

Mémoire de troisième année
Interprétation d'algèbres de Hopf d'arbres
en théorie des représentations

sous la direction de
Florent HIVERT
et
Vincent PILAUD

Joël Gay

21 octobre 2014

Table des matières

1	<i>Introduction au domaine de recherche</i>	5
1.1	Catégorification	6
1.1.1	Coefficients de structure du produit/coproduct d'une algèbre	6
1.1.2	Coefficients de structure de la restriction/induction des représentations d'une tour d'algèbre	6
1.1.3	Catégorification	8
1.1.4	Groupes de Grothendieck	8
1.2	Algèbres de Hopf, Algèbres de Hopf sur des arbres	9
1.2.1	Généralités	9
1.2.2	Algèbre sur les permutations, FQSym	10
1.2.3	Algèbre de Loday-Ronco sur les arbres binaires	10
1.2.4	Algèbre de Loday-Ronco Duale	13
1.3	Pistes de recherche	15
2	<i>Curriculum Vitae</i>	17
3	<i>Mémoire de master</i>	19
3.1	Définition(s ?) d'algèbres amassées	21
3.1.1	L'exemple des triangulations	21
3.1.2	Une définition	25
3.1.3	Le phénomène de Laurent	26
3.2	Classification des algèbres amassées de type fini	33
3.2.1	Cadre général et énoncés des théorèmes	33
3.2.2	« Existence »	36
3.2.3	« Unicité »	57
3.3	Réalisation géométrique de l'associaèdre selon Chapoton, Fomin et Zelevinsky	76
3.3.1	État des lieux	76
3.3.2	Fonction support et réduction du problème	76
3.3.3	Esquisse des preuves restantes	83
3.4	Complexes de sous-mots et polytope de briques	87
3.4.1	Complexes de sous-mots	87
3.4.2	Configuration racine	90
3.4.3	Polytopes de briques	92
3.5	Complexes de sous-mots et degré de compatibilité	97
3.5.1	Objectif	97
3.5.2	Degré de compatibilité	97

3.5.3	Conjectures	98
3.6	Groupes de Coxeter	101
3.6.1	Système de Coxeter	101
3.6.2	Système de racines	102
3.6.3	Classification des groupes de Coxeter finis	103
3.6.4	Mots sur S	103
3.6.5	Poids et coracines	104
3.7	Géométrie discrète	105
3.7.1	Complexes et éventails	105
3.7.2	Polytopes simples et simpliciaux	106
4	<i>Exposé de première année</i>	109
4.1	Nombre de partitions	111
4.1.1	Expression sous forme de produit	111
4.1.2	Équation fonctionnelle de F	113
4.1.3	Contour d'intégration	113
4.1.4	Nombre de partitions	120
4.2	Fonctions elliptiques	126
4.2.1	Généralités sur les fonctions périodiques	126
4.2.2	Fonction \wp de Weierstrass	130
4.2.3	Fonction Δ	136
4.3	Fonctions modulaires	140
4.3.1	Demi-plan de Poincaré et Γ	140
4.3.2	Fonctions modulaires	142
4.4	Fonction η de Dedekind	149
4.4.1	Présentation	149
4.4.2	Équation fonctionnelle de η	153
4.4.3	Équation fonctionnelle de F	161
	Bibliographie	163

Chapitre 1

Introduction au domaine de recherche

Interprétation d'algèbres de Hopf d'arbres en théorie des représentations

Introduction

La théorie des représentations d'algèbres, bien comprise dans certains cas (eg. les groupes finis en caractéristique nulle [Ser78]), a été largement étudiée et motive encore d'importants travaux. Elle présente en particulier de nombreuses connections avec la combinatoire [Ful97]. Si on considère une tour d'algèbres [BL09] plutôt qu'une algèbre, les opérations de restriction et d'induction définissent de nouvelles structures algébriques sur les groupes de Grothendieck [CR90]. Sous certaines conditions [BL09], ces groupes sont munis d'une structure d'algèbre de Hopf [Gei77] dans laquelle les éléments se composent par un produit, et se décomposent par un coproduit.

La combinatoire algébrique produit naturellement des algèbres de Hopf dont les bases sont indexées par des familles combinatoires, et dont les produits et coproduits sont définis par des opérations combinatoires sur les objets [Hiv07]. L'exemple fondamental est l'algèbre Sym des fonctions symétriques, dont la base est indexée par les partitions, et qui provient de la théorie des représentations des groupes symétriques [Mac95, Ful97]. La base importante de Sym pour ce point de vue des représentations est appelée la base des fonctions de Schur. Le produit de deux fonctions de Schur est donné par la règle de Littlewood-Richardson, et est bien compris grâce à un relèvement non commutatif sous la forme de l'algèbre de Poitier Reutenauer FSym sur les tableaux de Young standard [PR95, DHNT11]. L'algèbre de Loday-Ronco [LR98] sur les arbres binaires présentant de fortes similarités avec celle-ci, on peut espérer que ces deux algèbres de Hopf proviennent de la théorie des représentations d'une tour d'algèbres. La même question se pose pour l'algèbre Cambrienne, qui généralise l'algèbre de Loday-Ronco [CP14], et dont la base est indexée par les arbres Cambriens, motivés par des constructions géométriques de l'associaèdre [Sta63, HL07, LP13].

Mon projet de recherche concerne la catégorification de ces algèbres de Hopf combinatoires :

il s'agit de les réaliser comme groupes de Grothendieck de tours d'algèbres. Cette démarche s'inscrit dans un effort de catégorification initié dans la littérature des dernières décennies [CF94, KT97, BHT04, HNT06, BL09].

1.1 Catégorification

1.1.1 Coefficients de structure du produit/coproduct d'une algèbre

Nous allons ici décrire un problème auquel on est souvent confronté en algèbre ou en combinatoire. On se donne A une algèbre qui admet une base $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, où Λ est une famille combinatoire. On s'intéresse à la décomposition sur cette base du produit de deux éléments de la base :

$$b_\lambda \cdot b_\mu = \sum_{\nu \in \Lambda} c'_{\lambda\mu} b_\nu.$$

Les coefficients $c'_{\lambda\mu}$ qui apparaissent dans cette expression s'appellent les coefficients de structure de l'algèbre A dans la base (b_λ) . Dans beaucoup de cas qui nous intéressent ces coefficients sont des entiers positifs.

Par exemple, considérons l'algèbre Sym des fonctions symétriques étudiée dans [Zel81]. Elle possède une base intéressante, la famille des fonctions de Schur $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, où Λ est l'ensemble de toutes les partitions d'un entier. (On dit que λ est une partition de $n \in \mathbb{N}$, et on écrit $\lambda \vdash n$ si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, $\forall i, \lambda_i > 0$ et $n = \sum_i \lambda_i$.) Les coefficients de structure pour la multiplication sur la base (s_λ) s'appellent les coefficients de Littlewood-Richardson [Mac95].

Ces coefficients peuvent nous intéresser sous deux aspects. D'abord, si ce sont des entiers, on peut penser (comme c'est souvent le cas en combinatoire) qu'ils comptent une famille combinatoire. Ainsi il existe plusieurs bases de Sym dont les coefficients de structure comptent différents types de tableaux de Young. Nous allons décrire dans la suite une autre façon d'interpréter ces entiers.

Remarque 1.1.1. Un produit est une application bilinéaire $\times : A \times A \rightarrow A$ soit aussi une application linéaire $A \otimes A \rightarrow A$. En transposant cette application on obtient une comultiplication c'est-à-dire une application linéaire $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$. On peut également définir des coefficients de structure pour la comultiplication dans une cogèbre (et donc pour une bigèbre) en posant :

$$\Delta b_\nu = \sum_{\lambda, \mu \in \Lambda} d_\nu^{\lambda\mu} (b_\lambda \otimes b_\mu).$$

1.1.2 Coefficients de structure de la restriction/induction des représentations d'une tour d'algèbre

On note $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} . On rappelle [Ser78] qu'une représentation linéaire d'un groupe G est la donnée d'un espace vectoriel V et d'un morphisme de groupe $\rho : G \rightarrow GL(V)$ (c'est-à-dire d'une action de G sur V par applications linéaires inversibles). Cette donnée est équivalente à la donnée d'un $\mathbb{K}G$ -module, où $\mathbb{K}G$ est l'algèbre du groupe (on dira aussi plus simplement G -module). On obtient cette équivalence en linéarisant l'action.

La théorie des représentations s'intéresse particulièrement aux modules irréductibles (aussi appelés modules simples), qui n'admettent pas d'autres sous- G -modules qu'eux-mêmes et le sous-module nul. Ce sont en effet des briques élémentaires qui nous permettent de recréer des G -modules. Plus précisément une algèbre est dite semi-simple si tous les modules sur cette algèbre sont totalement réductibles, c'est-à-dire somme de modules irréductibles. Un G -module totalement réductible s'écrit alors

$$V \simeq \bigoplus_i V_i^{m_i(V)},$$

où les V_i sont des modules irréductibles. Ainsi, à isomorphisme près on décrit tous les G -modules semi-simples en connaissant simplement les modules irréductibles et en se donnant des multiplicités. Le théorème de Maschke [Ser78] affirme que tous les groupes finis ont des algèbres de groupes semi-simples en caractéristique zéro.

Un dernier résultat intéressant est que si l'on se donne un $(G \times G')$ -module irréductible, où G et G' sont deux groupes finis, alors il est nécessairement de la forme $V \otimes W$ où V est un G -module irréductible et W est un G' -module irréductible.

Prenons un exemple. On considère le groupe \mathfrak{S}_n des permutations sur n éléments. Il s'agit d'un groupe fini, donc toutes ses représentations sont complètement réductibles. De plus la théorie de ses modules irréductibles est bien connue : ces modules sont indexés par les partitions de l'entier n , et les bases des modules par les tableaux de Young [Mac95, Ful97]. On note V_λ pour le \mathfrak{S}_n -module irréductible correspondant à la partition $\lambda \vdash n$.

L'intérêt de cette famille des groupes symétriques est que l'on a une tour de groupes $(\mathfrak{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une famille de morphismes :

$$\tau_{n,m} : \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m \longrightarrow \mathfrak{S}_{n+m}$$

qui nous donne par linéarisation une tour d'algèbre $(\mathbb{K}\mathfrak{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec une famille de morphismes

$$\rho_{n,m} : \mathbb{K}\mathfrak{S}_n \otimes \mathbb{K}\mathfrak{S}_m \longrightarrow \mathbb{K}\mathfrak{S}_{n+m}$$

qui sont « associatifs » pour la composition. Dès lors on peut considérer le $(\mathbb{K}\mathfrak{S}_n \otimes \mathbb{K}\mathfrak{S}_m)$ -module restreint d'un $\mathbb{K}\mathfrak{S}_{n+m}$ -module (c'est-à-dire le module dont l'espace est le même, et sur lequel on ne fait agir plus que le sous-groupe $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ et pas tout le groupe \mathfrak{S}_{n+m}). Ce $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ -module restreint n'a plus de raisons d'être irréductible, et on le décompose alors sur les modules irréductibles de $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$, qui sont tous de la forme $V_\lambda \otimes V_\mu$ où V_λ est un \mathfrak{S}_n -module, et V_μ un \mathfrak{S}_m -module. On a obtenu la décomposition :

$$V_\nu = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ \mu \vdash m}} (V_\lambda \otimes V_\mu)^{d_{\lambda\mu}^\nu},$$

où les multiplicités $d_{\lambda\mu}^\nu$ sont des coefficients de structure de la restriction et induction de la tour d'algèbre $(\mathbb{K}\mathfrak{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On peut voir ces coefficients comme les coefficients de structure d'une cogèbre construite artificiellement avec une base vérifiant les bonnes relations.

Il existe une opération dans le sens inverse de la restriction, qui permet d'associer à un $(\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m)$ -module un \mathfrak{S}_{n+m} -module. On appelle cette opération l'induction. Là encore l'induit d'un module irréductible n'est pas forcément irréductible, et on obtient des coefficients de structure $c_{\lambda\mu}^\nu$ d'un produit en décomposant les $(\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m)$ -modules irréductibles $V_\lambda \otimes V_\mu$

en $\mathbb{K}\mathfrak{S}_{n+m}$ -modules irréductibles V_ν .

On a donc réussi à associer à une tour d'algèbre à la fois un produit et un coproduit. Si en plus ces deux opérations se comportent « bien », c'est-à-dire vérifient des conditions de compatibilité que nous détaillerons plus loin, on obtient une algèbre de Hopf.

1.1.3 Catégorification

On a présenté dans les deux sections précédentes deux façons d'obtenir des coefficients de structure : en partant d'une algèbre/cogèbre, ou en partant d'une tour d'algèbres.

Quand on se donne une tour d'algèbres $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (où A_0 est le corps de base) avec la suite d'applications

$$\rho_{n,m} : A_n \otimes A_m \longrightarrow A_{n+m},$$

et en supposant que la théorie des représentations des A_n soit connue, on a vu qu'on peut en déduire des coefficients de structure pour un produit et pour un coproduit. On définit alors un espace vectoriel engendré par une base vérifiant les relations que l'on souhaite pour le munir d'un produit et d'un coproduit. Cet espace vectoriel est donc associé à notre tour d'algèbres.

Les problématiques envisagées pour ma thèse concernent le sens inverse : on se donne une algèbre/cogèbre engendrée par une certaine base, on calcule les coefficients de structure et on cherche une tour d'algèbre qui « réalise » ces coefficients. C'est le problème de la catégorification, qui n'admet pas de méthode générique. Ce problème et ses variantes est un sujet de recherche très actif ces dernières années. Par exemple, Crane et Frenkel [CF94] ont introduit une notion de Hopf-catégorie dans le contexte de la catégorification des groupes quantiques. Plus récemment Krob et Thibon [KT97] ont montré comment une dualité entre deux algèbres de Hopf ($NSym$ et $QSym$, [MR95]) provient d'une dualité entre deux autres algèbres de Hopf associées à la tour d'algèbre de Hecke à $q = 0$. On peut trouver d'autres exemples dans [BHT04, HNT06, Ser84].

Je désire donc dans ma thèse me pencher davantage sur cette question de catégorification pour certaines algèbres combinatoires. N. Bergeron et H. Li donnent dans [BL09] une condition nécessaire à la catégorification, mais on est encore loin d'une classification systématique.

1.1.4 Groupes de Grothendieck

Cette section généralise et donne un cadre plus algébrique à ce qui a été dit dans la partie 1.1.2. On consultera la section suivante pour la définition précise d'algèbre de Hopf.

Définition 1.1.2. *Soit B une algèbre. On note \mathbf{F} le groupe abélien libre engendré par les symboles (M) pour chaque classe d'isomorphisme des B -module de type fini. On note \mathbf{F}_0 son sous-groupe généré par les $(M) - (L) - (N)$ à chaque fois que l'on a une suite exacte courte :*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0.$$

Le groupe de Grothendieck $G_0(B)$ est défini comme le quotient \mathbf{F}/\mathbf{F}_0 . On note $[V]$ l'image de (V) dans ce quotient.

Remarque 1.1.3. Le théorème de Jordan Hölder donne un sens précis à la décomposition d'une classe d'un module en classe de modules simples. En fait ces groupes de Grothendieck nous permettent de pallier au problème de la décomposition en simple dans le cas non semi-simple.

Proposition 1.1.4. *Soit $\{V_1, \dots, V_s\}$ une liste complète de modules simples non isomorphes. Alors :*

$$G_0(B) \cong \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}[V_i].$$

On se donne désormais $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ une algèbre graduée sur \mathbb{C} avec multiplication $\rho : A \otimes A \rightarrow A$. On considère les 5 axiomes suivants (voir [BL09] pour les détails) :

1. Pour tout $n \geq 0$, A_n est une algèbre de dimension finie avec multiplication interne et unité 1_n . $A_0 \simeq \mathbb{C}$.
2. La multiplication externe $\rho_{n,m} : A_n \otimes A_m \rightarrow A_{n+m}$ est un morphisme d'algèbre injectif envoyant $1_n \otimes 1_m$ sur 1_{n+m} .
3. A_{m+n} est un $A_m \otimes A_n$ -bimodule.
4. On a une relation entre la décomposition de A_{n+m} comme $A_n \otimes A_m$ -module et comme module- $A_n \otimes A_m$ [BL09].
5. On a un analogue de la formule de Mackey reliant induction et restriction [BL09].

Les trois premières conditions définissent une tour d'algèbres. On considère alors le groupe de Grothendieck $G_0(A) = \bigoplus_{n \geq 0} G_0(A_n)$. Ces conditions nous permettent de définir sur $G_0(A)$ une multiplication et une comultiplication comme suit :

$$[M][N] = \left[\text{Ind}_{A_n \otimes A_m}^{A_{m+n}} M \otimes N \right] \quad \text{et} \quad \Delta([N]) = \sum_{k+l=n} \left[\text{Res}_{A_k \otimes A_l}^{A_{k+l}} N \right].$$

Théorème 1.1.5 ([BL09]). *Si une algèbre graduée A sur \mathbb{C} vérifie les cinq conditions ci-dessus, alors $G_0(A)$ est une algèbre de Hopf graduée.*

En particulier $G_0(A)$ est une algèbre de Hopf qui a bien les bons coefficients de structure souhaités (par définition). Ceci montre que le problème est le sens inverse : étant donné une algèbre de Hopf, trouver la tour d'algèbre dont elle soit isomorphe au groupe de Grothendieck.

1.2 Algèbres de Hopf, Algèbres de Hopf sur des arbres

1.2.1 Généralités

On considère un triplet (A, \times, Δ) où A est un espace vectoriel (voire module), muni de deux applications linéaires :

$$\times : A \otimes A \longrightarrow A \text{ (produit),}$$

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A \text{ (coproduit).}$$

On suppose que $A = \text{Vect}(b_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ où Λ est une classe combinatoire (ensemble gradué dont les composantes homogènes sont de cardinalité finies). L'espace vectoriel A est une bigèbre si les deux opérations \times et Δ vérifient de plus la compatibilité suivante :

$$\Delta \circ \times = \times \circ (\Delta \otimes \Delta),$$

où le produit du membre de droite est le tenseur des produits du premier terme avec le troisième et du deuxième avec le quatrième. Sous l'hypothèse où il existe une fonction appelée antipode, et qui est toujours vérifiée dans les cas considérés, ces bigèbres sont alors des algèbres de Hopf.

1.2.2 Algèbre sur les permutations, FQSym

Nous considérons ici l'algèbre de Hopf FQSym (ou Algèbre de Malvenuto-Reteunauer (ref?)) sur les permutations. Pour cette algèbre $\Lambda = \mathfrak{S} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}_n$. On a une base privilégiée :

$$\text{FQSym} = (\text{Vect}(F_\sigma | \sigma \in \mathfrak{S}), \times, \Delta),$$

sur laquelle nous allons définir le produit et le coproduit.

Le produit

Notations 1.2.1. Soit $\tau \in \mathfrak{S} = \cup_n \mathfrak{S}_n$ et I un ensemble fini de \mathbb{N} . On note $\tau|_I$ la permutation obtenue en considérant l'ordre relatif des valeurs de τ dont les positions sont dans I . On note $\tau^{[I]}$ la permutation obtenue en considérant l'ordre relatif des valeurs de τ qui sont dans I . Par exemple, si $\tau = 23541$ alors $\tau|_{\{2,4,5\}} = 231$ et $\tau^{[\{2,4,5\}]} = 132$.

Définition 1.2.2. Le produit dans FQSym est défini par :

$$F_\sigma \times F_\tau = \sum_{\pi \in \sigma \sqcup \tau} F_\pi,$$

où $\sigma \sqcup \tau = \{\pi \in \mathfrak{S}_{n+m} | \pi^{[n]} = \sigma \text{ et } \pi^{[n+1, \dots, n+m]} = \tau\}$. Un produit de deux éléments de la base de taille n et m comprendra donc $\binom{n+m}{n}$ termes de taille $n+m$. Les coefficients de structure sont 0 ou 1.

Un exemple :

$$F_{21} \times F_{132} = F_{21354} + F_{23154} + F_{23514} + F_{23541} + F_{32154} + F_{32514} + F_{32541} + F_{35214} + F_{35241} + F_{35421}.$$

Le coproduit

Définition 1.2.3. Le coproduit dans FQSym est défini par :

$$\Delta(F_\pi) = \sum_{\pi \in \sigma * \tau} F_\sigma \otimes F_\tau,$$

où $\sigma * \tau = \{\pi \in \mathfrak{S}_{n+m} | \pi^{[n]} = \sigma \text{ et } \pi^{[n+1, \dots, n+m]} = \tau\}$. Dans le coproduit d'un élément de longueur n on a une somme de $\binom{n+1}{1} = n+1$ termes.

Un exemple :

$$\Delta(F_{35124}) = F_{35124} \otimes \varepsilon + F_{3412} \otimes F_1 + F_{231} \otimes F_{12} + F_{12} \otimes F_{123} + F_1 \otimes F_{4123} + F_\varepsilon \otimes F_{35124}.$$

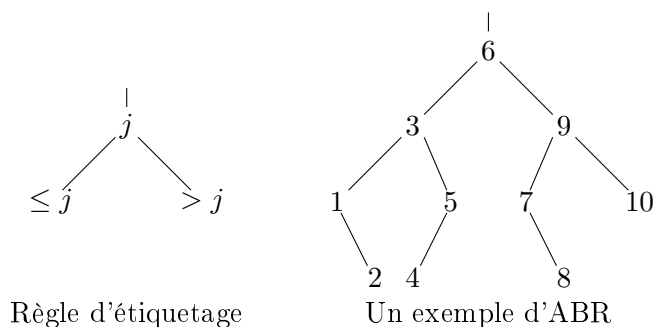
Proposition 1.2.4 ([MR95]). Ces deux lois donnent à FQSym une structure d'Algèbre de Hopf.

