\infty}$$

## B Appendice : Un peu de théorie du degré

**Définition B.1.** Soit  $X$  et  $Y$  variétés compactes connexes orientées de dimension  $n$  et  $f : X \rightarrow Y$  application continue. On appelle degré de  $f$  le réel  $\deg(f)$  tel que pour toute  $n$  forme différentielle  $\omega$  sur  $Y$  on a

$$\int_X f^* \omega = \deg(f) \int_Y \omega$$

Il existe aussi une définition plus intrinsèque équivalente, mais elle n'est pas forcément utile ici.

**Une vision plus intuitive en dimension 1 :** Soit  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^1$  continue. Le degré de  $f$  est alors le « nombre de tours » que fait  $f$ . Par exemple si  $f : e^{i\theta} \mapsto e^{i3\theta}$  alors le degré de  $f$  est 3. On peut alors exprimer le degré de  $f$  sous la forme

$$\deg(f) = \int_{\Gamma} f \wedge \frac{\partial f}{\partial \tau}$$

Cela se voit bien pour  $f$  de classe  $C^1$  car alors il existe  $\theta : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $\forall x \in \Gamma f(x) = e^{i\theta(x)}$  et alors  $f \wedge \frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$ .

**Proposition B.1.** Soit  $G$  et  $(\omega_i)_{i=1..k}$  des ouverts simplement connexes  $C^\infty$  tels que les  $\omega_i$  sont inclus dans  $G$ . Alors

- Il n'existe pas de fonction de classe  $C^1$   $g : G \rightarrow \mathbb{S}^1$  telle que  $\deg(g, \partial G) \neq 0$  (où l'on note  $\deg(g, \partial G)$  le degré de  $g|_{\partial G}$ ).
- Si  $f : G \setminus \bigcup_{i=1..k} \omega_i \rightarrow \mathbb{S}^1$  est de classe  $C^1$  alors

$$\deg(f, \partial G) = \sum_{i=1..k} \deg(g, \partial \omega_i)$$

*Preuve.* Je ne vais prouver que le deuxième point, le premier se faisant de même. Notons  $\Omega = G \setminus \bigcup_{i=1..k} \omega_i$ . Soit  $\alpha$  une forme différentielle de degré 1 sur  $\mathbb{S}^1$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^1$  une fonction est de classe  $C^1$  alors par la formule de Stokes on a :

$$\int_{\partial \Omega} f^* \alpha = \int_{\Omega} d(f^* \alpha) = \int_{\Omega} f^*(d\alpha) = 0$$

car  $d\alpha$  est une forme de degré 2 sur  $\mathbb{S}^1$ . Or par ailleurs :

$$\int_{\partial \Omega} f^* \alpha = \int_{\partial G} f^* \alpha - \sum_{i=1..k} \int_{\partial \omega_i} f^* \alpha = \deg(f, \partial G) \int_{\mathbb{S}^1} \alpha - \sum_{i=1..k} \deg(f, \partial \omega_i) \int_{\mathbb{S}^1} \alpha$$

d'où le résultat. □

**Remarque :** En fait il n'existe pas non plus de fonction  $f$  dans  $H^1(G, \mathbb{S}^1)$  telle que  $\deg(f, \partial G) \neq 0$ .



## Références

- [1] Amandine Aftalion. *Vortices in Bose-Einstein condensates*, volume 67 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser Boston, Cambridge MA, 2006.
- [2] Fabrice Bethuel, Haïm Brezis, and Frédéric Hélein. Asymptotics for the minimisation of a ginzburg-landau fonctionnal. *Calculus of Variations and PDE 1*, pages 123–148, 1993.
- [3] Fabrice Bethuel, Haïm Brezis, and Frédéric Hélein. *Ginzburg-Landau vortices*, volume 13 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser Boston, Cambridge MA, 1994.
- [4] Haïm Brezis. *Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications*. Paris, deuxième édition, 1999.
- [5] Frédéric Chevy and Jean Dalibard. Les condensats de bose-einstein en rotation. *Bulletin de la société française de physique*, (142) :123–148, january 2004.
- [6] Antony M. Guénault. *Basic Superfluids*. Master series in physics and astronomy. Taylor and Francis, London, 2003.
- [7] Grégoire Nadin. Td d’analyse fonctionnelle à l’ens.
- [8] Pierre Pansu. Cours de géométrie différentielle à l’ens.
- [9] David R. Tilley and John Tilley. *Superfluidity and Superconductivity*. Graduate Student series in Physics. Adam Hilger LTD, Bristol and Boston MA, second edition, 1986.