1.2.3 Algèbre de Loday-Ronco sur les arbres binaires

On détaille ici une algèbre de Hopf (qui est en fait une sous-algèbre de la précédente) que l'on veut catégorifier. Les parallèles avec le cas des tableaux de Young nous invitent à penser que cela devrait fonctionner.

Arbres binaires de recherche

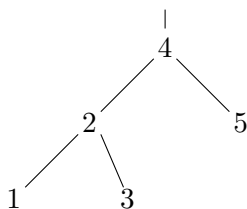
Un arbre binaire est un arbre enraciné, dirigé de bas vers le haut, tel que tout nœud a au plus deux fils, un fils gauche et un fils droit. Un arbre binaire de recherche (ABR) est un arbre dont les sommets sont étiquetés selon la règle suivante :



Un ABR est standard (ABRS) si ses sommets sont étiquetés par $1, \dots, n$. L'arbre ci-dessus est standard.

Le parcours infixe donne immédiatement une application des arbres binaires de recherche standards (ABRS) vers \mathfrak{S}_n . De plus si l'on se donne un ABR il y a une seule façon de le standardiser.

En fait on a une surjection naturelle κ de \mathfrak{S}_n vers les ABRS de taille n . Il existe différents algorithmes pour définir cette surjection, par exemple l'insertion dans un ABR dans le sens de lecture droite vers gauche. Si on se donne A un ABRS sa fibre $\kappa^{-1}(A)$ est l'ensemble des extensions linéaires de A , noté $\mathcal{L}(A)$, c'est-à-dire l'ensemble des extensions du poset sous-jacent. Par exemple les extensions linéaires de l'arbre suivant :



sont $\{13254, 31254, 51324, 53124, 15324, 35124, 13524, 31524\}$. Cet algorithme d'insertion n'est pas sans rappeler l'algorithme de Schensted sur les tableaux de Young [Ful97].

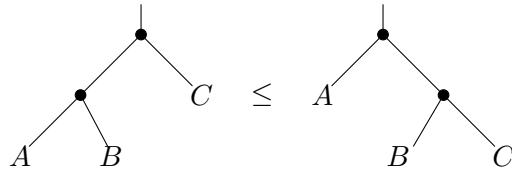
On a aussi une formule pour le nombre d'extensions linéaires d'un arbre A de taille n . En un sommet s du graphe, on appelle équerre de s le nombre $\text{eq}(s)$ d'éléments dominés par s en comptant s . On prouve alors par récurrence :

$$|\mathcal{L}(A)| = \frac{n!}{\prod_s \text{eq}(s)}.$$

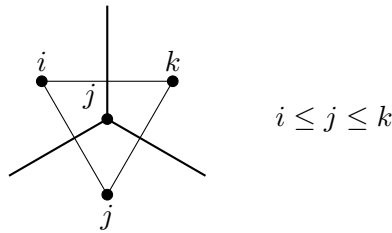
Cette formule nous rappelle également la formule des équerres des tableaux de Young [Ful97].

Ordre de tamari, triangulation et associaèdres

Définition 1.2.5. *L'ordre de tamari est une relation d'ordre partielle définie sur les arbres binaires. C'est la clôture transitive de la « rotation élémentaire » :*

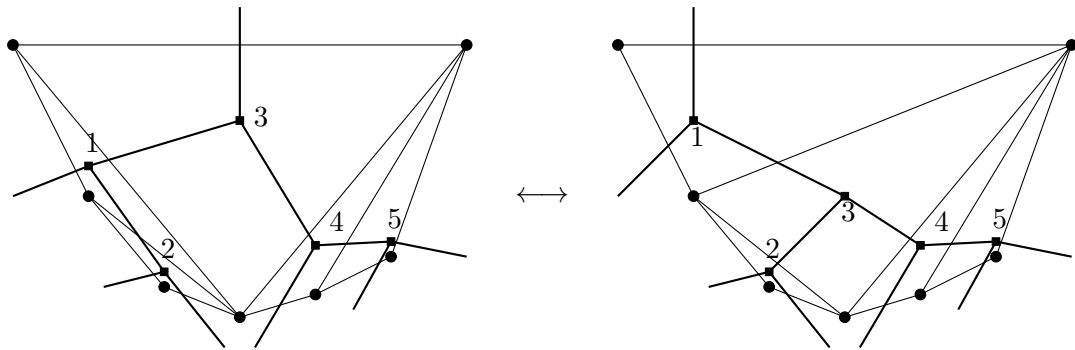


Proposition 1.2.6. *Les ABRS sont en bijection avec les triangulations d'un $(n+2)$ -gone. Pour ce faire on considère un $(n+2)$ -gone dont on a numéroté les sommets de 0 à $n+1$. On met le sommet 0 en $(0,0)$, le sommet $n+1$ en $(n+1,0)$ et les sommets i ($1 \leq i \leq n$) en abscisse i et de coordonnée négative pour obtenir un $(n+2)$ -gone convexe dans le demi-plan inférieur. A une triangulation on associe son arbre dual, orienté vers sa racine et étiqueté ainsi :*



Cette construction est bijective. De plus, les flips par pente croissante correspondent aux rotations droites de l'ordre de Tamari sur les AB. En particulier l'ordre de Tamari nous permet d'orienter l'associaèdre de Loday [Sta63, FR07].

Exemple 1.2.7. Voici un exemple de cette dualité.



Algèbre de Hopf, produit et coproduit

l'algèbre de Loday-Ronco est la sous-algèbre de Hopf de FQSym :

$$\text{LR} = (\text{Vect}(F_T | T \in \text{ABRS}), \times, \Delta),$$

avec :

$$F_T = \sum_{\sigma \in \mathcal{L}(T)} F_\sigma = \sum_{\kappa(\sigma)=T} F_\sigma.$$

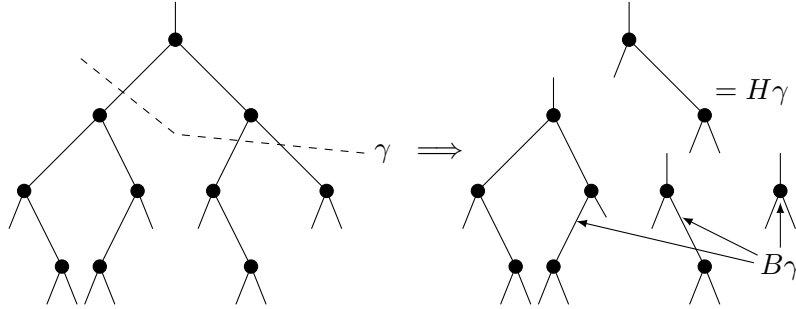
Théorème 1.2.8 ([LR98]). *LR est une sous-algèbre de Hopf de FQSym.*

Proposition 1.2.9. *Le produit dans LR s'exprime directement sur les arbres :*

$$F_T \times F_{T'} = \sum_{T \nearrow \bar{T}' \leq T'' \leq T \nwarrow \bar{T}'} F_{T''},$$

où \leq désigne l'ordre de Tamari sur les arbres binaires (voir section 1.2.3).

Définition 1.2.10. *On se donne T un arbre binaire. Une coupe γ de T est un choix d'une arête par branche verticale. On découpe alors T et le long de γ et on obtient deux parties : $H\gamma$ qui reste attachée à la racine et qui donne encore un arbre binaire, et une forêt $B\gamma$ constituées des branches obtenues de la sorte.*



Proposition 1.2.11. *Le coproduit dans LR s'exprime directement sur les arbres :*

$$\Delta F_T = \sum F_{T'} \otimes F_{T''},$$

où la somme est faite sur toutes les coupes γ de T , $T' = H\gamma$ et T'' est un élément qui apparaît dans le produit de gauche à droite des termes de $B\gamma$.

1.2.4 Algèbre de Loday-Ronco Duale

Passer d'une algèbre de Hopf à sa duale est en général aisé. La catégorification du dual entraîne donc celle du primal, ce qui motive cette section.

Dualité

On définit $\text{FQSym}^* = \text{Vect}(G_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{S} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}_n)$. On munit cet espace vectoriel d'une structure d'algèbre de Hopf avec les deux opérations suivantes :

$$G_\sigma \times G_\tau = \sum_{\pi \in \sigma * \tau} G_\pi,$$

$$\Delta G_\pi = \sum_{\pi \in \sigma \sqcup \tau} G_\sigma \otimes G_\tau.$$

Proposition 1.2.12. *On a un isomorphisme d'algèbre de Hopf :*

$$\begin{array}{ccc} \text{FQSym} & \rightarrow & \text{FQSym}^* \\ F_\sigma & \mapsto & G_{\sigma^{-1}} \end{array}.$$

On dit que FQSym et FQSym^* sont duales l'une de l'autre.

On considère alors un quotient de FQSym^* avec l'épimorphisme d'algèbre de Hopf suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{FQSym}^* & \twoheadrightarrow & \text{LR}^* \\ G_\sigma & \mapsto & G_T \quad \text{où } \sigma \in \alpha(T) \end{array} .$$

On a alors la suite d'applications suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{LR} & \longleftarrow & \text{FQSym} & \longleftrightarrow & \text{FQSym}^* & \longrightarrow & \text{LR}^* \\ T \mapsto \sum_{\sigma \in \alpha(T)} F_\sigma & & & F_\sigma \leftrightarrow G_{\sigma^{-1}} & & G_\sigma \mapsto G_T & \end{array} .$$

La composée est un isomorphisme d'algèbre de Hopf, LR^* est l'algèbre de Loday-Ronco duale.

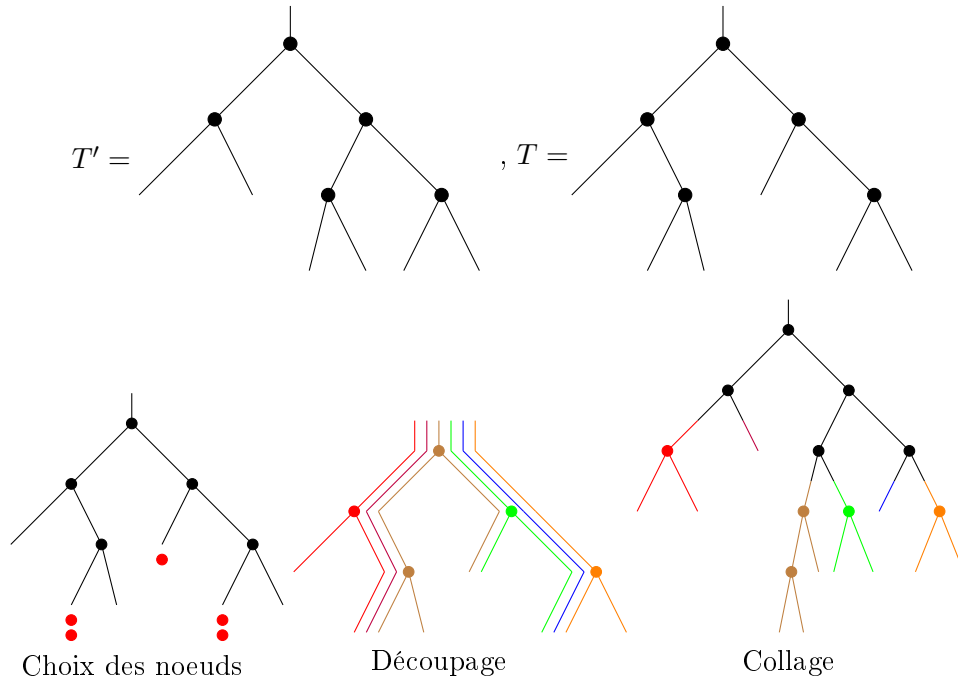
Produit

Proposition 1.2.13. Dans LR^* le produit s'obtient par :

$$G_T \times G_{T'} = \sum_{T'' \in I} G_{T''},$$

où chaque arbre de l'ensemble I est obtenu par la construction qui suit.

On suppose que l'arbre T' qui est sur n noeuds. On lui rajoute ses feuilles : il en a $n + 1$. L'arbre T a $n' + 1$ feuilles. On choisit (avec répétition possible) $n + 1$ positions dans ces $n' + 1$ feuilles (soit $\binom{n+n'+1}{n+1}$ possibilités) et on coupe alors T le long des branches depuis la racine, puis on greffe les branches obtenues sur les feuilles de T' . Voir l'exemple ci-dessous.

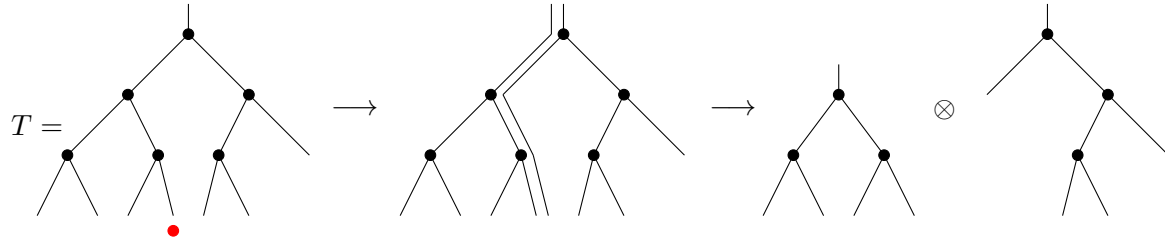


Coproduit

Proposition 1.2.14. Le coproduit dans LR^* s'exprime de la façon suivante :

$$\Delta G_T = \sum_{(T', T'') \in I} F_{T'} \otimes F_{T''},$$

où les couples dans I s'obtiennent de la façon suivante : on complète les feuilles de T , on en choisit une et on coupe le long de cette feuille ce qui nous donne deux arbres : T' et T'' .



1.3 Pistes de recherche

Suite aux recherches de ces dernières années sur la catégorification, l'objet de la thèse serait donc d'essayer de faire celle d'algèbres de Hopf combinatoires. Dans la famille des algèbres abordées par ce sujet, trois algèbres de Hopf ont déjà été catégorifiées. L'algèbre Sym des fonctions symétriques est associée à la tour d'algèbres $(\mathbb{K}\mathfrak{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [Mac95, Ful97], tandis que les deux algèbres QSym (algèbres des fonctions quasi symétriques) et NCSF (algèbres des fonctions symétriques non commutatives) sont deux groupes de Grothendieck obtenus à partir de la tour d'algèbres de Hecke à $q = 0$, $(H_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ [BL09].

Ce dernier exemple est source de différentes pistes de recherche. D'une part les algèbres de Hecke étant des déformations des algèbres de groupe $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n$, on peut essayer de déformer d'autres algèbres, ou de déformer encore les algèbres de Hecke pour faire la catégorification de LR, voire d'autres algèbres de Hopf. D'autre part, il faut noter que le cas de l'algèbre de Hecke à $q = 0$ donne une tour de monoïdes. La théorie de représentations des monoïdes étant assez bien connue [HST13], on pourrait chercher une tour de monoïdes pour LR, d'autant que l'on a déjà trouvé une tour de monoïdes réalisant tantôt le produit, tantôt le coproduit, mais pas encore les deux structures simultanément.

Enfin, on peut aussi chercher à catégorifier des généralisations des algèbres qui ont été présentées. Par exemple, des versions colorées de NCSF ont déjà été étudiées dans [HNT06]. On peut aussi considérer des versions signées des permutations, ce qui nous donne des arbres cambriens et l'algèbre cambrienne [LP13].

Chapitre 2

Curriculum Vitae

Joël GAY
911, Chemin de Tournod
01300 Belley
FRANCE

Tél. : 06 65 05 14 85
Courriel : joel.gay@ens.fr
Nationalité française
Né le 07 juin 1991 à Clichy-la-Garenne (92)

Formation

- 2013 - 2014** : Master 2 Mathématiques Fondamentales à Paris Diderot - *mention très bien, cours suivis : Représentations de groupes finis en caractéristique nulle, Groupes de réflexions complexes, Représentations d'Algèbres de Lie, Théorèmes de réductions aux quasi-simples, Groupes algébriques. Stage au Laboratoire d'Informatique de l'École Polytechnique sous la direction de Vincent PILAUD (note obtenue : 18).*
- 2012 - 2013** : Obtention de l'Agrégation de Mathématiques - *rang 8ème*
: Master 2 à l'ENS Cachan (Préparation à l'agrégation)
- 2011 - 2012** : Master 1 Mathématiques Fondamentales et Appliquées ENS Ulm
- 2010 - 2011** : Licence Mathématiques Fondamentales et Appliquées ENS Ulm
- 2010** : Entrée à l'École Normale Supérieure de la Rue d'Ulm
: Admission au concours des Écoles Normales Supérieures - *option Physique, rang 46ème (Ulm) ; option Chimie, rang 20ème (Cachan) ; rang 18ème (Lyon)*
: Admission au concours de l'École Polytechnique - *rang 19ème*
: Admission au concours des Mines - *rang 10ème*
: Admission au concours de l'École Centrale Paris - *rang 36ème*
: Admission au Concours Commun Polytechnique (C.C.P.) - *rang 2ème*
- 2008 - 2010** : Classes Préparatoires PCSI et PC* - *Lycée du Parc, Lyon*
- 2008** : Baccalauréat S option SVT spécialité mathématiques - *mention Très Bien*
- 2000 - 2008** : Scolarité au Lycée du Bugey, Ain (01), FRANCE

Exposés et Travaux

Mars-Septembre 2014 : Algèbres amassées et associaèdres généralisés - *Mémoire de master réalisé sous la direction de Vincent PILAUD*

Mars 2012 : Leçons de mathématiques : Processus de renouvellement entiers, et classification des groupes finis de réflexion

Juin 2010 : Partitions de l'unité - *Mémoire et exposé de la première année de la FIMFA, réalisé avec Gabriel LELLOUCH sous la direction d'Olivier BENOIST*

Chapitre 3

Mémoire de master

Algèbres amassées et associaèdres généralisés sous la direction de Vincent PILAUD.

Introduction

Les algèbres amassées ont été introduites par Fomin et Zelevinsky [FZ02] dans le but de comprendre, en termes algébriques et combinatoires, la structure des « bases duales canoniques » dans des anneaux de coordonnées pour différentes variétés algébriques reliées à des groupes semi-simples. Il s'est avéré cependant que ces algèbres étaient liées à différents objets de nature géométriques, tels les associaèdres généralisés [CFZ02], et par là-même à des objets bien davantage combinatoires, tels les complexes de sous-mots [CLS14].

La première partie de ce mémoire propose une/des définition(s) d'une algèbre amassée avec une approche par l'exemple des triangulations d'un n -gone [FR07]. De cet exemple nous déduisons une définition plus générale, et une première propriété fondamentale : les variables d'amas ne sont pas seulement des fractions rationnelles, mais des polynômes de Laurent en les variables de l'amas initial [FZ02].

La deuxième partie est consacrée à un résultat fondamental prouvé dans [FZ03a] : la classification des algèbres amassées de type fini. Il se trouve que celle-ci suit la classification des groupes de Weyl. Différentes interprétations géométriques pour les algèbres amassées de type A_n , B_n , C_n et D_n sont aussi données dans cette partie.

La troisième partie expose la construction des associaèdres généralisés de [CFZ02]. Il s'agit de polytopes dont les facettes correspondent aux variables d'amas et les sommets correspondent aux amas de l'algèbre amassée. Ils généralisent l'associaèdre généralisé classique.

La partie suivante présente les complexes de sous-mots, les polytopes de briques [CLS14, PS13], et leurs liens avec les complexes d'amas et les associaèdres généralisés. Elle est suivie de la cinquième et dernière partie, la plus courte, qui offre quelques pistes de réflexions sur le degré de compatibilité dans les complexes de sous-mots et leurs possibles applications géométriques [CP14].

Enfin, deux annexes sur les groupes de Coxeter et les notions de géométrie discrète sont à consulter sans modération.

Tout au long du texte on n'attribue pas toujours chaque résultat à leurs auteurs. Certaines parties de ce mémoire, écrites en taille plus petite, peuvent être passées en première lecture. Elles concernent des preuves ou des propriétés moins essentielles et ne sont pas indispensables pour se faire une idée générale du sujet.

Je tiens à remercier notamment Vincent Pilaud, mon directeur de mémoire, pour sa disponibilité, son aide, ses conseils et sa patience à me lire et me relire, ainsi que pour avoir créé un groupe de travail pour que je puisse exposer mes avancées.

Je veux remercier T. Manneville pour tous les échanges et les discussions que nous avons pu avoir, et son point de vue complémentaire, ainsi que E. Balandreau, L. Malo, Y. Palu, P-G. Plamondon qui étaient tous membres de ce groupe de travail et m'ont permis de progresser en me posant beaucoup de questions très pertinentes.

3.1 Définition(s ?) d'algèbres amassées

3.1.1 L'exemple des triangulations

Triangulations dans un $(n + 3)$ -gone

On se fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ dans cette partie et on s'intéresse à un $(n+3)$ -gone. Une *dissection* du $(n + 3)$ -gone est un ensemble de diagonales qui ne se croisent pas deux à deux. Une dissection maximale est une *triangulation*. Une triangulation découpe le $(n + 3)$ -gone en triangles et possède n diagonales.

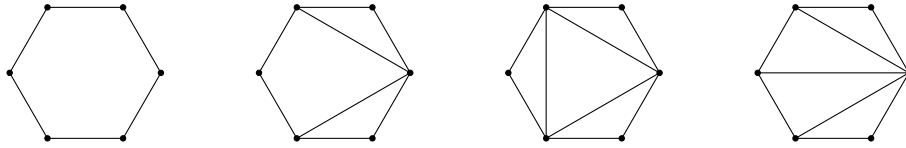


FIGURE 3.1.1 – Un 6-gone (hexagone), une dissection et les deux triangulations qui la raffinent.

On se fixe T une triangulation. On numérote les n diagonales de 1 à n et les $n + 3$ côtés de $n + 1$ à $2n + 3$. Cette numérotation nous permet de définir la *matrice d'adjacence des arêtes*, notée \tilde{B} , de taille $(2n + 3) \times n$ par :

$$\tilde{b}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont deux arêtes d'un même triangle avec } j \text{ qui suit } i \text{ dans le sens horaire,} \\ -1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont deux arêtes d'un même triangle avec } j \text{ qui suit } i \text{ dans le sens antihoraire,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une autre formulation de la première règle est que l'on amène la diagonale i sur la diagonale j par une rotation dans le sens direct autour de leur sommet commun. La sous-matrice B de \tilde{B} , formée des n premières lignes et colonnes, s'appelle la *partie principale* de \tilde{B} .

Exemple 3.1.1.

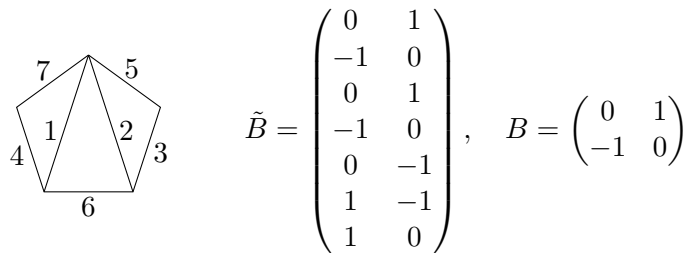


FIGURE 3.1.2 – Une triangulation avec sa matrice d'adjacence.

Flips dans une triangulation

On appelle *flip* dans une triangulation T d'un n -gone (ou échange) le fait de changer une diagonale dans un quadrilatère de la triangulation. Plus précisément si l'on prend une diagonale, elle est l'une des deux diagonales du quadrilatère formé par les deux triangles qui la contiennent. Le flip correspond à l'action de changer de diagonale dans ce quadrilatère et de considérer la nouvelle triangulation du n -gone initial.

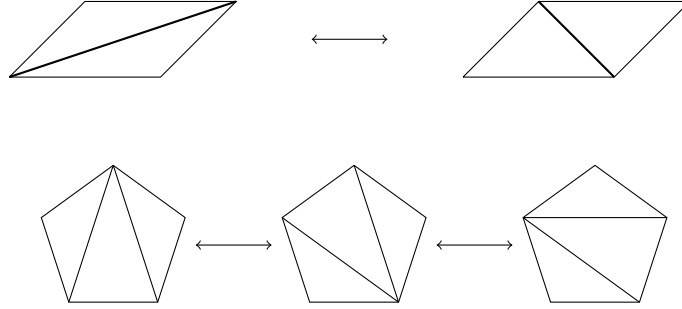
Exemple 3.1.2.

FIGURE 3.1.3 – Une série de flips.

On s'intéresse alors à l'effet qu'ont les flips sur les matrices d'adjacence des arêtes par le processus de mutation de matrices.

Mutations de matrices

On se donne $\tilde{B} = (b_{ij})_{i,j}$ et $\tilde{B}' = (b'_{ij})_{i,j}$ deux matrices entières de taille $m \times n$, et $k \leq \max(n, m)$ un entier. On dit que \tilde{B}' est obtenue à partir de \tilde{B} en faisant une mutation dans la direction k , et on note $\mu_k(\tilde{B}) = \tilde{B}'$, si :

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & \text{si } k \in \{i, j\}, \\ b_{ij} + |b_{ik}|b_{kj} & \text{si } k \notin \{i, j\} \text{ et } b_{ik}b_{kj} > 0, \\ b_{ij} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 3.1.3. *La mutation de matrices μ_k est une involution.*

Démonstration. Soit $B = (b_{ij})$ une matrice, $B' = (b'_{ij}) = \mu_k(B)$ et $B'' = (b''_{ij}) = \mu_k(B') = \mu_k^2(B)$. Soit i, j des indices de ligne et de colonne dans la matrice. Si $k \in \{i, j\}$: $b''_{ij} = -b'_{ij} = b_{ij}$. Par ailleurs on a l'équivalence $b'_{ik}b'_{kj} > 0 \iff b_{ik}b_{kj} > 0$. Dès lors si $b'_{ik}b'_{kj} > 0$ on a :

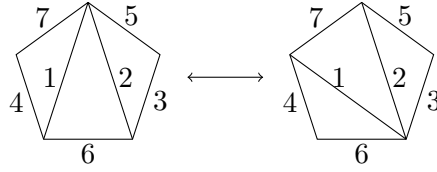
$$b''_{ij} = b'_{ij} + |b'_{ik}|b'_{kj} = b_{ij} + |b_{ik}|b_{kj} + |b'_{ik}|b'_{kj} = b_{ij} + |b_{ik}|b_{kj} - |b_{ik}|b_{kj} = b_{ij}.$$

Le dernier cas est évident au vu de l'équivalence précédente. □

Le lemme suivant nous dit que les mutations de matrice correspondent bien aux flips des triangulations.

Lemme 3.1.4. *Si T et T' sont deux triangulations du $(n+3)$ -gone, associées respectivement aux matrices d'adjacence des arêtes \tilde{B} et \tilde{B}' et que l'on passe de T à T' en flippant la diagonale numérotée k , alors $\tilde{B}' = \mu_k(\tilde{B})$.*

Exemple 3.1.5. Le flip

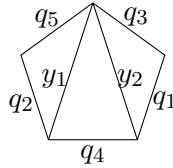


Correspond à la mutation de matrice :

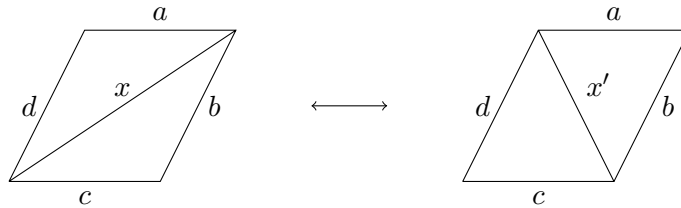
$$\mu_k \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Variables associées à une diagonale

On se donne T_0 une triangulation du $(n + 3)$ -gone. On associe des variables y_1, \dots, y_n aux diagonales de T_0 et q_1, \dots, q_{n+3} aux côtés du $(n + 3)$ -gone.



On veut alors associer une variable aux $\binom{n+1}{2}$ diagonales restantes, qui sera une fraction rationnelle en $y_1, \dots, y_n, q_1, \dots, q_{n+3}$, par flips successifs et la loi de transfert suivante :



où les variables x et x' sont liées par la relation $xx' = ac + bd$.

Lemme 3.1.6. *La variable ainsi obtenue est indépendante de la suite de flips choisie.*

Démonstration. Cette ébauche de preuve est tirée de [FR07, p.38]. Elle utilise les coordonnées de Plücker. On se donne une matrice $z = (z_{ij})$ de taille $2 \times (n + 3)$. Pour tout $1 \leq k < l \leq n + 3$ on note :

$$P_{kl} = \det \begin{pmatrix} z_{1k} & z_{1l} \\ z_{2k} & z_{2l} \end{pmatrix}$$

le mineur 2×2 correspondant aux colonnes k et l . On vérifie aisément les relations de Plücker :

$$P_{ik}P_{jl} = P_{ij}P_{kl} + P_{il}P_{jk}.$$

On reconnaît là la relation d'échange ci-dessus. On se donne T_0 une triangulation initiale et nos variables associés aux côtés et aux diagonales. On numérote les sommets de 1 à $n + 3$. On peut alors se construire directement (par récurrence) une matrice dont les mineurs P_{kl} tels que l'arête (k, l) est dans T_0 valent la variable associée à cette arête. Comme les relations d'échange sont les mêmes, on en déduit que la fonction rationnelle associée à chaque diagonale (i, j) est égale au mineur P_{ij} . \square

Remarque 3.1.7. Il est important de noter que l'on associe à une variable une diagonale et non à une numérotation sur les diagonales. Par exemple le cycle de la figure 3.1.4 inverse le numéro 1 et 2 de la diagonale si l'on considère toujours qu'un flip remplace la diagonale i par une diagonale i . Mais la variable d'amas y_1 est différente de y_2 !

Exemple 3.1.8. Le pentagone, $n = 2$.

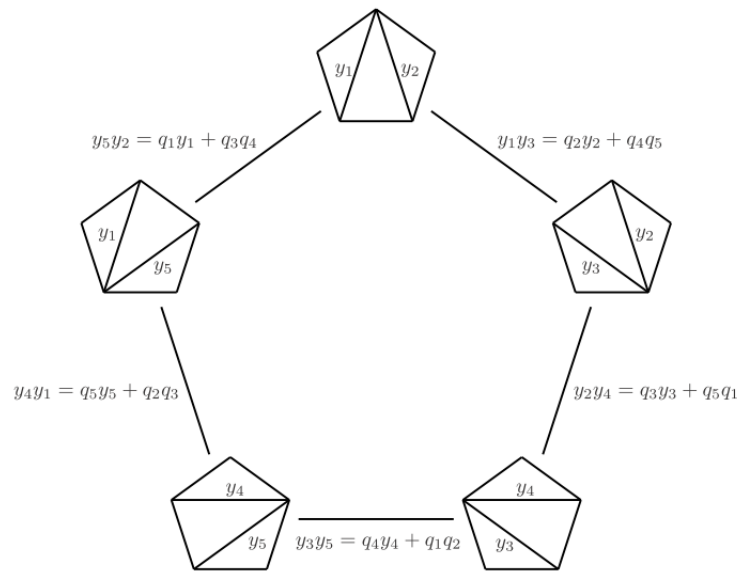


FIGURE 3.1.4 – Les flips dans le Pentagone. Image extraite de [FR07].

On a les relations suivantes :

$$y_3 = \frac{q_2 y_2 + q_4 q_5}{y_1}$$

$$y_4 = \frac{q_3 q_2 y_2 + q_3 q_4 q_5 + q_5 q_1 y_1}{y_1 y_2}$$

$$y_5 = \frac{q_3 q_4 + q_1 y_1}{y_2}$$

On remarque sur ce cas particulier qu'effectivement le chemin de flip parcouru ne change pas les valeurs des variables. Ainsi, on peut vérifier que $y_1 = \frac{q_5 y_5 + q_3 q_3}{y_1}$.

On remarque surtout que ces variables sont non seulement des fractions rationnelles en les variables initiales, mais en fait des polynômes de Laurent ! C'est le phénomène de Laurent dont nous parlerons dans la partie 3.1.3.

3.1.2 Une définition

Cette étude préliminaire du cas des flips des triangulations nous amène à la notion plus générale d'algèbre amassée introduite par S. Fomin et A. Zelevinsky dans [FZ02]. Reformulons ce que l'on a vu jusque là. On pose $m = 2n + 3$ et on se donne une triangulation T du $(n + 3)$ -gone. On numérote les n diagonales de 1 à n , et les $m - n$ côtés de $n + 1$ à m . On associe m variables x_1, \dots, x_m à chacune de ces arêtes selon la numérotation.

Si deux triangulations T et T' se déduisent l'une de l'autre simplement par un flip de la diagonale k on obtient un nouvel ensemble de m variables par les relations :

$$\begin{cases} x_i = x'_i & \forall i \neq k, \\ x_k x'_k = \prod_{i, b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{i, b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}} & \text{si } i = k. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

On a noté $B = (b_{ij})$ la matrice d'adjacence des arêtes de T . On remarque d'une part que la dernière relation ne change pas si l'on considère B ou $\mu_k(B)$ et d'autre part que les variables associées aux côtés, appelées « variables gelées », restent inchangées par mutation.

On donne maintenant un cadre plus général. On se donne $n \leq m \in \mathbb{N}^*$ et l'on considère $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(X_1, \dots, X_m)$ un corps de fractions rationnelles en n variables sur \mathbb{Q} . Une algèbre amassée \mathcal{A} est une algèbre engendrée dans \mathcal{F} par un ensemble de générateurs défini à partir d'une « graine initiale » par « mutation de graine ». Les définitions plus précises sont les suivantes.

Définition 3.1.9. *On appelle graine une paire (X, \tilde{B}) où :*

1. $x = (X_1, \dots, X_m)$ est un ensemble de m générateurs de \mathcal{F} algébriquement indépendants divisé en un amas $\{x_1, \dots, x_n\}$, et un ensemble de variables gelées $\{x_{n+1}, \dots, x_m\}$.
2. $\tilde{B} = (b_{ij})$ est une matrice de taille $m \times n$ dont la partie principale B vérifie les conditions équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} B \text{ antisymétrisable} &\Leftrightarrow \exists D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}, d_i > 0, \text{ tel que } DBD^{-1} \text{ antisymétrique} \\ &\Leftrightarrow \exists \delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } \delta_i b_{ij} = -\delta_j b_{ji}, \forall i, j \in [n]. \end{aligned}$$

Remarque 3.1.10. L'équivalence entre les deux dernières assertions est un simple calcul. En particulier une matrice antisymétrisable est à signes antisymétriques c'est-à-dire que les coefficients b_{ij} et b_{ji} sont de signes opposés.

Définition 3.1.11. *Pour toute graine initiale (X, \tilde{B}) et tout $k \in [n]$, on appelle mutation de graine dans la direction k la transformation μ_k définie par :*

$$\mu_k(x, \tilde{B}) = \left((X \cup \{x_{k'}\}) \setminus \{x_k\}, \mu_k(\tilde{B}) \right),$$

où l'on définit $x_{k'}$ à partir de X par la relation (3.1.1).

Remarque 3.1.12. Cette mutation transforme une graine en une autre. En effet, un calcul simple nous montre que si B est antisymétrisable, alors $\mu_k(B)$ aussi par la même matrice D .

Remarque 3.1.13. On remarque que l'ensemble $c = \{x_{n+1}, \dots, x_m\}$ des variables gelées est invariant au cours des mutations de graines. On renvoie à l'exemple du pentagone.

On obtient un graphe de mutations dont les sommets sont les graines, et les arêtes les mutations. On indique sur l'arête la direction de mutation. On note S ce graphe. C'est un graphe n -régulier car on peut toujours muter dans les n directions possibles.

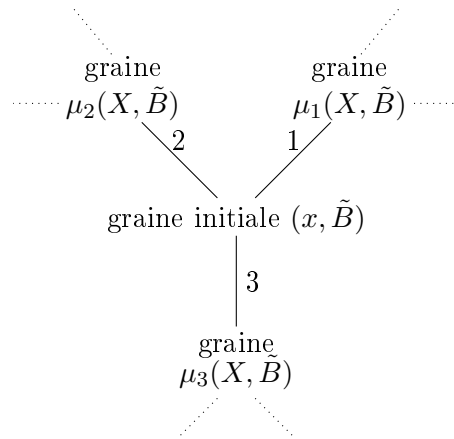


FIGURE 3.1.5 – Graphe des mutations.

Définition 3.1.14. On note \aleph l'union de tous les amas de S . Ses éléments sont les variables d'amas. L'algèbre amassée $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S)$ est l'algèbre générée dans \mathcal{F} par toutes les variables d'amas et les variables gelées.

Remarque 3.1.15. On peut aussi choisir d'ajouter les inverses des variables gelées dans l'ensemble générateur, ce que l'on fait d'ailleurs dans la prochaine section.

3.1.3 Le phénomène de Laurent

Dans cette partie on s'intéresse plus généralement aux monômes qui interviennent dans les relations d'échanges. On note \mathbb{P} l'ensemble des coefficients. Nous reviendrons plus en détail sur le choix de \mathbb{P} lors de la classification, pour l'instant nous considérons qu'il s'agit d'un groupe abélien, noté multiplicativement, et sans torsion, qui va être typiquement le groupe des monômes en les variables gelées. On considère alors $\mathbb{Z}\mathbb{P}$, le module libre engendré par \mathbb{P} . Il s'agit donc d'un anneau intègre. On dira qu'une algèbre amassée est à coefficients dans $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ si tous les monômes intervenant dans les relations d'échanges sont à coefficients dans $\mathbb{Z}\mathbb{P}$.

Définition 3.1.16. Un polynôme de Laurent à coefficient dans $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ en les variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ est de la forme :

$$L(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha \in S} u_{\alpha}(L) X^{\alpha} = \frac{\sum_{\alpha \in S} u_{\alpha}(L) X^{\alpha - \Lambda S}}{X^{\Lambda S}},$$

où S est un sous-ensemble de \mathbb{Z}^n , appelé support de L et noté $S(L)$, où les $u_{\alpha}(L)$ sont dans $\mathbb{Z}\mathbb{P}$, et où l'on note $X^{\alpha} = \prod_i x_i^{\alpha_i}$.

Le théorème suivant est le cœur de [FZ02].

Théorème 3.1.17. *Dans une algèbre amassée (à coefficients dans $\mathbb{Z}\mathbb{P}$), toute variable d'amas s'exprime comme un polynôme de Laurent à coefficients dans $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ en fonction des variables d'un amas donné.*

La fin de cette partie est consacrée à la preuve de ce résultat, essentiellement tirée de [FZ02]. La remarque 3.1.23 souligne que la définition des mutations de matrice est en fait imposée par le phénomène de Laurent.

On se donne t un sommet du graphe des mutations et on notera $X(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ l'amas associé, et $\mathcal{L}(t)$ l'algèbre des polynômes de Laurent $\mathbb{Z}\mathbb{P}[x_1(t), x_1(t)^{-1}, \dots, x_n(t), x_n(t)^{-1}]$.

On se fixe deux sommets du graphe t_0 et t . Pour prouver le théorème il nous faut donc montrer que $X(t) \in \mathcal{L}(t_0)$. On sait que le graphe des mutations est connexe et n régulier. On trouve donc de t_0 à t un chemin de la forme :

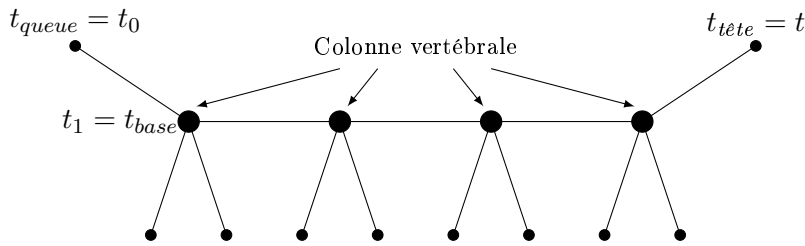


FIGURE 3.1.6 – La chenille $\mathbb{T}_{4,4}$.

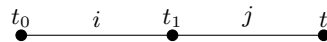
On note $\mathbb{T}_{n,m}$ ce chemin, où m est le nombre de sommets dans la « colonne vertébrale » de cette « chenille ».

Faisons une première étude :

- Si $m = 0$: alors t_0 et t sont voisins : le résultat est clair car $n - 1$ variables ne changent pas, et la relation d'échange assure que la dernière variable est bien un polynôme de Laurent :

$$xx' = P(X(t_0)), \text{ avec } P \text{ une somme de deux monômes.}$$

- Si $m = 1$ on raisonne de même : la situation est la suivante :

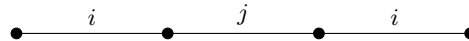


avec nécessairement $i \neq j$ comme il n'y a qu'une seule arête étiquetée i partant de t_1 . Dès lors on a immédiatement :

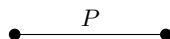
$$X(t) \setminus \{x_i(t), x_j(t)\} = X(t_0) \setminus \{x_i(t_0), x_j(t_0)\}.$$

De plus $x_i(t) = x_i(t_1) \in \mathcal{L}(t_0)$ par le cas $m = 0$. Et $x_j(t) = \frac{P(X(t_1))}{x_j(t_0)}$ car $x_j(t_0) = x_j(t_1)$, avec P un simple polynôme, donc $x_j(t)$ est aussi dans $\mathcal{L}(t_0)$.

Cette étude préliminaire montre que le problème intervient dès que l'on va refaire une mutation que l'on a déjà faite. En fait on verra dans la preuve que l'on pourra se contenter de s'intéresser à la situation :

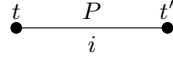


Pour cette preuve, nous nous plaçons dans un cadre plus général. On considère toujours que nos coefficients sont pris dans $\mathbb{Z}\mathbb{P}$. À toute arête de $\mathbb{T}_{n,m}$ on associe un polynôme non nul $P \in \mathbb{N}\mathbb{P}[x_1, \dots, x_n]$, appelé *polynôme d'échange* et noté graphiquement :



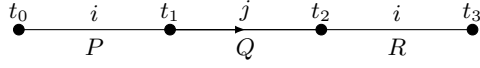
Cette notation sous-entend que la relation d'échange ne dépend pas du sens de l'échange mais simplement de qui est échangé. On avait déjà observé cela dans le cas des flips des triangulations. Cette notion de polynôme d'échange va donc généraliser cela. On suppose de plus que les polynômes d'échanges du graphe $\mathbb{T}_{n,m}$ vérifient les deux conditions suivantes :

Condition (1) Dans la situation :



Alors P ne dépend pas de x_i (au sens où $P(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = P$ et de plus, pour tout $j \in [n]$, x_j ne divise pas P).

Condition (2) Dans la situation :



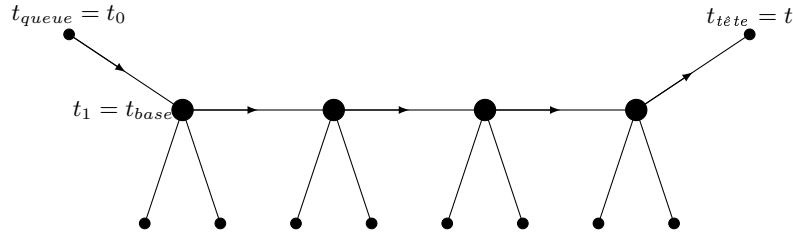
Alors on a :

$$R = C.P \left(x_1, \dots, x_{j-1}, \frac{Q_0}{x_j}, x_{j+1}, \dots, x_n \right),$$

où l'on note $Q_0 = Q(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$, et où C est un polynôme de Laurent en $\{x_1, \dots, x_n\}$ à coefficients dans $\mathbb{N}\mathbb{P}$.

Remarque 3.1.18. On a orienté entre t_1 et t_2 pour éviter d'imposer des conditions de symétrie entre les polynômes de Laurent C intervenant ici et celui obtenu si on considère le chemin de t_3 vers t_0 .

Dès lors on oriente notre chenille :



On note pour tout sommet t de la colonne vertébrale :

$$\mathcal{P}(t) = \{\text{polynômes d'échange associé aux arêtes de } t\}.$$

On note aussi \mathcal{C} l'ensemble des polynômes de Laurent intervenant dans la condition (2) pour tout choix de t_0, \dots, t_3 conforme. On note alors $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}\mathbb{P}$ le sous-anneau unitaire engendré par les coefficients des polynômes de $\mathcal{P}(t_{base}) \cup \mathcal{C}$.

De même que pour une algèbre amassée, à tout sommet $t \in \mathbb{T}_{n,m}$ on associe un amas $X(t)$ soumis aux relations :

$$t \xrightarrow[i]{P} t' \implies \begin{cases} x_j = x'_j & \forall j \neq i, \\ x_i(t)x_i(t') = P(X(t)) & \text{si } i = j, \end{cases}$$

où $P(X(t)) = P(x_1(t), \dots, x_n(t))$.

On obtient ainsi comme avant une algèbre amassée plus générale, appelée *algèbre à phénomène de Laurent*.

Théorème 3.1.19. *Sous les conditions sur les polynômes d'échanges (1) et (2), tout élément de $X(t_{tete})$ est un polynôme de Laurent en l'amas $X(t_0)$ à coefficients dans \mathbb{A} .*

Remarque 3.1.20. La preuve de ce théorème nous donnera alors une preuve du théorème annoncé en début de partie. En effet :

- Le graphe $\mathbb{T}_{n,m}$ est un sous-graphe du graphe des mutations.
- $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}\mathbb{P}$
- Les conditions (1) et (2) sont plus générales que ce que l'on a d'habitude pour nos algèbres amassées classiques. La preuve de ce résultat est faite à la fin de la preuve du théorème. Il faut essentiellement comprendre que ces deux conditions vont simplement être vérifiées à cause du choix sur les mutations de matrice.

Démonstration du théorème 3.1.19. Nous faisons d'abord une première remarque. On s'est donné $\mathcal{P}(t_{base})$ et tout \mathcal{C} , ainsi par la relation (2) on en déduit que l'on peut avoir tous les polynômes par propagation.

De plus, si l'on se place dans le cadre de la condition (2), comme tous nos polynômes sont à coefficients dans $\mathbb{N}\mathbb{P}$, et que le polynôme R de l'équation (2) s'exprime en fonction des données sans soustraction, on en déduit que le support de R ne dépend que du support de \mathcal{C} et de P : il n'y a pas de simplification possible.

Une application immédiate et cruciale est que \mathcal{C} ne dépend pas de x_i et est en fait un simple polynôme en x_j . Nous faisons un changement de coefficient. On note :

$$\mathbb{A} = \mathbb{Z}[u_\alpha(L), \forall L \in \mathcal{P}(t_{base}) \cup \mathcal{C}, \forall \alpha \in S(L)].$$

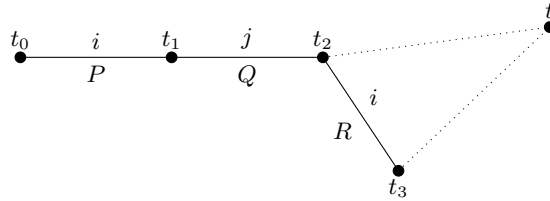
Ce nouvel anneau \mathbb{A} est maintenant l'anneau de nos coefficients. Par la condition (2) comme on l'a déjà remarqué ces coefficients sont en fait suffisants pour avoir tous les coefficients de tous les polynômes d'échange. Il est important de bien noter que dans cet anneau on considère tous les coefficients des polynômes intervenant comme des variables algébriquement indépendantes les unes des autres : on a universalisé les coefficients!

On notera désormais pour t un sommet du graphe de mutation $\mathcal{L}(t)$ l'anneau des polynômes de Laurent en $X(t)$ à coefficients dans \mathbb{A} .

Notre objectif est donc de montrer que $X(t_{tête}) \in \mathcal{L}(t_0) = \mathcal{L}(t_{queue})$. On procède par récurrence sur la longueur m de la « colonne vertébrale ». On a déjà observé le résultat lorsque $m = 0$ ou $m = 1$. Supposons que $m \geq 2$ et que le théorème est vrai pour toute chenille de colonne vertébrale strictement plus petite.

L'étude préliminaire nous a montré qu'il y avait un problème à partir d'un moment où l'on mute une variable qui avait déjà été mutée une fois. En fait on va montrer, avec le lemme suivant, que l'on peut conclure dès que l'on a réglé le premier problème de mutation du type " $i - j - i$ ".

Plus précisément on se place dans la situation ci dessous. On note $t_0 = t_{queue}$, $t_1 = t_{base}$ et $t = t_{tête}$. On considère :



On a mis des pointillés entre t et t_2 d'une part, t et t_3 d'autre part car on ne sait pas précisément comment t est reliée à cette partie du dessin et ce n'est pas ce qui importe.

Lemme 3.1.21. *Dans la situation décrite ci-dessus on a $X(t_1)$, $X(t_2)$ et $X(t_3) \in \mathcal{L}_0$.*

De plus $\text{pgcd}(x_i(t_1), x_i(t_3)) = \text{pgcd}(x_i(t_1), x_j(t_3)) = 1$ où le pgcd est calculé dans l'anneau factoriel \mathcal{L}_0 .

Admettons un instant le lemme et montrons comment l'on conclut le théorème. Il nous faut donc montrer que $X(t) \in \mathcal{L}(t_0) = \mathcal{L}_0$. L'hypothèse de récurrence nous donne déjà que $X(t) \in \mathcal{L}(t_1)$ et que $X(t) \in \mathcal{L}(t_3)$.

Soit alors $x \in X(t)$. C'est un polynôme de Laurent en les variables de $X(t_1)$, c'est-à-dire aussi en celle de $X(t_0)$ sauf $x_i(t_0)$ qui est remplacé par $x_i(t_1)$. La variable $x_i(t_1)$ est donc la seule pour laquelle on ne sait pas si la mutation va laisser x exprimé comme polynôme de Laurent en $X(t_0)$. Écrivons le développement de x selon $x_i(t_1)$ dans cette base :

$$x = \sum_{n \geq -a} g_n x_i(t_1)^n,$$

avec $a \geq 0$ (x est un polynôme de Laurent) et g_n ne dépendant pas de $x_i(t_1)$. C'est donc un polynôme de Laurent en $X(t_1) \setminus \{x_i(t_1)\}$ donc un élément de \mathcal{L}_0 comme toutes ces variables sont dans les deux amas. Dès lors on peut réécrire :

$$x = \frac{f}{x_i(t_1)^a}, \text{ avec } f \in \mathcal{L}_0.$$

On procède au même raisonnement en écrivant que $x \in \mathcal{L}(t_3)$, mais cette fois-ci il nous faut contrôler les deux variables $x_i(t_3)$ et $x_j(t_3)$. On écrit donc :

$$x = \sum_{\substack{n \geq -b \\ n' \geq -c}} g_{n,n'} x_i(t_3)^n x_j(t_3)^{n'}.$$

Le même raisonnement nous donne que les $g_{n,n'}$ sont dans \mathcal{L}_0 et donc on a :

$$x = \frac{g}{x_i(t_3)^b x_j(t_3)^c}, \text{ avec } g \in \mathcal{L}_0.$$

Par ailleurs le résultat sur les pgcd du lemme nous donne aussi :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pgcd}(x_i(t_1), x_i(t_3)) = 1 \\ \text{pgcd}(x_i(t_1), x_j(t_3)) = 1 \end{array} \right\} \implies \text{pgcd}(x_i(t_1), x_i(t_3)x_j(t_3)) = 1.$$

Ainsi $x = \frac{f}{\alpha} = \frac{g}{\beta}$ avec $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$. L'anneau des polynômes de Laurent n'est pas principal (on ne peut utiliser le théorème de Bézout) mais factoriel donc on utilise le lemme de Gauss pour déduire qu'il existe $h \in \mathcal{L}_0$ tel que $f = \alpha h$ et donc $x = h \in \mathcal{L}_0$.

Il reste donc à prouver le lemme. □

Démonstration du lemme 3.1.21. Le raisonnement fait pour $m = 1$ et $m = 2$ nous donne déjà que $X(t_1), X(t_2) \in \mathcal{L}_0$, ainsi donc que $X(t_3) \setminus \{x_i(t_3)\}$. Il suffit donc de montrer que $x_i(t_3) \in \mathcal{L}_0$.

On note $x = x_i(t_0)$, $y = x_j(t_0) = x_j(t_1)$, $z = x_i(t_1) = x_i(t_2)$, $v = x_j(t_2) = x_j(t_3)$ et $u = x_i(t_2)$. On met toutes les autres variables dans les coefficients (ce qui ne change pas la suite du raisonnement car elles sont dans \mathcal{L}_0 , mieux dans $X(t_0)$ donc inversibles dedans!)

On est dans la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} t_0 & & i & & t_1 & & j & & t_2 & & i & & t_3 \\ \bullet & & & & \bullet & & & & \bullet & & & & \bullet \\ x, y & & P & & y, z & & Q & & z, v & & R & & u, v \end{array}$$

Il nous faut montrer :

- (i) $v \in \mathcal{L}_0$
- (ii) $\text{pgcd}(z, u) = 1$
- (iii) $\text{pgcd}(z, v) = 1$

On va montrer ces trois points dans cet ordre.

- (i) Comme P ne dépend pas de x_i : $P = P(y)$. De même $Q = Q(z)$ et $R = R(u)$. La relation (2) nous donne alors :

$$R(u) = C(u)P\left(\frac{Q(0)}{u}\right), \quad (*)$$

avec, comme on l'a vu dans les préliminaires de la preuve, C qui est un vrai polynôme en u et qui ne dépend pas de x_i . On écrit nos trois relations :

$$zx = P(y), \quad uy = Q(z), \quad vz = R(u).$$

On en déduit :

$$v = \frac{R\left(\frac{Q(z)}{y}\right)}{z} = \frac{R\left(\frac{Q(z)}{y}\right) - R\left(\frac{Q(0)}{y}\right)}{z} + \frac{R\left(\frac{Q(0)}{y}\right)}{z}.$$

Montrons que ces deux termes sont dans \mathcal{L}_0 pour conclure le premier point. Par la relation (*), le second terme est :

$$\frac{R\left(\frac{Q(0)}{y}\right)}{z} = C\left(\frac{Q(0)}{z}\right) \frac{P(y)}{z} = C\left(\frac{Q(0)}{z}\right) x.$$

Il est clair que $Q(0) \in \mathcal{L}_0$, ainsi que $\frac{1}{y}$ par définition de \mathcal{L}_0 . Donc $\frac{Q(0)}{y}$ aussi. Par ailleurs C est un simple polynôme en sa variable u , et il est à coefficients dans \mathbb{A} (et aussi des polynômes de Laurent en les variables initiales aux indices différents de i et j) donc, par stabilité par somme et produit on a aussi $C\left(\frac{Q(0)}{z}\right) \in \mathcal{L}_0$. Le second terme est donc bien dans \mathcal{L}_0 .

Pour le premier terme, on écrit la division euclidienne suivante :

$$u = \frac{Q(z)}{y} = \frac{Q(0) + zS(z)}{y} \equiv \frac{Q(0)}{y} [z],$$

où l'on fait le modulo dans \mathcal{L}_0 . On utilise alors le fait que R est un vrai polynôme à coefficients dans \mathbb{A} et les variables initiales d'indice différent de i et j , et on obtient :

$$R\left(\frac{Q(z)}{y}\right) \equiv R\left(\frac{Q(0)}{y}\right)[z].$$

On en déduit alors :

$$\frac{R\left(\frac{Q(z)}{y}\right) - R\left(\frac{Q(0)}{y}\right)}{z} \in \mathcal{L}_0.$$

Ce qui conclut le premier point.

(ii) On veut calculer $\text{pgcd}(z, u)$. Or :

$$\begin{aligned} \text{pgcd}(z, u) &= \text{pgcd}\left(z, \frac{Q(z)}{y}\right) \\ &= \text{pgcd}\left(z, \frac{Q(0)}{y}\right) \\ &= \text{pgcd}\left(\frac{P(y)}{x}, \frac{Q(0)}{y}\right) \\ &= \text{pgcd}(P(y), Q(0)), \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de ce que y et x sont inversibles. Or $Q(0) \neq 0$ comme l'hypothèse (1) nous dit que z ne divise pas Q . Par ailleurs P et Q sont tous les deux des éléments de \mathcal{P} , donc $Q(0)$ et les coefficients de P sont des générateurs différents dans \mathbb{A} . Ainsi $\text{pgcd}(P(y), Q(0)) = 1$.

(iii) Il nous reste à calculer $\text{pgcd}(z, v)$. Le raisonnement est le même mais en un peu plus technique. On note f la fonction rationnelle définie par $f(z) = R\left(\frac{Q(z)}{y}\right)$. Comme observé dans le premier point, on a :

$$v = \frac{f(z) - f(0)}{z} + C\left(\frac{Q(0)}{y}\right)x.$$

Or :

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} \equiv f'(0)[z] = R'\left(\frac{Q(0)}{y}\right)\frac{Q'(0)}{y},$$

par une formule de Taylor pour les polynômes par exemple. Dès lors :

$$v \equiv R'\left(\frac{Q(0)}{y}\right)\frac{Q'(0)}{y} + C\left(\frac{Q(0)}{y}\right)x[z],$$

avec C polynôme en u , R polynôme. On en déduit que v est un simple polynôme linéaire en x , dont les coefficients sont des polynômes de Laurent en les autres variables de $x(t_0)$. Il suffit de montrer que $\text{pgcd}\left(C\left(\frac{Q(0)}{y}\right), P(y)\right) = 1$. C'est bien le cas en raisonnant comme précédemment car on a universalisé les coefficients de tous nos polynômes. \square

Remarque 3.1.22. L'universalisation des coefficients peut sembler artificielle. C'est cependant une technique classique en algèbre générale. On pourra notamment aller voir les preuves des résultats de base sur le résultant.

Il nous reste à prouver qu'une algèbre amassée classique telle qu'elle a été définie dans la partie précédente vérifie bien (1) et (2).

Démonstration. • La première condition est assez facile. D'ordinaire, si l'on fait une mutation selon k , on a :

$$P = \prod_{b_{ik} > 0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik} < 0} x_i^{-b_{ik}}$$

Avec $b_{kk} = 0$ donc qui n'intervient pas dans P . De plus pour tout $j \in [n]$, x_j est au plus dans l'un des deux monômes donc ne divise pas P .

• Pour la deuxième condition c'est plus compliqué. On écrit :

$$\begin{array}{ccccccc}
 t_0 & & i & & t_1 & & j & & t_2 & & i & & t_3 \\
 \bullet & & & & \bullet & & & & \bullet & & & & \bullet \\
 & & P & & & & Q & & & & R & &
 \end{array}$$

On a :

$$R = C.P \left(x_1, \dots, x_{j-1}, \frac{Q_0}{x_j}, x_{j+1}, \dots, x_n \right),$$

où l'on a noté $Q_0 = Q(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

On note B la matrice de mutation en t_1 , B' celle en t_2 . On a donc :

$$P = \prod_{b_{ki} > 0} x_k^{b_{ki}} + \prod_{b_{ki} < 0} x_k^{-b_{ki}} = M_1 + M_0,$$

$$Q = \prod_{b_{kj} > 0} x_k^{b_{kj}} + \prod_{b_{kj} < 0} x_k^{-b_{kj}},$$

$$R = \prod_{b'_{ki} > 0} x_k^{b'_{ki}} + \prod_{b'_{ki} < 0} x_k^{-b'_{ki}} = M_2 + M_3.$$

Dès lors on a deux possibilités :

1. $b_{ij} \neq 0$:

Alors $Q_0 = \prod_{k: b_{kj} b_{ij} < 0} x_k^{|b_{kj}|}$, $\frac{M_2}{M_3} = \prod_k x_k^{b'_{ki}}$, $\frac{M_1}{M_0} = \prod_k x_k^{b_{ki}}$. On note \tilde{P} , \tilde{M}_1 et \tilde{M}_0 le polynôme P et les monômes M_1 et M_0 dans lesquels on a remplacé x_j par $\frac{Q_0}{x_j}$. On veut montrer :

$$\frac{M_2}{M_3} = \frac{\tilde{M}_1}{\tilde{M}_0}. \quad (*)$$

On regarde la puissance sur x_k pour $k \in [n]$, $k \neq i$ à droite et à gauche dans cette équation :

(a) Pour $k = j$ à gauche on a b'_{ji} et à droite $-b_{ji}$.

(b) Pour $k \neq i, j$ on a b'_{ki} à droite et b_{ki} (resp. $b_{ki} + |b_{kj}|b_{ji}$) si $b_{kj}b_{ij} > 0$ (resp. $b_{kj}b_{ij} < 0$).

Ces deux relations correspondent exactement à ce que décrit les relations d'échanges. On a donc bien l'égalité (*). Dès lors :

$$\frac{R}{P} = \frac{M_3 + M_2}{\tilde{M}_1 + \tilde{M}_0} = \frac{M_3}{\tilde{M}_0},$$

qui est bien un polynôme de Laurent.

2. Si $b_{ij} = 0$, alors $b_{ji} = 0$. Du coup $Q_0 = Q$ mais $\tilde{P} = P$ également (x_j n'intervient pas dans P). Les relations d'échange nous donnent alors $b'_{ki} = b_{ki}$ pour tout k et donc $P = R$, et $C = 1$.

□

Remarque 3.1.23. La preuve montre bien davantage : pour être dans le contexte des algèbres vérifiant les deux conditions (1) et (2), et donc pour vérifier le phénomène de Laurent, il était nécessaire de définir la mutation de matrice comme on l'a fait, ce qui montre que la définition n'est pas artificielle mais imposée par le phénomène de Laurent.

3.2 Classification des algèbres amassées de type fini

L'objectif de cette partie est de présenter les résultats et certains outils de la preuve qui seront utiles pour la suite du mémoire. Les détails des preuves seront en revanche sautés. Les rappels de théorie des groupes de Coxeter et de géométrie discrète sont faits en annexe.

3.2.1 Cadre général et énoncés des théorèmes

Coefficients et algèbres $\mathcal{A}(B, \cdot)$

Dans cette partie nous allons enfin préciser ce qu'est vraiment le groupe des coefficients \mathbb{P} introduit dans la partie 3.1. On va prendre pour ce groupe un semicorps $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$ c'est-à-dire un groupe abélien pour la loi \cdot muni d'une addition auxiliaire \oplus qui est commutative, associative et distributive par rapport à la loi multiplicative. Il se trouve ([FZ02, section 5]) que le groupe multiplicatif d'un semicorps est toujours sans torsion, de sorte que $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ est un anneau intègre. Nous prendrons donc comme corps ambiant pour notre algèbre amassée \mathcal{A} un corps de fractions rationnelles \mathcal{F} en n variables (n est le *rang* de \mathcal{A}) à coefficients dans $\mathbb{Z}\mathbb{P}$.

Exemple 3.2.1. L'exemple classique pour \mathbb{P} est le semi-corps tropical : on se donne un ensemble de générateurs p_j , $j \in J$, et on considère le groupe abélien multiplicatif qu'ils engendrent. Les éléments de \mathbb{P} sont donc les monômes en les p_j . L'addition auxiliaire est alors :

$$\prod_j p_j^{a_j} \oplus \prod_j p_j^{b_j} = \prod_j p_j^{\min(a_j, b_j)}.$$

L'idée est que ces p_j sont les variables gelées introduites pour les triangulations. Dès lors, forcer deux éléments x et y de \mathbb{P} à vérifier $x \oplus y = 1$ revient alors à forcer chacun des p_j à n'apparaître que dans au plus l'un des deux termes x ou y .

On définit alors plus précisément les algèbres amassées à coefficients de la manière suivante.

Définition 3.2.2. Une graine dans \mathcal{F} est un triplet $\Sigma = (X, B, p)$ où :

1. X est un sous-ensemble de n éléments de \mathcal{F} qui en est une famille libre et génératrice sur le corps des fractions de $\mathbb{Z}\mathbb{P}$;
2. $B = (b_{xy})_{x, y \in X}$ est une matrice carrée de taille n dont les lignes et colonnes sont indexées par X et qui est à signes antisymétriques ;
3. $p = (p_x^\pm)_{x \in X}$ est un $(2n)$ -uplet d'éléments de \mathbb{P} satisfaisant les conditions de normalisation $p_x^+ \oplus p_x^- = 1$ pour tout $x \in X$.

Définition 3.2.3. Si $\Sigma = (X, B, p)$ est une graine, et $z \in X$, on définit la graine $\bar{\Sigma} = (\bar{X}, \bar{B}, \bar{p})$ obtenue après mutation dans la direction z par :

1. $\bar{X} = X \cup \{\bar{z}\} \setminus \{z\}$ où \bar{z} est obtenue par la relation d'échange :

$$z\bar{z} = p_z^+ \prod_{\substack{x \in X \\ b_{xz} > 0}} x^{b_{xz}} + p_z^- \prod_{\substack{x \in X \\ b_{xz} < 0}} x^{-b_{xz}}. \quad (3.2.1)$$

2. \bar{B} est obtenue à partir de B en faisant une mutation de matrice dans la direction z puis en réindexant par \bar{z} la ligne et la colonne indexée par z .

3. On obtient \bar{p} en utilisant d'une part les conditions de normalisation, et d'autres part les relations d'échange sur les coefficients décrites dans [FZ03a, p.4].

Définition 3.2.4. On se donne un ensemble \mathcal{S} de graines vérifiant les conditions suivantes :

1. \mathcal{S} est stable par mutation (toute graine admet des mutations dans toutes les directions, et le résultat reste dans \mathcal{S}).
2. \mathcal{S} est connexe par mutations (deux graines dans \mathcal{S} sont reliées par une suite de mutations).

La nomenclature est la même qu'avant, à la différence que les variables gelées sont dans \mathbb{P} . Si $\Sigma = (X, B, p)$ est une graine de \mathcal{S} , on appelle X un amas, ses éléments sont les variables d'amas, l'ensemble de toutes les variables d'amas est noté \aleph . L'ensemble de tous les éléments $p_x^\pm \in p$ pour toutes les graines $\Sigma = (X, B, p)$ est noté \mathcal{P} . L'algèbre amassée (normalisée) $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{S})$ est la $\mathbb{Z}[\mathcal{P}]$ -sous-algèbre de \mathcal{F} générée par \aleph . Le graphe d'échange de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ est le graphe n -régulier dont les sommets sont les graines dans \mathcal{S} et les arêtes correspondent aux mutations. Le complexe d'amas de \mathcal{A} est le complexe simplicial dont les sommets sont les variables d'amas et les facettes sont les amas.

Remarque 3.2.5. On aurait envie de faire comme précédemment et de se donner une graine initiale dans \mathcal{F} , puis de faire les mutations dans toutes les directions possibles pour obtenir un tel ensemble de graines \mathcal{S} . Le problème est qu'une matrice obtenue par mutation d'une matrice à signes antisymétriques peut ne pas être à signes antisymétriques. Ceci justifie la présence de la condition 1 dans la définition précédente.

Définition 3.2.6. On se donne deux algèbres amassées $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{A}(\mathcal{S}') \subset \mathcal{F}'$ sur le même semicorps \mathbb{P} . Elles sont fortement isomorphes s'il existe un isomorphisme de $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ -algèbres $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ qui envoie toute (de façon équivalente, une seule) graine de \mathcal{S} sur une graine de \mathcal{S}' , induisant ainsi une bijection $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ et donc un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{A}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{S}')$.

Proposition 3.2.7. Si on s'est donné notre ensemble \mathcal{S} de graines et l'algèbre amassée associée \mathcal{A} , celle-ci est déterminée par une unique graine $\Sigma = (X, B, p)$. Ainsi $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X, B, p)$. On a alors que \mathcal{A} est déterminée à isomorphisme fort près uniquement par B et p , justifiant la notation $\mathcal{A} = \mathcal{A}(B, p)$.

Démonstration. La première assertion est claire : on part de notre graine Σ , on fait les mutations dans tous les sens, et les propriétés de \mathcal{S} assurent que l'on obtient bien uniquement des graines et toutes les graines ainsi.

Le second point est plus important. On se donne deux graines $\Sigma = (X, B, p)$ et $\Sigma' = (X', B, p)$ dans \mathcal{F} qui engendrent toutes les deux un bon ensemble de graines au sens de la définition 3.2.4, et on cherche un isomorphisme fort entre $\mathcal{A}(\Sigma)$ et $\mathcal{A}(\Sigma')$. Les amas X et X' étant tous deux des bases de transcendance de \mathcal{F} , une application bijective qui envoie les éléments de X sur ceux de X' s'étend en isomorphisme de $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ -algèbres. Étant donné que l'on part de la même matrice B et des mêmes coefficients p , et que l'isomorphisme d'algèbre transforme les relations d'échanges (3.2.1) dans $\mathcal{A}(\Sigma)$ en les relations d'échange de $\mathcal{A}(\Sigma')$, on en déduit qu'on a en fait un isomorphisme fort entre les deux algèbres amassées. \square

Définition 3.2.8. Une algèbre amassée appartient à une série $\mathcal{A}(B, -)$ contenant toutes les algèbres amassées de la forme $\mathcal{A}(B, p)$ où B est fixé, et p peut varier. Deux telles séries $\mathcal{A}(B, -)$ et $\mathcal{A}(B', -)$ sont dites fortement isomorphes s'il existe une bijection envoyant chaque algèbre

amassée $\mathcal{A}(B, p)$ sur une algèbre amassée qui lui est fortement isomorphe $\mathcal{A}(B', p')$. (En fait cela revient à demander que B et B' se déduisent l'une de l'autre par une suite de mutations et renumérotation simultanée de lignes et colonnes.)

Énoncés des théorèmes

Définition 3.2.9. Une algèbre amassée $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{S})$ est dite de type fini si l'ensemble \mathcal{S} des graines est fini. Elle est de type infini sinon.

Définition 3.2.10. Soit $B = (b_{ij})_{ij}$ une matrice à coefficients entiers. Son homologue de Cartan est la matrice de Cartan généralisée $A = A(B) = (a_{ij})$ définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j, \\ -|b_{ij}| & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le théorème suivant, prouvé par S. Fomin et A. Zelevinsky dans [FZ03a], est l'objectif de cette section.

Théorème 3.2.11. Toutes les algèbres amassées d'une série $\mathcal{A}(B, -)$ sont simultanément toutes de type fini ou toutes de type infini. Il existe une bijection canonique entre les matrices de Cartan de type fini et les classes à isomorphismes forts près des séries d'algèbres amassées de type fini. Sous cette bijection, une matrice de Cartan A de type fini correspond aux séries $\mathcal{A}(B, -)$, où B est une matrice à signes antisymétriques arbitraire vérifiant simplement $A(B) = A$.

Remarque 3.2.12. La série $\mathcal{A}(B, -)$ est bien définie car A est symétrisable, donc B est antisymétrisable. En effet, A est symétrisable donc il existe d_1, \dots, d_n tels que pour tout i, j on ait $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$. On déduit la propriété analogue pour B car elle est à signe antisymétriques.

Remarque 3.2.13. Ce théorème nous donne donc que chaque algèbre amassée de type fini à un type bien défini (A_n, B_n, \dots) , imitant donc la classification de Cartan-Killing pour les groupes de Coxeter finis. Voir l'annexe pour les rappels sur ce sujet.

On divise ce théorème en les trois théorèmes suivants.

Théorème 3.2.14. Supposons que l'on ait :

1. A une matrice de Cartan de type fini.
2. $B_0 = (b_{ij})$ une matrice à signes antisymétriques vérifiant $A = A(B_0)$ et $b_{ij} b_{ik} \geq 0$ pour tout i, j, k .
3. p_0 un $2n$ uplet d'éléments de \mathbb{P} satisfaisant les conditions de normalisation.

Alors $\mathcal{A}(B_0, p_0)$ est de type fini.

Remarque 3.2.15. Si on se donne une matrice de Cartan de type fini, il est facile de construire B_0 selon le second point. Il suffit d'orienter le graphe de Coxeter de A tel que tout point soit un arbre ou un puits (car c'est un arbre donc bipartite) et de faire le choix $|b_{ij}| = |a_{ij}|$ avec $b_{ij} > 0$ si l'arête $\{i, j\}$ est orientée de i vers j . Voir figure 3.2.1.

Enfin le troisième point est facile à exhiber. La vraie difficulté de ce théorème est de montrer que l'algèbre $\mathcal{A}(B_0, p_0)$ est de type fini.

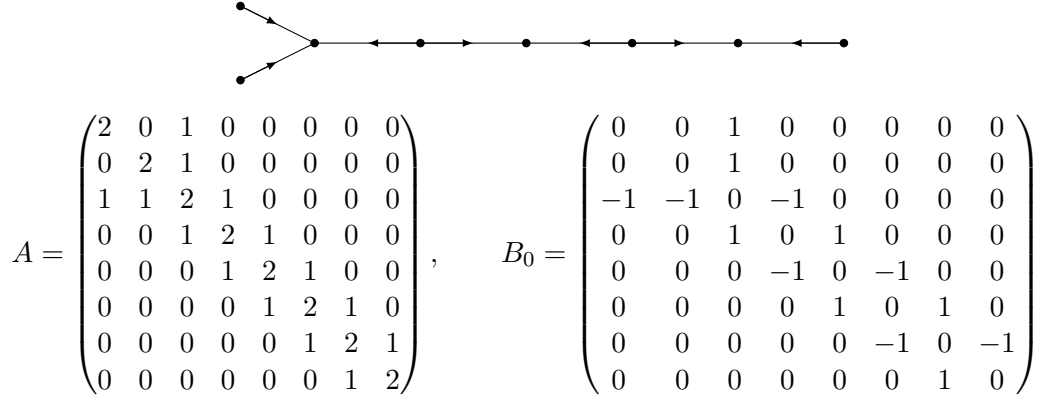


FIGURE 3.2.1 – Un graphe de Coxeter orienté, sa matrice de Cartan et une matrice B_0 selon le théorème 3.2.14.

Théorème 3.2.16. *Toute algèbre amassée de type fini \mathcal{A} est fortement isomorphe à une algèbre amassée $\mathcal{A}(B_0, p_0)$ vérifiant les conditions du théorème 3.2.14.*

Théorème 3.2.17. *Soit B et B' deux matrices à signes antisymétriques telles que $A(B)$ et $A(B')$ soient des matrices de Cartan de type fini. Alors les séries $\mathcal{A}(B, -)$ et $\mathcal{A}(B', -)$ sont fortement isomorphes si et seulement si $A(B)$ et $A(B')$ sont du même type de Cartan-Killing.*

Ces trois théorèmes nous suffisent à prouver le théorème 3.2.11. En effet, notons C l'ensemble des matrices de Cartan de type fini et A l'ensemble des algèbres amassées de type fini. Le théorème 3.2.14 donne l'existence d'une application $C \rightarrow A$. Le théorème 3.2.16 nous dit que c'est une surjection de C vers les classes de A à isomorphismes forts près. Enfin le théorème 3.2.17 nous dit finalement que cette application va en fait dans les séries d'algèbres amassées à isomorphismes forts près, et que c'est alors une injection.

3.2.2 « Existence »

Plan de la section

On se donne $A = (a_{ij})$ une matrice de Cartan de type fini, et $\mathcal{A} = \mathcal{A}(B_0, p_0)$ une algèbre amassée définie selon le théorème 3.2.14. Pour montrer que cette algèbre amassée est de type finie, on va utiliser le critère de la proposition 3.2.18 de ce mémoire, qui est démontré dans [FZ03a, proposition 2.3]. Pour cela, on a besoin de construire plusieurs objets :

- Un complexe simplicial pur Δ de dimension $(n - 1)$ sur un ensemble de base Ψ . On note Γ son graphe dual : c'est le graphe dont les sommets sont les facettes de Δ , et où deux sommets sont reliés s'ils partagent un mur (c'est-à-dire une face de dimension $(n - 2)$ dans Δ).
- À chaque sommet C de Γ on associe une matrice à coefficients entiers $B(C) = (b_{\alpha, \beta}(C))_{\alpha, \beta \in C}$.
- On se donne aussi un *semis* en chaque sommet de Γ de la façon suivante. On part de C et on lui attache une graine $\Sigma = (X, B, p)$ pour $B = B(C)$, et p un uplet de coefficients. Pour ce faire on choisit une bijection $\alpha \mapsto x[C, \alpha]$ entre C et X qui identifie B et $B(C)$ de sorte que $b_{\alpha\beta}(C) = b_{x[C, \alpha], x[C, \beta]}$. On transporte alors ce *semis* le long d'une arête de Γ de C à $\bar{C} = C \cup \{\bar{\gamma}\} \setminus \{\gamma\}$. La nouvelle graine $\bar{\Sigma} = (\bar{X}, \bar{B}, \bar{p})$ attachée à \bar{C} est celle obtenue à partir de Σ en faisant une mutation dans la direction $x[C, \gamma]$, et la bijection est déterminée par

les relations habituelles : $x[\overline{C}, \alpha] = x[C, \alpha]$ pour $x \in \overline{C} \cap C$ et la dernière variable $x[\overline{C}, \overline{\gamma}]$ se déduit de $x[C, \gamma]$ par la relation d'échange (3.2.1).

On utilisera la caractérisation suivante, dont la preuve se trouve dans [FZ03a].

Proposition 3.2.18. *Supposons que le complexe simplicial Δ et que la famille de matrices $(B(C))$ satisfont sept conditions. Soit $B = B(C)$ pour un certain C , alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}(B, p)$ l'algèbre amassée associée à B et pour un certain p est bien définie. De plus, il existe une surjection de l'ensemble des sommets de Γ sur l'ensemble des graines de \mathcal{A} . En particulier si Δ est fini, \mathcal{A} est de type fini.*

Plus précisément le semis $\alpha \mapsto x[C, \alpha]$ ne dépend en fait pas de C , et $\alpha \mapsto x[\alpha]$ est une surjection de Ψ sur l'ensemble des variables d'amas de \mathcal{A} . Si c'est une bijection on a alors un isomorphisme entre Γ et le graphe d'échange de \mathcal{A} , et entre Δ et le complexe d'amas de \mathcal{A} .

Nous n'allons pas donner les sept conditions précises qui sont nécessaires. En voici cependant les idées :

- Les quatre premières portent sur le complexe simplicial Δ . Le lemme 2.2 de [FZ03a] montre qu'il suffit pour les vérifier toutes les quatre que Δ soit le complexe de bord d'un polytope simplicial n -dimensionnel.
- Les trois suivantes concernent les matrices de $B(C)$. Deux demandent des choses qui semblent naturelles au vu de ce que l'on veut montrer, à savoir que ces matrices sont à signes antisymétriques, et que si deux d'entre elles sont reliés par une arête on passe de l'une à l'autre par mutation de matrices et renumérotation simultanée de lignes et colonnes. La dernière condition est essentiellement technique, et impose des résultats sur les coefficients de ces matrices.

Dans la première section 3.2.2 on va montrer que l'on peut avoir la première partie du théorème en construisant des bons Δ et $(B(C))$ qui vérifient en plus que pour un certain sommet C_0 , $A(B(C_0)) = A$. Il nous manquera alors l'injectivité de $\alpha \mapsto x[\alpha]$ que l'on étudiera dans la section suivante 3.2.2 pour conclure véritablement, avant de présenter certains cas particuliers dans la section 3.2.2.

Association d'une algèbre de type fini à une matrice de Cartan

Les involutions τ_+ et τ_- . On invite à aller voir les rappels en annexes. On note A une de matrice de Cartan de taille n de type fini indécomposable, Φ le système de racines associé, $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ l'ensemble des racines simples, $\{s_i \mid i \in I\}$ les réflexions simples associées, W le groupe de Weyl, $Q = \mathbb{Z}\Pi$ le réseau des racines, $Q_+ = \mathbb{N}\Pi$ le cône positif dans ce réseau, V l'espace vectoriel réel sous-jacent, w_0 le mot de plus grande longueur. On rappelle notre convention

$$s_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\alpha_i.$$

Si $\alpha \in V$, on note $[\alpha : \alpha_i]$ le coefficient de α_i dans l'écriture de α sur la base Π :

$$\alpha = \sum_{i \in I} [\alpha : \alpha_i] \alpha_i.$$

Les réflexions simples agissent sur ces coefficients de la façon suivante :

$$[s_i \alpha : \alpha_{i'}] = \begin{cases} [\alpha : \alpha_{i'}] & \text{si } i' \neq i; \\ -[\alpha : \alpha_i] - \sum_{j \neq i} a_{ij} [\alpha : \alpha_j] & \text{si } i' = i. \end{cases}$$

Cette formule se déduit immédiatement des deux égalités écrites dans le paragraphe ci dessus, en se rappelant simplement que $a_{ii} = 2$.

Le graphe de Coxeter associé à Φ a pour ensemble des sommets I , et i et j sont reliés par une arête dès que $a_{ij}a_{ji} > 0$. Comme A est indécomposable, ce graphe est connexe, et la classification des groupes de Coxeter nous dit qu'il s'agit même d'un arbre. C'est donc un graphe bipartite. On note alors I_+ et I_- les deux parts, qui sont uniquement déterminés à interversion près. On écrit $\varepsilon(i) = \varepsilon$ pour $i \in I_\varepsilon$. On note alors

$$t_\pm = \prod_{i \in I_\pm} s_i.$$

Par choix de I_+ et I_- , deux réflexions simples s_i et s_j commutent quand elles sont dans le même ensemble, et ce produit est donc bien défini dans n'importe quel ordre.

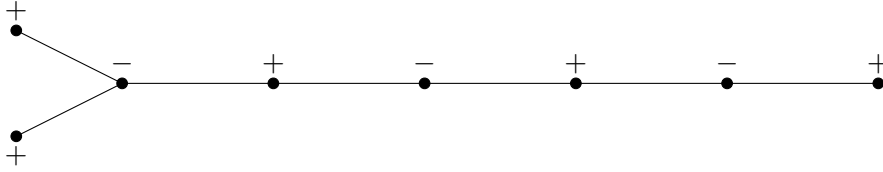


FIGURE 3.2.2 – Un exemple de graphe de Coxeter et sa bipartition.

On note Φ^+ l'ensemble des racines positives dans Φ , et on définit l'ensemble des racines presque positives

$$\Phi_{\geq -1} = \Phi^+ \cup (-\Pi).$$

On définit maintenant des modifications $\sigma_i : Q \rightarrow Q$ des s_i qui sont linéaires par morceaux (c'est-à-dire linéaires dans certains cônes) en posant

$$[\sigma_i \alpha : \alpha_{i'}] = \begin{cases} [\alpha : \alpha_{i'}] & \text{si } i' \neq i; \\ -[\alpha : \alpha_i] - \sum_{j \neq i} a_{ij} \max(0, [\alpha : \alpha_j]) & \text{si } i' = i. \end{cases}$$

Proposition 3.2.19. *On a les propriétés suivantes :*

1. Chaque application $\sigma_i : Q \rightarrow Q$ est une involution.
2. Si i et j sont deux sommets non adjacents dans le graphe de Coxeter, alors σ_i et σ_j commutent. En particulier c'est le cas si $\varepsilon(i) = \varepsilon(j)$.
3. Chaque application σ_i préserve $\Phi_{\geq -1}$.

Démonstration. 1. Soit $\alpha \in Q$. Le fait que $[\sigma_i^2 \alpha : \alpha_j] = [\alpha : \alpha_j]$ est clair pour $j \neq i$. La coordonnée restante est :

$$\begin{aligned} [\sigma_i^2 \alpha : \alpha_i] &= -[\sigma_i \alpha : \alpha_i] - \sum_{i \neq j} a_{ij} \max([\sigma_i \alpha : \alpha_j], 0) \\ &= -[\sigma_i \alpha : \alpha_i] - \sum_{i \neq j} a_{ij} \max([\alpha : \alpha_j], 0) = [\alpha : \alpha_i]. \end{aligned}$$

2. Là encore un calcul direct donne

$$[\sigma_i \sigma_j \alpha : \alpha_k] = \begin{cases} [\alpha : \alpha_k] & \text{si } k \neq i, j, \\ [\sigma_j \alpha : \alpha_j] & \text{si } k = j, \\ -[\alpha : \alpha_i] - \sum_{j \neq i} a_{ij} \max(0, [\sigma_j \alpha : \alpha_j]) = [\sigma_i \alpha : \alpha_i] & \text{si } k = i, \end{cases}$$

en se souvenant que $a_{ij} = 0$ quand i et j ne sont pas adjacents dans le graphe de Coxeter.

3. Pour $i \in I$, $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$ on obtient :

$$\sigma_i(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha = -\alpha_j \neq -\alpha_i, \\ s_i(\alpha) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet σ_i se comporte comme s_i dans Φ^+ . Pour $j \neq i$, $\sigma_i(-\alpha_j) = -\alpha_j$ car $[-\alpha_j : \alpha_i] = 0$ et le seul maximum qui pourrait être pris en compte est nul. On raisonne de même pour $-\alpha_i$. \square

Par analogie avec ce qu'on a vu avant, on définit deux transformations linéaires par morceaux de Q en posant :

$$\tau_{\pm} = \prod_{i \in I_{\pm}} \sigma_i,$$

qui est encore bien défini par le point 2 de la proposition précédente.

Remarque 3.2.20. On peut aussi définir globalement ces deux applications τ_+ et τ_- directement comme des automorphismes linéaires par morceaux sur tout V par :

$$[\tau_{\varepsilon} \gamma : \alpha_i] = \begin{cases} -[\gamma : \alpha_i] - \sum_{j \neq i} a_{ij} \max([\gamma : \alpha_j], 0) & \text{si } i \in I_{\varepsilon}, \\ [\gamma : \alpha_i] & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que cette définition coïncide bien avec la précédente.

Exemple 3.2.21. On s'arrête un instant pour essayer de comprendre ces transformations σ_i , τ_+ et τ_- . On se place en type A_2 avec $I_+ = \{1\}$ et $I_- = \{2\}$. Étudions par exemple σ_2 . Dans le demi-espace $[\alpha : \alpha_1] < 0$, σ_2 agit comme la réflexion par rapport à $\langle \alpha_1 \rangle$, parallèlement à α_2 alors que dans le demi-espace $[\alpha : \alpha_1] > 0$, σ_2 est la réflexion orthogonale à α_1 .

On remarque que le produit $\tau_+ \tau_-$ agit transitivement sur $\Phi_{\geq -1}$. On énoncera un cas plus général sous peu.

Après ce premier exemple, on énonce des propriétés qui se visualisent aisément dessus :

Proposition 3.2.22. *On a les propriétés suivantes :*

1. Les deux transformations τ_+ et τ_- sont des involutions qui préservent $\Phi_{\geq -1}$.
2. $\tau_{\pm}(\alpha) = t_{\pm}(\alpha)$ pour $\alpha \in Q_+$.

Démonstration. La preuve du premier point est immédiate en utilisant que les σ_i intervenant dans τ_+ commutent et sont des involutions (de même pour τ_-).

Pour le second point, il suffit de se rendre compte que les seules coordonnées susceptibles de changer lors de la composition des σ_i , par exemple j et k , vérifient $a_{jk} = 0$. \square

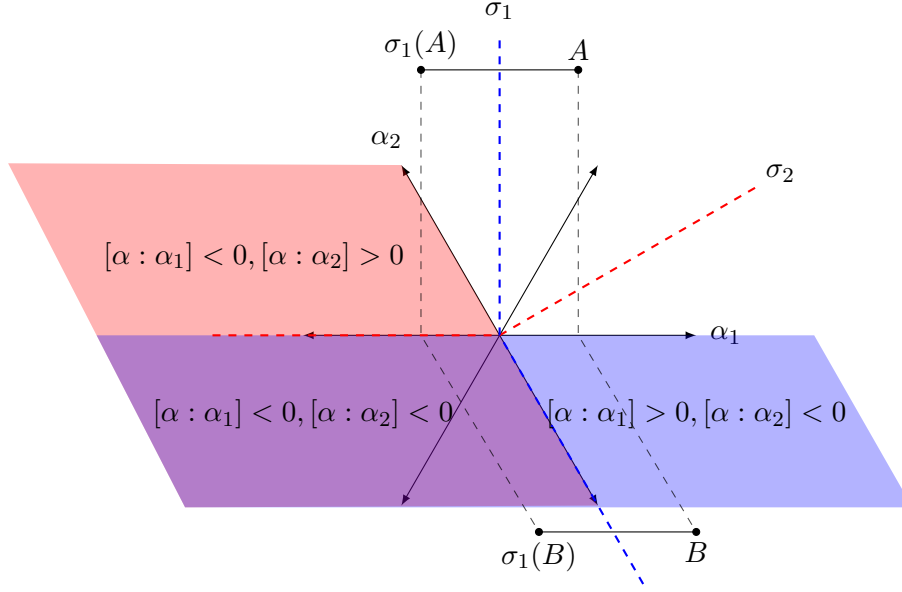


FIGURE 3.2.3 – Lignes de réflexion de σ_1 et σ_2 en type A_2 et segmentation des zones.

Remarque 3.2.23. En fait on peut avoir la description plus précise suivante des τ_ε sur $\Phi_{\geq -1}$:

$$\tau_\varepsilon(\alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha = -\alpha_i, i \in I_{-\varepsilon}, \\ \prod_{i \in I_\varepsilon} s_i(\alpha) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Voir figure 3.2.5.

On note D le groupe des permutations de $\Phi_{\geq -1}$ engendré par τ_+ et τ_- . Le théorème suivant est essentiel et prouvé dans [FZ03b, théorème 2.6]

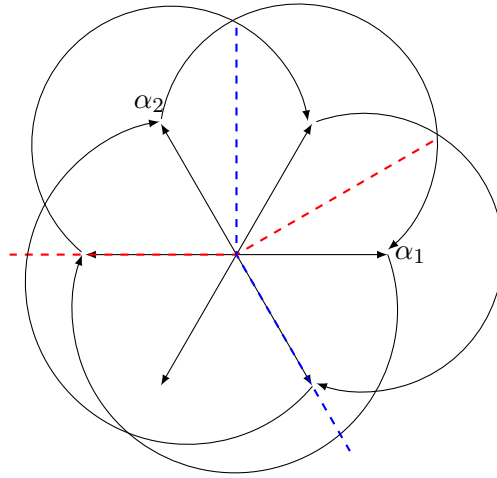
Théorème 3.2.24. On note h l'ordre de t_-t_+ .

1. Chaque D -orbite dans $\Phi_{\geq -1}$ a une intersection non vide avec $-\Pi$. Plus précisément l'application $\Omega \mapsto \Omega \cap (-\Pi)$ est une bijection entre les D -orbites dans $\Phi_{\geq -1}$ et les $\langle -w_0 \rangle$ -orbites dans $-\Pi$ par .
2. L'ordre de $\tau_- \tau_+$ dans D vaut $\frac{h+2}{2}$ si $w_0 = -1$, et $h+2$ sinon. Le groupe D est diédral d'ordre $h+2$ dans le premier cas, et d'ordre $2(h+2)$ dans le second cas. Le nombre h désigne le nombre de Coxeter.

Par exemple, dans le cas de A_2 , D est le groupe diédral d'ordre 10.

Le premier point est essentiel. Il rend en quelque sorte les éléments de $-\Pi$ particuliers car on peut toujours s'y ramener. On fera souvent appel à ce raisonnement dans les preuves qui suivent, et il sert également dans les preuves de nombreux résultats admis dans ce mémoire.

Le degré de compatibilité. On autorise dans cette partie la matrice de Cartan A à être décomposable. Le graphe de Coxeter associé a alors plusieurs composantes connexes mais on peut toujours définir une bipartition I_+ , I_- comme précédemment.


 FIGURE 3.2.4 – Action de $\sigma_1\sigma_2 = \tau_+\tau_-$ en type A_2 .

$$\begin{array}{ccccccc}
 -\alpha_1 & \xleftarrow{\sigma_1} & \alpha_1 & \xleftrightarrow{\sigma_2} & \alpha_1 + \alpha_2 & \xleftarrow{\sigma_1} & \alpha_2 & \xleftarrow{\sigma_2} & -\alpha_2 \\
 \textcircled{\sigma_2} & & & & & & & & \textcircled{\sigma_1}
 \end{array}$$

 FIGURE 3.2.5 – Action de σ_1 et σ_2 sur A_2 .

En utilisant le théorème 3.2.24, on peut alors définir uniquement une fonction, appelée *degré de compatibilité* :

$$\begin{array}{ccc}
 \Phi_{\geq -1} \times \Phi_{\geq -1} & \rightarrow & \mathbb{N} \\
 (\alpha, \beta) & \mapsto & (\alpha \parallel \beta),
 \end{array}$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\begin{array}{l}
 (-\alpha_i \parallel \beta) = \max([\beta : \alpha_i], 0), \\
 (\tau_\varepsilon \alpha \parallel \tau_\varepsilon \beta) = (\alpha \parallel \beta),
 \end{array}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \Phi_{\geq -1}$, $i \in I$, et tout signe $\varepsilon \in \{+, -\}$.

Plus précisément le théorème 3.2.24 assure l'unicité d'une telle fonction. Son existence est prouvée dans [FZ03b].

Définition 3.2.25. Deux racines $\alpha, \beta \in \Phi_{\geq -1}$ sont dites compatibles si $(\alpha \parallel \beta) = 0$.

Proposition 3.2.26. La relation de compatibilité est symétrique et préservée par τ_+ et τ_- : si $(\alpha \parallel \beta) = 0$ alors $(\beta \parallel \alpha) = 0$, et $(\tau_\varepsilon \alpha \parallel \tau_\varepsilon \beta) = (\alpha \parallel \beta)$.

Définition 3.2.27. Un sous-ensemble de $\Phi_{\geq -1}$ est dit compatible s'il est constitué d'éléments deux à deux compatibles. Les tels sous-ensembles maximaux de $\Phi_{\geq -1}$ sont appelés amas (de racines).

Définition 3.2.28. Pour tout sous-ensemble compatible C de $\Phi_{\geq -1}$, on note :

$$S_-(C) = \{i \in I : -\alpha_i \in C\},$$

et on appelle $S_-(C)$ le support négatif de C . On dit que C est positif si $S_-(C) = \emptyset$, c'est-à-dire si C ne contient que des racines positives.

Proposition 3.2.29. *Dans ce théorème, A est éventuellement décomposable.*

- (i) τ_+ et τ_- transforment un sous-ensemble compatible en un sous-ensemble compatible, et un amas de racines en un amas de racines.
- (ii) Si $I_1, \dots, I_r \subset I$ sont les composantes connexes du graphe de Coxeter, alors les sous-ensembles compatibles (resp. les amas) pour Φ sont les unions disjointes $C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ où chaque C_k est un sous-ensemble compatible (resp. un amas) de $\Phi(I_k)$.
- (iii) Pour tout $i \in I$, la correspondance $C \mapsto C - \{-\alpha_i\}$ est une bijection entre l'ensemble des sous-ensembles compatibles (resp. des amas) pour Φ qui contiennent $-\alpha_i$ et l'ensemble des sous-ensembles compatibles (resp. des amas) pour $\Phi(I - \{i\})$.
- (iv) Pour tout sous-ensemble $J \subset I$, la correspondance $C \mapsto C - \{-\alpha_i, i \in J\}$ est une bijection entre l'ensemble des sous-ensembles compatibles (resp. des amas) pour Φ de support négatif contenant J et l'ensemble des sous-ensembles compatibles positifs (resp. des amas) pour $\Phi(I - J)$.

Démonstration. Le premier point vient de ce que τ_+ et τ_- préservent la compatibilité. Le second de ce que τ_+ et τ_- préservent chacun les ensembles $\Phi(I_k)_{\geq -1}$. Le troisième vient de la définition du degré de compatibilité dans le cas où l'une des deux racines est dans $-\Pi$: en effet toute racine α compatible avec $-\alpha_i$ et distincte de $-\alpha_i$ vérifie $[\alpha : \alpha_i] \leq 0$, et donc $[\alpha : \alpha_i] = 0$ (seule $-\alpha_i \in \Phi_{\geq -1}$ peut avoir $[\alpha : \alpha_i] < 0$). Ainsi α_i n'apparaît pas dans leur expression. Le dernier point est obtenu en itérant le troisième. \square

Définition 3.2.30. *On note $\Delta(\Phi)$ le complexe simplicial dont les sommets sont les éléments de $\Phi_{\geq -1}$ et dont les faces sont les sous-ensembles de racines mutuellement compatibles.*

C'est ce complexe simplicial $\Delta(\Phi)$ qui a vocation à être le complexe simplicial dont on a besoin pour la proposition 3.2.18. Ses facettes sont les amas de racines.

Le théorème suivant n'est pas démontré dans cette section. On montrera simplement les points (1) et (2) pour se donner une idée d'une preuve typique dans cette partie. Ce théorème est à la base du travail de ce mémoire. Le troisième point sera démontré dans la section 3.3.

Théorème 3.2.31. *On suppose ici que A est indécomposable.*

1. Chaque amas de racines dans $\Delta(\Phi)$ est une \mathbb{Z} -base du réseau Q . En particulier tout les amas sont de même taille $n = |I|$. Le complexe est donc pur.
2. Les cônes engendrés par les faces dans $\Delta(\Phi)$ forment un éventail simplicial complet dans V .
3. Cet éventail simplicial est l'éventail normal d'un polytope simple de dimension n , appelé l'associaèdre généralisé du type de Cartan de A .

Voici un autre exemple en type A_3 . Les formules qui donnent le degré de compatibilité permettent de déterminer directement les paires de racines compatibles et les amas. La figure 3.2.7 donne le complexe d'amas (complexe dont les facettes sont les amas), qui est en fait le polaire de l'associaèdre généralisé qui nous intéresse. Ceci est une représentation d'un complexe simplicial. Les amas sont $\{1, -2, 3\}$, $\{1, 123, 3\}$, $\{123, 3, 23\}$, $\{3, -1, 23\}$, $\{-1, 23, 2\}$, $\{23, 2, 12\}$, $\{123, 12, 23\}$, $\{1, 12, 123\}$, $\{1, 12, -3\}$, $\{12, 2, -3\}$, $\{-1, 2, -3\}$, $\{1, -2, -3\}$, $\{-1, -2, 3\}$ et $\{-1, -2, -3\}$. (Cette représentation vient de C. Hohlweg. Le système A_3 se représente dans \mathbb{R}^3 , on intersecte par un plan le cône positif, ce qui nous donne les vecteurs 1, 2, 3, 12, 123 et

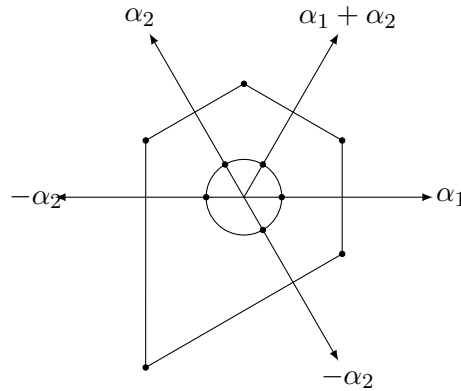


FIGURE 3.2.6 – Le complexe simplicial $\Delta(\Phi)$ et le polytope associé en type A_2 .

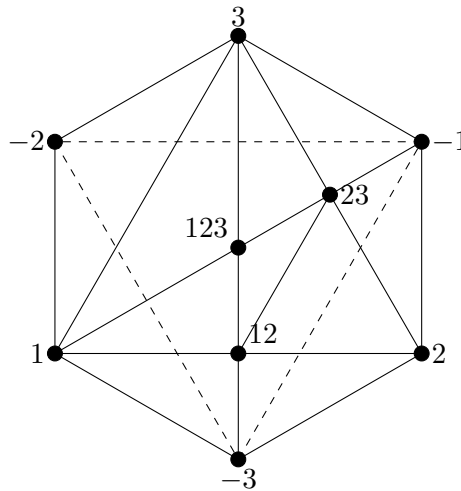


FIGURE 3.2.7 – Complexe d'amas en type A_3 .

23. Puis on rajoute en fond les trois racines négatives.)

On va pour l'instant prouver le premier point du théorème 3.2.31. Une fois prouvé que les amas sont tous de même taille, il sera immédiat qu'ils sont de taille n comme $-\Pi$ est un amas.

Démonstration de 3.2.31 1. On montre ce résultat dans le cas plus général où A n'est pas forcément indécomposable, par récurrence sur la taille de la matrice. On doit montrer que tout amas C dans Φ est une \mathbb{Z} -base du réseau Q . Par le point (4) de la proposition 3.2.29, il nous suffit (par la récurrence) de le montrer dans le cas où C est positif.

Dans ce cas-là, on a d'une part que $\tau_+(C)$ et $\tau_-(C)$ sont aussi des amas par le (1) de la proposition 3.2.29, et de plus par le point (2) de 3.2.22 on a que $\tau_{\pm} = t_{\pm}$, et donc $t_+(C)$ et $t_-(C)$ sont aussi des amas. Comme t_+ et t_- sont linéaires, ces nouveaux amas forment une \mathbb{Z} -base de Q si et seulement si cela est vrai pour C . En continuant ainsi, on arrive, au vu de la proposition 3.2.24, à un amas C' qui n'est plus positif. Il nous suffit de prouver que C' est encore une \mathbb{Z} -base de Q . En utilisant encore le point (4) de la proposition 3.2.29, on voit qu'il suffit de montrer que la partie positive de C' est une \mathbb{Z} -base du réseau engendré par

$C' \setminus \{-\alpha_i, i \in S_-(C')\}$. Mais ceci nous donne l'amas d'un système de racines de rang plus petit. On conclut par récurrence. \square

Nous allons prouver le second point du théorème 3.2.31. Nous introduisons auparavant une définition.

Définition 3.2.32. On appelle développement d'amas d'un vecteur γ dans l'espace V une décomposition de γ sous la forme :

$$\gamma = \sum_{\alpha \in \Phi_{\geq -1}} m_\alpha \alpha, \quad (3.2.2)$$

où tous les m_α sont des réels positifs ou nuls, tels que $m_\alpha m_\beta = 0$ dès que α et β ne sont pas compatibles. Autrement dit c'est une écriture comme combinaison linéaire positive de racines deux à deux compatibles dans $\Phi_{\geq -1}$.

Théorème 3.2.33. Tout élément γ de V admet un unique développement d'amas. On note alors $[\gamma : \alpha]_{amas}$ le coefficient de $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$ intervenant dans son développement d'amas. On dit alors que α est une composante d'amas de γ .

Démonstration. Cette preuve suit la même stratégie que la preuve de 3.2.31 1. Pour $\gamma \in Q$ on pose :

$$S_+(\gamma) = \{i \in I : [\gamma : \alpha_i] > 0\},$$

$$S_-(\gamma) = \{i \in I : [\gamma : \alpha_i] < 0\},$$

$$\text{Supp}(\alpha) = \{i \in I : [\gamma : \alpha_i] \neq 0\}.$$

En particulier si $\alpha \in \Phi^+$, on a $S_+(\alpha) = \text{Supp}(\alpha)$. On utilise le lemme suivant :

Lemme 3.2.34. Si $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$ intervient dans un développement d'amas de $\gamma \in V$ (c'est-à-dire $m_\alpha > 0$ dans (3.2.2)), alors soit α est une racine positive avec $\text{Supp}(\alpha) \subset S_+(\gamma)$, soit $a = -\alpha_i$ pour $i \in S_-(\gamma)$. En particulier si γ , appartient au cône totalement positif Q^+ , alors un développement d'amas de γ ne peut faire intervenir que des racines positives.

Démonstration. La preuve utilise simplement la définition du degré de compatibilité $(\alpha \parallel \beta)$ quand α est une racine simple négative.

Dans le cas où α est une racine positive, soit $j \in \text{Supp}(\alpha)$. Dès lors, $(-\alpha_j \parallel \alpha) \neq 0$. Comme $m_\alpha \neq 0$ on a $m_{-\alpha_j} = 0$: la racine $-\alpha_j$ ne peut pas intervenir dans le même développement d'amas de γ . Ainsi il n'y a pas de compensation possible : nécessairement $[\gamma : \alpha_j]$ est strictement positif, et donc $j \in S_+(\gamma)$.

Si $\alpha = -\alpha_i$, le même raisonnement donne que $i \in S_-(\gamma)$. \square

On définit

$$\gamma^{(+)} = \sum_{i \in I} \max([\gamma : \alpha_i], 0) \alpha_i = \sum_{i \in S_+(\gamma)} [\gamma : \alpha_i] \alpha_i.$$

Le lemme 3.2.34 nous donne immédiatement le lemme suivant.

Lemme 3.2.35. Un vecteur $\gamma \in V$ admet un unique développement d'amas si et seulement si $\gamma^{(+)}$ admet un unique développement d'amas par rapport au système de racines $\Phi(S_+(\gamma))$.

En vertu de ce dernier lemme, il suffit de prouver le théorème 3.2.33 pour $\gamma \in Q_+$ et de conclure par récurrence. Pour $\gamma = 0$ le résultat est clair par définition du développement d'amas.

On suppose $\gamma \neq 0$ et on peut supposer, en vertu de la proposition 3.2.29 (2) que Φ est irréductible. Soit alors $\varepsilon \in \{+, -\}$. En utilisant les propositions 3.2.22 (2) qui nous dit que $\tau_\varepsilon = t_\varepsilon$ sur Q_+ , et 3.2.29 (1) qui nous donne que τ_ε transforme ensemble compatible en ensemble compatible, on en déduit que :

$$\gamma = \sum_{\alpha \in \Phi_{\geq -1}} m_\alpha \alpha$$

est un développement d'amas de γ si et seulement si

$$\tau_\varepsilon \gamma = t_\varepsilon \gamma = \sum_{\alpha \in \Phi_{\geq -1}} m_\alpha t_\varepsilon \alpha = \sum_{\alpha \in \Phi_{\geq -1}} m_\alpha \tau_\varepsilon \alpha,$$

est un développement d'amas de $t_\varepsilon \gamma$. Ainsi γ a un unique développement d'amas si et seulement si c'est le cas pour $t_\varepsilon \gamma = \tau_\varepsilon \gamma$. En utilisant le théorème 3.2.24 et la semi-linéarité de τ_ε , on peut supposer que $\tau_\varepsilon \gamma \notin Q_+$. On conclut alors par récurrence avec le lemme 3.2.35. \square

Démonstration de 3.2.31 2. Le théorème précédent nous donne quasiment le résultat. Il faut simplement voir que les cônes de cet éventail se recollent bien pour former un éventail simplicial. Mais cela découle facilement de l'unicité du développement d'amas pour les racines presque positives. \square

Le théorème 3.2.31 prouve le résultat suivant.

Proposition 3.2.36. *Le complexe simplicial $\Delta(\Phi)$ vérifie les quatre premières conditions de la proposition 3.2.18.*

Démonstration. On a dit que pour que le complexe simplicial vérifie ces conditions là, il suffit qu'il soit le complexe de bord d'un polytope convexe simplicial n -dimensionnel. Le 3 du théorème 3.2.31 nous l'assure. En effet le dual de l'associaèdre généralisé est bien simplicial et convient. \square

Racines échangeables, choix des matrices. On veut maintenant associer à chaque amas de racines C , c'est-à-dire à chaque facette de $\Delta(\Phi)$, une matrice $B(C)$ qui va vérifier les propriétés décrites dans le plan de la section. Cette partie là est très technique. On va se contenter d'expliquer comment l'on définit les matrices, en introduisant tous les outils nécessaires pour cela, et montrer rapidement qu'effectivement on peut bien trouver une facette C_0 telle que $A = A(B(C_0))$. Ensuite on donnera aussi quelques propriétés des outils introduits, pour que le lecteur comprenne davantage pourquoi cela est intéressant.

Définition 3.2.37. *Deux racines $\beta, \beta' \in \Phi_{\geq -1}$ sont dites échangeables si et seulement si elles vérifient $(\beta \parallel \beta') = (\beta' \parallel \beta) = 1$.*

Ce choix de terminologie est motivé par la proposition suivante, tirée de [CFZ02, lemme 2.2] et prouvée au lemme 3.3.10.

Proposition 3.2.38. *Soit C et $C' = C - \{\beta\} \cup \{\beta'\}$ deux amas adjacents. Alors les deux racines β et β' sont échangeables.*

La réciproque est vraie comme on le verra plus tard. La proposition suivante donne une propriété importante de ces racines échangeables. La preuve se trouve dans [CFZ02].

Proposition 3.2.39. *Si $n > 1$ et $\beta, \beta' \in \Phi_{\geq -1}$ sont échangeables, alors l'ensemble :*

$$\{\sigma^{-1}(\sigma(\beta) + \sigma(\beta')) : \sigma \in D = \langle \tau_+, \tau_- \rangle\}$$

est constitué de deux éléments de Q (et non de Φ a priori), l'un des deux est $\beta + \beta'$, et l'autre est noté $\beta \uplus \beta'$. Dans le cas où $\beta \in -\Pi$ on sait en plus calculer cet élément :

$$(-\alpha_j) \uplus \beta = \beta - \alpha_j + \sum_{i \neq j} a_{ij} \alpha_i = \tau_{-\varepsilon(j)}(\tau_{-\varepsilon(j)}\beta - \alpha_j).$$

Exemple 3.2.40. Si on se donne $-\alpha_1$ en type A_2 , il est clair que les racines presque positives avec lesquelles elle est compatible sont $-\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_2$, et échangeable avec $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2$ (en type A , en fait le degré de compatibilité ne peut être que 1 ou 0, voir la section 3.2.2 pour plus de détails). En appliquant τ_+ on a que α_1 est compatible avec $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2$ et $-\alpha_2$ et échangeable avec $-\alpha_1$ et α_2 . On continue ainsi.

Si l'on prend les deux racines échangeables α_1 et α_2 , et $\sigma = \tau_+ \tau_-$, on trouve alors que $\alpha_1 \uplus \alpha_2 = 0$.

On a encore besoin de l'existence d'une fonction signe, prouvée dans [FZ03a, lemme 4.1].

Lemme 3.2.41. *Il existe une fonction $(\beta, \beta') \mapsto \varepsilon(\beta, \beta') \in \{\pm 1\}$ sur les paires de racines échangeables, uniquement déterminée par les propriétés suivantes :*

- $\varepsilon(-\alpha_j, \beta') = -\varepsilon(j)$,
- $\varepsilon(\tau\beta, \tau\beta') = -\varepsilon(\beta, \beta')$ pour $\tau \in \{\tau_+, \tau_-\}$ et $\beta, \beta' \notin \{-\alpha_j, \tau(-\alpha_j) = -\alpha_j\}$.

De plus la fonction est alors antisymétrique.

Définition 3.2.42. *Soit C un amas de racines, qui est donc une \mathbb{Z} -base du réseau Q constitué de n racines mutuellement compatibles. Comme $\Delta(\Phi)$ est le complexe du bord d'un polytope simplicial, tout mur est contenu dans précisément deux facettes. Soit $C' = C - \{\beta\} \cup \{\beta'\}$ l'amas adjacent obtenu en remplaçant dans C la racine β par une autre racine. Par la proposition 3.2.38 ces deux racines sont bien échangeables. On peut donc définir une matrice $B(C)$ dont les coefficients $b_{\alpha, \beta}(C)$ sont définies, pour $\alpha \in C$, par :*

$$b_{\alpha, \beta}(C) = \varepsilon(\beta, \beta') [\beta + \beta' - \beta \uplus \beta' : \alpha]_C,$$

où l'on note $[\gamma : \alpha]_C$ le coefficient de α dans l'écriture de $\gamma \in Q$ sur la base C .

On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.2.43. *Il existe dans $\Delta(\Phi)$ un amas C_0 tel que la matrice $B = B(C_0)$ vérifie les propriétés du théorème 3.2.14.*

Démonstration. On va prendre comme amas C_0 l'amas que l'on privilégie depuis maintenant quelques temps, à savoir $C_0 = -\Pi$. On utilise la définition des coefficients, de ε et la proposition 3.2.39 pour avoir, pour une certaine racine β échangeable avec $-\alpha_j$:

$$\begin{aligned} b_{-\alpha_i, -\alpha_j}(C_0) &= \varepsilon(-\alpha_j, \beta) [\beta - \alpha_j - (\beta \uplus (-\alpha_j)) : -\alpha_i]_{C_0} \\ &= -\varepsilon(j) \left[-\sum_{k \neq j} a_{kj} \alpha_k : -\alpha_i \right]_{C_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ -\varepsilon(j) a_{ij} & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Ce choix de matrice semble donc convenir. Il reste à vérifier les trois autres propriétés décrites dans le plan de la section. On donne ici quelques propriétés pour donner une idée des outils utilisés. Le lecteur pourra consulter [FZ03a, p.15 à 19] pour les preuves et d'autres résultats.

Lemme 3.2.44. *Soit $\beta, \beta' \in \Phi_{\geq -1}$ deux racines échangeables.*

1. *Aucune racine simple négative ne peut être une composante d'amas de $\beta + \beta'$.*
2. *Les vecteurs $\beta + \beta'$ et $\beta \uplus \beta'$ n'ont pas de composantes d'amas commune.*
3. *Les composantes d'amas de $\beta + \beta'$ et $\beta \uplus \beta'$ sont compatibles à la fois avec β et avec β' .*
4. *Toute racine $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$, $\alpha \notin \{\beta, \beta'\}$, est compatible avec les deux racines β et β' si et seulement si elle est compatible avec toutes les composantes d'amas de $\beta + \beta'$ et de $\beta \uplus \beta'$.*
5. *Si $\alpha \in -\Pi$ est compatible avec toutes les composantes d'amas de $\beta + \beta'$, alors elle est compatible avec toutes les composantes d'amas de $\beta \uplus \beta'$.*

Corollaire 3.2.45. *Soit β et β' deux racines presque positives échangeables. Alors il existe deux amas adjacents C et C' tels que $C' = C \setminus \{\beta\} \cup \{\beta'\}$.*

Corollaire 3.2.46. *Soit C et $C' = C \setminus \{\beta\} \cup \{\beta'\}$ deux amas adjacents. Alors toutes les composantes d'amas de $\beta + \beta'$ et de $\beta \uplus \beta'$ sont dans $C \cap C' = C - \{\beta\}$.*

Lemme 3.2.47. *Dans la situation de la définition 3.2.42 on a*

$$b_{\alpha\beta(C)} = \varepsilon(\beta, \beta') \cdot ([\beta + \beta' : \alpha]_{\text{amas}} - [\beta \uplus \beta' : \alpha]_{\text{amas}}).$$

En particulier, le coefficient $b_{\alpha\beta(C)}$ ne dépend que de α, β et β' .

Définition 3.2.48. *On note pour tout $k \geq 0$*

$$\tau_{\varepsilon}^{(k)} = \underbrace{\tau_{\pm} \dots \tau_{-\varepsilon} \tau_{\varepsilon}}_{k \text{ facteurs}}.$$

En vertu du théorème 3.2.24, pour $\varepsilon \in \{+, -\}$ et $\beta \in \Phi_{\geq -1}$ on définit $k_{\varepsilon}(\beta)$ comme le plus petit entier positif k tel que $\tau_{\varepsilon}^{(k)} = \tau_{\varepsilon}^{(k+1)} \in -\Pi$.

Lemme 3.2.49. *On se donne β, β' deux racines échangeables et un signe ε . On a alors :*

$$(\tau_{\varepsilon}^{(k)})^{-1}(\tau_{\varepsilon}^{(k)}(\beta) + \tau_{\varepsilon}^{(k)}(\beta')) = \begin{cases} \beta + \beta' & \text{si } 0 \leq k \leq \min(k_{\varepsilon}(\beta), k_{\varepsilon}(\beta')), \\ \beta \uplus \beta' & \text{si } \min(k_{\varepsilon}(\beta), k_{\varepsilon}(\beta')) < k \leq \max(k_{\varepsilon}(\beta), k_{\varepsilon}(\beta')). \end{cases}$$

Lemme 3.2.50. *Pour $\tau \in \{\tau_+, \tau_-\}$ on a $b_{\tau\alpha, \tau\beta}(\tau C) = -b_{\alpha\beta}(C)$.*

Les complexes $\Delta(\Phi)$ et $\Delta(\mathcal{A})$

Preuve d'une bijection. On se donne encore A une matrice de Cartan indécomposable de système de racine Φ (irréductible). On note $\mathcal{A} = \mathcal{A}(B_0, p_0)$ l'algèbre amassée de type fini qui apparaît dans le théorème 3.2.14. On choisit pour graine initiale, en accord avec l'esquisse de preuve précédente, $\Sigma_0 = (X_0, p_0, B_0)$ en identifiant B_0 avec la matrice $B(C_0)$ prise à l'amas $C_0 = -\Pi$. Cela nous donne un semis en C_0 . Par la seconde partie de la proposition 3.2.18, on a donc une surjection $\alpha \mapsto x[\alpha]$ entre $\Phi_{\geq -1}$ et l'ensemble des variables d'amas dans \mathcal{A} . A priori toutes ces variables $x[\alpha]$ ne sont pas forcément distinctes.

Théorème 3.2.51. *Il existe une unique bijection $\alpha \mapsto x[\alpha]$ entre les racines presque positives dans Φ et les variables d'amas dans \mathcal{A} qui vérifie en plus que, pour tout $\alpha \in \Phi_{\geq -1}$, la variable d'amas $x[\alpha]$ s'exprime en terme de l'amas initial $X_0 = \{x_i, i \in I\}$ comme*

$$x[\alpha] = \frac{P_{\alpha}(X_0)}{x^{\alpha}}, \tag{3.2.3}$$

où P_{α} est un polynôme sur $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ de coefficient constant non nul. Sous cette bijection, $x[-\alpha_i] = x_i$.

Remarque 3.2.52. En fait, dans ce théorème, tous les polynômes P_α sont des polynômes en les éléments de \mathcal{P} (cf. définition 3.2.4) à coefficients positifs. La preuve est dans [FZ03a].

Démonstration. On prouve la formule (3.2.3) par récurrence sur

$$k(\alpha) = \min(k_+(\alpha), k_-(\alpha)) \geq 0$$

(voir la définition 3.2.48). Si $k(\alpha) = 0$ alors α est une racine simple négative, donc il n'y a rien à prouver : $P_\alpha = 1$. On peut donc supposer $k = k(\alpha) \geq 1$ et que l'on a (3.2.3) pour toute racine α' avec $k(\alpha') < k$. Par définition de $k(\alpha)$, il existe $j \in J$ tel que

$$\alpha = \tau_{\varepsilon(j)}^{(k)}(-\alpha_j) = \tau_{-\varepsilon(j)}^{(k-1)}(\alpha_j)$$

où la deuxième égalité vient de ce que $\tau_{\varepsilon(j)}(-\alpha_j) = \alpha_j$. Le fait que ce soit $\tau_{\varepsilon(j)}$ et non $\tau_{-\varepsilon(j)}$ provient de cette dernière remarque, du fait que $\tau_{-\varepsilon(j)}(-\alpha_j) = -\alpha_j$ et de la minimalité de k_ε .

Il est clair par calcul direct que α_j et $-\alpha_j$ sont échangeables. Ainsi, si l'on pose $\tau = \tau_{-\varepsilon(j)}^{(k-1)}$, les deux racines $\alpha = \tau(\alpha_j)$ et $\tau(-\alpha_j)$ sont aussi échangeables. On écrit alors la relation d'échange correspondante

$$x[\alpha_j]x[-\alpha_j] = p \prod_{i \neq j, b_{-\alpha_i, -\alpha_j}(C_0) > 0} x[-\alpha_i]^{b_{-\alpha_i, -\alpha_j}(C_0)} + q \prod_{i \neq j, b_{-\alpha_i, -\alpha_j}(C_0) < 0} x[-\alpha_i]^{-b_{-\alpha_i, -\alpha_j}(C_0)},$$

pour $p, q \in \mathbb{P}$. Mais le calcul fait dans la preuve de la proposition 3.2.43 nous donne que tous les $b_{-\alpha_i, -\alpha_j}(C_0)$ sont de même signe comme tous les a_{ij} sont négatifs. La relation d'échange se réécrit donc :

$$x[\alpha_j]x[-\alpha_j] = p' \prod_{i \neq j} x[-\alpha_i]^{-a_{ij}} + q',$$

pour $p', q' \in \mathbb{P}$. On applique alors $k-1$ fois le lemme 3.2.50 qui nous donne que les ensembles d'exposants de changent pas, et on obtient alors :

$$x[\alpha]x[\tau(-\alpha_j)] = r \prod_{i \neq j} x[\tau(-\alpha_i)]^{-a_{ij}} + s, \quad (3.2.4)$$

pour $r, s \in \mathbb{P}$.

Si $k = 1$, on a $\alpha = \alpha_j$ et l'équation (3.2.4) donne :

$$x[\alpha] = \frac{r \prod_{i \neq j} x_i^{-a_{ij}} + s}{x_j},$$

établissant ainsi (3.2.3). On peut donc supposer $k \geq 2$.

Dans ce cas, les racines $\alpha' \neq \alpha$ qui apparaissent dans l'équation (3.2.4) sont :

- positives,
- de longueur $k(\alpha') < k$.

Pour montrer le premier point, on utilise là encore que $a_{ij} = 0$ pour $\varepsilon(i) = \varepsilon(j)$, de sorte que tous les indices k pour lesquels $a_{kj} \neq 0$ sont dans $I_{-\varepsilon(i)}$ et donc l'application de $\tau_{-\varepsilon(i)}$ va bien les faire basculer dans les racines positives. Pour le second point on utilise simplement le fait que $k-1$ appartient à l'ensemble que $k(\alpha')$ minimise.

On définit :

$$\gamma = \sum_{i \neq j} (-a_{ij})\tau(-\alpha_i),$$

et on applique l'hypothèse de récurrence pour réécrire (3.2.4) sous la forme :

$$x[\alpha] = x^{\tau(-\alpha_j) - \gamma} \frac{q \prod_{i \neq j} P_{\tau(-\alpha_i)}^{-a_{ij}} + r x^\gamma}{P_{\tau(-\alpha_i)}},$$

où tous les polynômes $P_{\alpha'}$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ en les variables de l'amas initial X_0 à terme constant non nul. On utilise alors le lemme suivant

Lemme 3.2.53. Soit P et Q deux polynômes (en un nombre quelconque de variables) à coefficients dans un anneau intègre S , de termes constant non nul, a et b respectivement. Si le quotient P/Q est un polynôme de Laurent sur S , alors c'est en fait un polynôme sur S de terme constant a/b .

Démonstration. On spécifie une des variables des polynômes P et Q , que l'on note X . Par hypothèse on peut écrire :

$$\frac{P}{Q} = \sum_{n \geq -a} a_n X^n,$$

avec $a_{-a} \neq 0$, où l'on a mis toutes les autres variables dans les coefficients a_n éventuellement. Dès lors $P = Q \sum_{n \geq -a} a_n X^n$. Comme $Q(0) = b \neq 0$, on a donc dans P le terme $ba_{-a}X^{-a}$ qui est le seul terme intervenant possiblement dans P en X^{-a} (comme il n'y a pas de X dans a_{-a}). Dès lors, comme P est un polynôme, on a nécessairement que $a = 0$. En continuant par récurrence sur le nombre de variables, on en déduit le théorème. \square

On utilise alors le théorème 3.1.17 du phénomène de Laurent qui nous dit que $x[\alpha]$ est un polynôme de Laurent.

Le lemme nous dit alors que la fraction $\frac{q \prod_{i \neq j} P_{\tau(-\alpha_i)}^{-a_{ij}} + \tau x^\gamma}{P_{\tau(-\alpha_i)}}$ est un polynôme sur $\mathbb{Z}\mathbb{P}$ à coefficient constant non nul. Il suffit alors pour conclure la preuve de calculer l'exposant au dénominateur :

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{i \neq j} (-a_{ij}) \tau(-\alpha_i) \\ &= \tau\left(\sum_{i \neq j} a_{ij} \alpha_i\right) \quad \text{par linéarité comme on reste dans le cône totalement négatif} \\ &= \tau(\alpha_j \uplus (-\alpha_j)) \quad \text{par calcul} \\ &= \tau(\alpha_j) + \tau(-\alpha_j) \quad \text{par le lemme 3.2.49} \\ &= \alpha + \tau(-\alpha_j) \quad \text{par définition} \end{aligned} \quad \square$$

Quelques théorèmes supplémentaires qui en découlent. Le théorème 3.2.51 nous donne finalement que cette application $\alpha \mapsto x[\alpha]$ est une surjection entre deux ensembles de même cardinal, donc une bijection. On a donc que l'application $C \mapsto \Sigma(C)$ est une bijection. On a dès lors un isomorphisme entre Γ et le graphe d'échange de \mathcal{A} , et entre $\Delta(\Phi)$ et le complexe d'amas de \mathcal{A} . Cela nous donne les deux théorèmes suivants.

Théorème 3.2.54. *Toute graine (X, B, p) dans \mathcal{A} est uniquement déterminée par son amas X . Pour tout amas X et tout $x \in X$, il existe un unique amas X' avec $X \cap X' = X - \{x\}$.*

Théorème 3.2.55. *Sous cette bijection $\Phi_{\geq -1} \rightarrow \aleph$ du théorème 3.2.51, le complexe d'amas $\Delta(\mathcal{A})$ est identifié au complexe simplicial $\Delta(\Phi)$. En particulier les amas de l'un sont bien les amas de l'autre. De plus le complexe d'amas ne dépend pas du semicorps des coefficients \mathbb{P} ni du choix des coefficients p_0 de la graine initiale.*

On obtient aussi, avec un peu plus de travail, le théorème suivant.

Théorème 3.2.56. *La forme exacte de chaque relation d'échange (3.2.1) dans \mathcal{A} (c'est-à-dire les variables d'amas, les exposants et les coefficients qui apparaissent à droite) ne dépendent que de la paire ordonnée (z, \bar{z}) de variables d'amas, et non du choix des amas (ou graines) qui les contiennent.*

Démonstration. La preuve est une conséquence du lemme 3.2.47. Plus précisément on associe à chaque vecteur $\gamma \in Q$ un monôme en les variables d'amas :

$$x[\gamma] = \prod_{\alpha} x[\alpha]^{m_\alpha}, \quad m_\alpha = [\gamma : \alpha]_{\text{amas}}.$$

Au vu du lemme 3.2.47, de la bijection $\alpha \mapsto x[\alpha]$ et de la relation d'échange 3.2.1, on en déduit que ces relations d'échange correspondant à deux amas adjacents C et $C - \{\beta\} \cup \{\beta'\}$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$x[\beta]x[\beta'] = p_\beta^{\varepsilon(\beta, \beta')} (C)x[\beta + \beta'] + p_\beta^{-\varepsilon(\beta, \beta')} (C)x[\beta \uplus \beta'],$$

pour certains coefficients $p_{\beta}^{\pm}(C) \in \mathbb{P}$. Ainsi les variables d'amas intervenant dans la relation d'échange, ainsi que leurs exposants, sont entièrement déterminés par β et β' . Il en est de même pour les coefficients $p_{\beta}^{\pm}(C)$ comme les variables d'amas à droite sont algébriquement indépendantes. \square

Interprétation géométrique en type A_n, B_n, C_n, D_n

Dans cette partie on présente des modèles géométriques pour les complexes d'amas de type A_n, B_n, C_n et D_n .

Type A_n . On numérote l'ensemble des racines simples de 1 à n . Les racines positives sont alors les $\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$. Pour $i \in [n]$ on pose $\varepsilon(i) = (-1)^{i-1}$. On retrouve ici l'exemple des triangulations d'un $(n+3)$ -gone traité dans la première partie. Plus précisément on se donne un $(n+3)$ -gone et on numérote ses sommets dans le sens antihoraire P_1, \dots, P_{n+3} . Pour $1 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$ on identifie la racine simple $-\alpha_{2i-1}$ avec la diagonale $[P_i, P_{n+3-i}]$; et pour $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ on identifie la racine simple $-\alpha_{2i}$ avec la diagonale $[P_{i+1}, P_{n+3-i}]$. Ces diagonales forment un « serpent » comme le montre la figure 3.2.8.

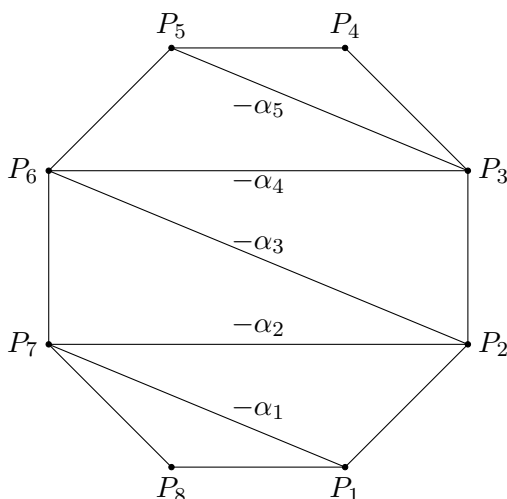
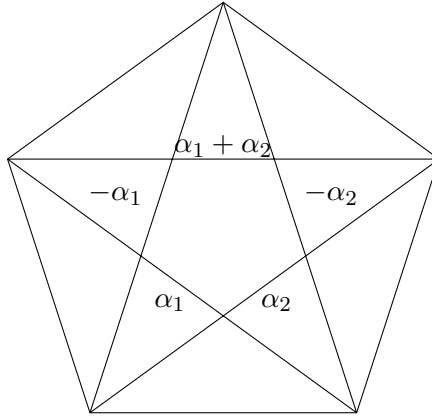


FIGURE 3.2.8 – Le « serpent » dans A_5 .

On identifie alors les autres diagonales aux racines positives. Plus précisément on associe à α_{ij} l'unique diagonale qui croise les diagonales $-\alpha_i, -\alpha_{i+1}, \dots, -\alpha_j$ mais aucune des autres diagonales $-\alpha_k$ du serpent. Par « croiser » on entend « s'intersecter dans l'intérieur du polygone ». La figure 3.2.9 donne l'étiquetage des diagonales pour A_2 .

Proposition 3.2.57. Soit Φ un système de racines de type A_n .

1. La transformation τ_+ (resp. τ_-) agit sur $\Phi_{\geq -1}$ par la réflexion orthogonale du $(n+3)$ -gone qui envoie le sommet P_i sur P_{n+4-i} (resp. sur P_{n+3-i} , avec la convention $P_0 = P_{n+3}$). Ainsi $\tau_-\tau_+$ (resp. $\tau_+\tau_-$) agit comme la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n+3}$ dans le sens horaire (resp. dans le sens antihoraire). Voir figure 3.2.10.
2. Pour $\alpha, \beta \in \Phi_{\geq -1}$, le degré de compatibilité $(\alpha \parallel \beta)$ est égal à 1 si les diagonales α et β se croisent, et à 0 sinon.

FIGURE 3.2.9 – Diagonales dans A_2 .

3. Les ensembles compatibles sont les collections de diagonales qui ne se croisent pas deux à deux. Ainsi les amas sont en bijection avec les triangulations du $(n + 3)$ -gone.
4. Deux triangulations sont adjacentes dans le graphe d'échange si et seulement si on peut déduire l'une de l'autre d'un flip, i.e. l'échange d'une diagonale par une autre dans un quadrilatère.
5. Le complexe d'amas est isomorphe au complexe de bord de l'associaèdre, ou polytope de Stasheff. Voir figure 3.2.11.

Démonstration. 1. Pour ce premier point on utilise le fait que

$$\tau_\varepsilon(-\alpha_i) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } i \in I_\varepsilon \\ -\alpha_i & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau_\varepsilon(\alpha_i) = \begin{cases} -\alpha_i & \text{si } i \in I_\varepsilon \\ \alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1} & \text{sinon} \end{cases},$$

où l'on a posé $\alpha_0 = \alpha_{n+1} = 0$. On vérifie alors sur le reste de $\Phi_{\geq -1}$ par un calcul direct avec ces formules en utilisant la linéarité.

Les autres racines sont les $\alpha[i, j] = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j$. Par exemple si on se donne $i \leq j$, $i, j \in I_\varepsilon$, alors $\tau_\varepsilon(\alpha[i, j]) = \alpha[i + 1, j - 1]$ ce qui coïncide bien avec la représentation géométrique. On procède de même pour les autres cas en fonction de $\varepsilon(i)$ et $\varepsilon(j)$.

2. Pour le second point, on constate qu'il est vérifié quand on calcule le degré de compatibilité $(\alpha \parallel \beta)$ avec $\alpha \in -\Pi$ et on utilise le premier point pour dire que les croisements de diagonales sont invariants par τ_+ et τ_- pour conclure.
3. Découle logiquement de 2.
4. Les deux racines que l'on a échangées étaient bien échangeables comme elles se croisent. On peut donc bien passer de l'amas contenant l'une à l'amas contenant l'autre en une seule mutation par l'étude faite dans les parties précédentes. \square

Remarque 3.2.58. Le théorème 3.2.57 nous donne encore plus. On savait que le groupe $D = \langle \tau_+, \tau_- \rangle$ était un groupe diédral (car engendré par deux involutions). La description du théorème nous donne que c'est vraiment le groupe diédral du $(n + 3)$ -gone. En particulier, grâce au théorème 3.2.24, on en déduit que le nombre d'orbites de $\Phi_{\geq -1}$ sous D est $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ où $\lceil \cdot \rceil$ désigne la partie entière supérieure.

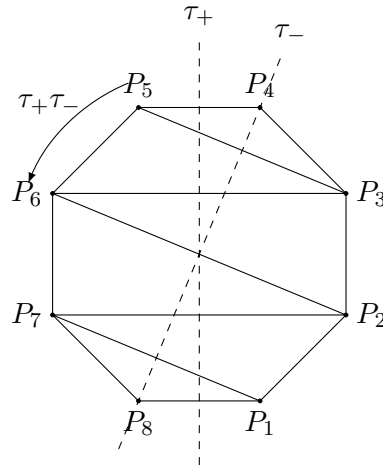


FIGURE 3.2.10 – Action de τ_+ , τ_- et $\tau_+\tau_-$.

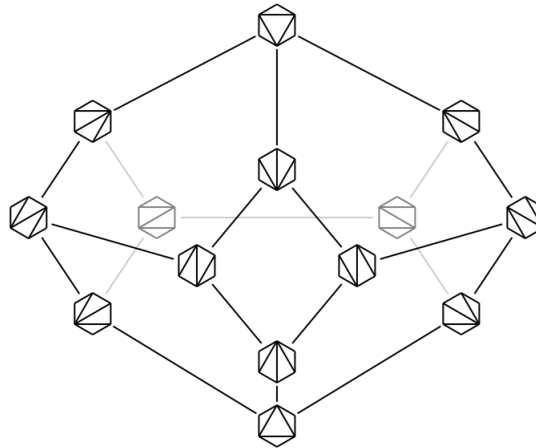
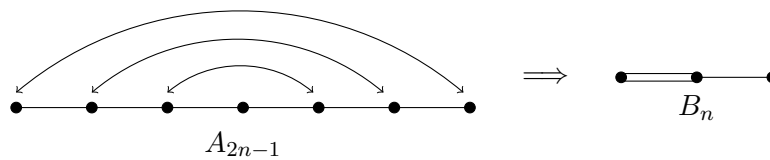


FIGURE 3.2.11 – Associaèdre de dimension 3. Image extraite de [FR07].

Types B_n et C_n . On a un résultat général en théorie de Coxeter qui nous donne qu’il existe un « pliage » de A_{2n-1} sur B_n :



Ce pliage correspond à une application ρ sur l’ensemble des racines qui envoie la racine $\tilde{\alpha}_i$ de A_{2n-1} sur sa racine $\tilde{\alpha}_{2n-i}$. Les orbites sous l’action de ρ de ces racines sont en correspondance avec les racines du système de type B_n .

Ces éléments nous motivent pour l’interprétation géométrique suivante. On se donne un $(2n + 2)$ -gone. L’application ρ correspond géométriquement à la symétrie centrale. Dès lors on identifie un sommet P_i avec son sommet opposé que l’on baptise $-P_i$.

Les diagonales qui nous intéressent sont d'une part les diamètres $[P, -P]$, d'autre part les paires de diagonales centralement symétriques ($[P, Q], [-P, -Q]$) (qui ne soient pas des diamètres). On identifie alors les racines $-\alpha_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$, avec la paire de diagonales représentant $-\tilde{\alpha}_i$ et $-\tilde{\alpha}_{2n-i}$, tandis que α_n correspond au diamètre $-\tilde{\alpha}_n$.

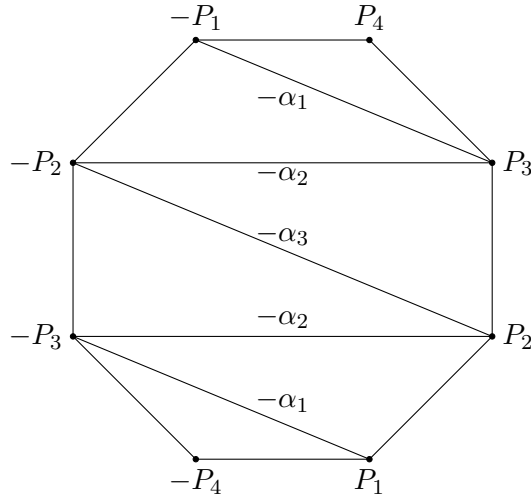


FIGURE 3.2.12 – Interprétation géométrique en type B_3 .

Proposition 3.2.59. *Soit Φ un système de racines de type B_n ou C_n .*

1. *Les transformations τ_+ , τ_- , et leurs composés ont la même signification géométrique qu'en type A_n .*
2. *Pour $\alpha, \beta \in \Phi_{\geq -1}$, le degré de compatibilité ($\alpha \parallel \beta$) en type B_n (resp. C_n) est égal au nombre de croisements d'une diagonale représentant α (resp. β) avec les diagonales représentant β (resp. α). Ainsi toute racine positive $\beta = \sum_i b_i \alpha_i$ est représenté par l'unique diamètre tel que chaque diagonale représentant $-\alpha_i$ (resp. β) croise les diagonales représentant β (resp. $-\alpha_i$) en précisément b_i points. Voir figure 3.2.13.*
3. *Les amas pour le type B_n et C_n sont en bijection avec les triangulations centralement symétriques du $(2n+2)$ -gone.*
4. *Deux triangulations sont adjacentes dans le graphe d'échange si et seulement si on peut déduire l'une de l'autre par l'action d'un flip sur un diamètre ou d'une paire de flips centralement symétriques.*
5. *Le complexe d'amas est isomorphe au complexe de bord du cycloèdre, ou polytope de Simion. Voir figure 3.2.14.*

Type B_n	Type C_n	Diamètres
α_1	α_1	$[\pm P_2, \mp P_4]$
α_2	α_2	$[\pm P_1, \mp P_2]$
$\alpha_1 + \alpha_2$	$\alpha_1 + \alpha_2$	$[\pm P_2, \pm P_4]$
$\alpha_2 + 2\alpha_3$	$\alpha_2 + \alpha_3$	$[\pm P_1, \pm P_3]$
$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$	$[\pm P_3, \mp P_4]$
$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$	$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$	$[\pm P_1, \pm P_4]$
α_3	α_3	$[P_3, -P_3]$
$\alpha_2 + \alpha_3$	$2\alpha_2 + \alpha_3$	$[P_1, -P_1]$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$	$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$	$[P_4, -P_4]$

FIGURE 3.2.13 – Racines de $\Phi_{\geq -1}$ en type B_3 et C_3 .

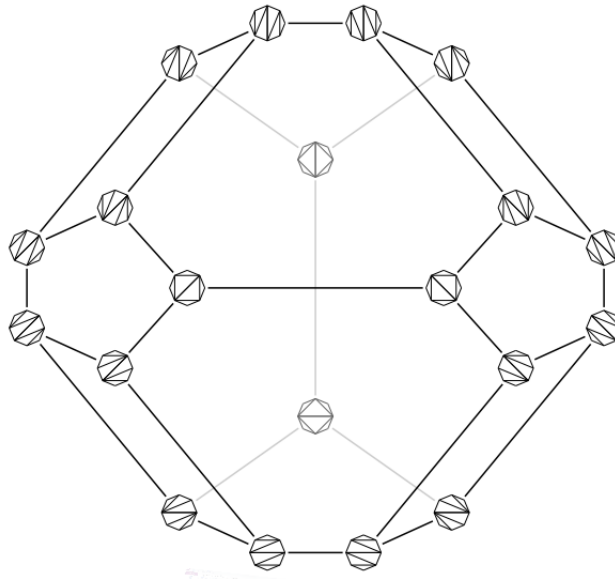
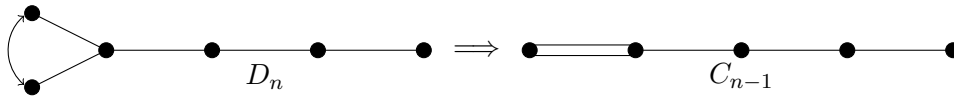


FIGURE 3.2.14 – Le cyclohèdre de dimension 3. Image extraite de [FR07].

Type D_n . Pour le type D_n on utilise un autre pliage : $D_n \rightarrow C_{n-1}$ obtenu de la façon suivante :



Ce pliage est une surjection π entre Φ le système de racine de D_n et Φ' celui de C_{n-1} . On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de Φ , et $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-1}$ celles de Φ' . La surjection π a une fibre de taille 2 sur l'ensemble à n éléments :

$$D = \{-\alpha'_{n-1}\} \cup \left\{ \sum_{j=i}^{n-1} \alpha'_j \mid i \in [n-1] \right\} \subset \Phi'_{\geq -1},$$

et est injective sur le reste. Dans la correspondance entre les racines presque positives et les diamètres et paires de diagonales centralement symétriques du $2n$ -gone, cet ensemble D

correspond exactement à l'ensemble des diamètres. On décide alors d'écrire que $\Phi_{\geq -1}$ est l'union disjointe $\Phi'_{\geq -1} \cup D'$ où D' est un ensemble supplémentaire de n éléments associé à des diamètres du $2n$ -gone. Un point de vue classique sur cette question consiste à dire que les diamètres sont colorés parmi un choix de deux couleurs. Ce point de vue est très bien expliqué dans [FZ03b] et [FZ03a] où le lecteur trouvera les détails de cette interprétation géométrique.

On propose une autre interprétation géométrique, tirée de [CP14]. Au centre du $2n$ -gone on creuse un trou circulaire assez petit. On considère qu'un diamètre (qui passe donc au centre du polygone) doit alors choisir de passer par la droite ou par la gauche. Il est à noter qu'il y a une discontinuité au centre qui se produit sur une même diagonale. Voir le dessin ci-dessous. Les segments de diamètre de même couleur correspondent en fait au même diamètre. On voit

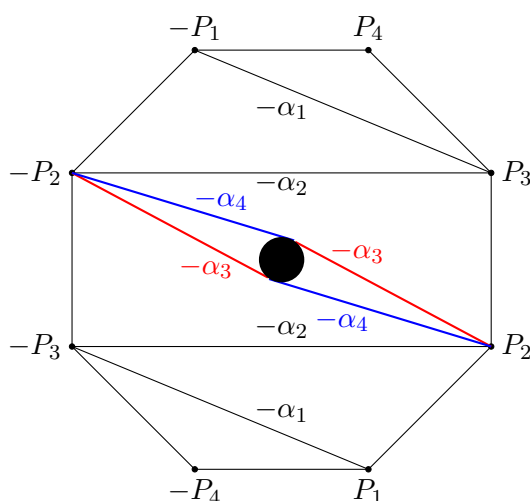


FIGURE 3.2.15 – Réalisation géométrique en D_4 .

que si l'on choisit une extrémité d'un diamètre et que l'on va vers le trou, le caractère « va à gauche » ou « va à droite » ne dépend pas de l'extrémité. Cela entraîne cette cassure dans la diagonale, mais est très pratique pour la suite...

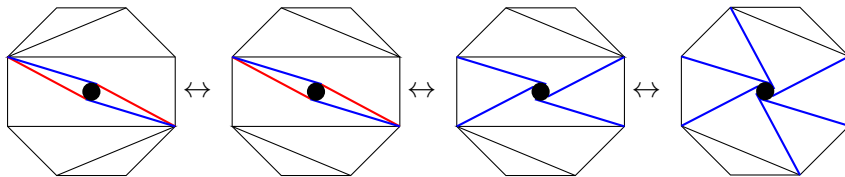
Étant donné que le pliage arrivait sur C_{n-1} , la façon de nommer un grand diamètre ou une paire de diagonales centralement symétriques est la même : on prend un des représentants de la diagonale qui nous intéresse (dans le cas d'un diamètre, une seule moitié), et on regarde combien de fois elle croise le « serpent ». Pour les diamètres, il faut aussi choisir le sens de parcours autour du trou. À titre d'exemple, voici la correspondance dans le type D_4 , avec C_3 en vis à vis.

Type C_3	Type D_4	Diamètres
α_1	α_1	$[\pm P_2, \mp P_4]$
α_2	α_2	$[\pm P_1, \mp P_2]$
$\alpha_1 + \alpha_2$	$\alpha_1 + \alpha_2$	$[\pm P_2, \pm P_4]$
$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$	$\alpha_2 + \alpha_3$	$[\pm P_1, \pm P_3]$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$	$[\pm P_3, \mp P_4]$
$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$	$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$	$[\pm P_1, \pm P_4]$
α_3	α_3	$[P_3, -P_3]^g$
	α_4	$[P_3, -P_3]^d$
$\alpha_2 + \alpha_3$	$2\alpha_2 + \alpha_3$	$[P_1, -P_1]^g$
	$2\alpha_2 + \alpha_4$	$[P_1, -P_1]^d$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$	$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$	$[P_4, -P_4]^g$
	$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4$	$[P_4, -P_4]^d$

FIGURE 3.2.16 – Racines de $\Phi_{\geq -1}$ en type C_3 et D_4 .

Proposition 3.2.60. *Soit Φ un système de racines de type D_n .*

1. Les transformations τ_+ , τ_- , et leurs composés ont la même signification géométrique qu'en type A_n , suivie simplement le cas échéant d'une inversion gauche/droite.
2. Pour $\alpha, \beta \in \Phi_{\geq -1}$, le degré de compatibilité ($\alpha \parallel \beta$) est égal au nombre de croisements d'une diagonale représentant β avec les diagonales représentant α .
3. Les amas pour le type D_n sont en bijection avec les pseudotriangulations centralement symétriques du $2n$ -gone par des diagonales qui ne se croisent pas.
4. Deux pseudotriangulations sont adjacentes dans le graphe d'échange si et seulement si on peut déduire l'une de l'autre par l'action d'un flip sur un diamètre ou d'une paire de flips centralement symétriques.
5. Le complexe d'amas est le complexe de bord de l'associaèdre généralisé de type D .

FIGURE 3.2.17 – Les différents type de flips en type D_4 .

3.2.3 « Unicité »

Plan de la section

Dans la partie précédente, on a associé à toute matrice de Cartan de type fini une algèbre amassée de type fini. Il nous reste à prouver les deux théorèmes 3.2.17 et 3.2.16. Le premier montrera qu'une algèbre amassée de type fini est fortement isomorphe à l'une des algèbres amassées associée à une matrice de Cartan, et le second que toutes ces algèbres amassées construites dans la section 3.2.2 sont différentes. Les trois premières parties traitent la première question, la dernière règle la seconde question.

Pour le premier problème, on utilise une méthode qui est très proche de celle de la classification des groupes de Coxeter comme on peut la trouver dans [Hum90]. Les étapes en sont les suivantes :

1. Associer à chaque groupe de Coxeter un graphe.
2. Exhiber un critère sur les groupes de Coxeter stable par sous-graphe.
3. À partir de ce critère, lister les sous-graphes « interdits ».
4. Classifier les graphes autorisés en s'interdisant ces sous-graphes.

On va raisonner de la même façon ici. La différence est que notre objet de base, au lieu d'être un objet simple, est un ensemble de matrices obtenues par mutations à partir d'une seule. Le critère que l'on choisira devra prendre en compte cette possibilité de mutation. Le plan de la section est le suivant :

1. Introduire la notion de 2-finitude qui sera un critère pour la classification.
2. Associer à une matrice un graphe. Voir comment ce graphe se comporte par mutations.
3. Trouver les sous-graphes interdits. On divisera cela en deux temps : les arbres et les cycles. Cette liste de sous-graphes interdits va d'ailleurs correspondre en grande partie avec celle de la classification des groupes de Coxeter.
4. Classifier en s'interdisant ces sous-graphes.

Une dernière remarque avant de commencer la preuve. Au lieu de prouver le théorème dans la forme 3.2.16 on va plutôt montrer l'une des équivalences suivantes.

Théorème 3.2.61. *Soit \mathcal{A} une algèbre amassée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) \mathcal{A} est de type fini ;
- (ii) L'ensemble \aleph des variables d'amas est fini.
- (iii) Pour toute graine (X, B, p) dans \mathcal{A} , les coefficients de la matrice $B = (b_{xy})$ vérifient les inégalités $|b_{xy}b_{yx}| \leq 3$, pour tout $x, y \in X$.
- (iv) $\mathcal{A} = \mathcal{A}(B_0, p_0)$ pour une certaine donnée de la forme du théorème 3.2.14.

Essentiellement on vient de prouver (iv) \Rightarrow (i), et (i) \Rightarrow (ii) est évident par définition. La preuve de (ii) \Rightarrow (iii) est technique et se déduit de [FZ02, Théorème 6.1]. On se contentera donc de montrer (iii) \Rightarrow (iv) pour prouver le théorème 3.2.16.

La totalité des preuves de ces parties sont issues de [FZ03a], les rares différences étant essentiellement les dessins qui peuvent aider à la compréhension.

2-finitude et diagrammes

Définition 3.2.62. Deux matrices B et B' sont dites équivalentes par mutations s'il existe une suite de mutations suivie d'une permutation simultanée sur les lignes et colonnes qui transforme B en B' .

Définition 3.2.63. Une matrice carrée réelle $B = (b_{ij})$ est dite 2-finie si elle est à coefficients entiers, et telle que toute matrice $B' = (b'_{ij})$ équivalente par mutation à B est à signes antisymétriques et vérifie $|b'_{ij}b'_{ji}| \leq 3$ pour tout i et j . (En particulier B elle-même le vérifie.)

Dans ce nouveau langage, l'implication (iii) \Rightarrow (iv) du théorème 3.2.61 se reformule comme suit.

Théorème 3.2.64. Toute matrice 2-finie B est équivalente par mutation à une matrice B_0 satisfaisant les conditions du théorème 3.2.14.

La réciproque de ce théorème est vraie : B_0 est 2-finie en vertu de (iv) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii). Nous allons prouver ce théorème dans les sections qui suivent. Cette section est consacrée au résultat technique suivant.

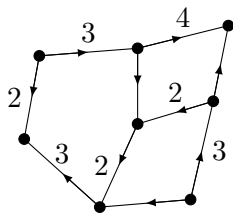
Proposition 3.2.65. Toute matrice 2-finie est antisymétrisable.

La définition d'antisymétrisable que nous utiliserons sera la suivante prioritairement : il existe D une matrice diagonale à coefficients strictement positifs telle que DB soit antisymétrique. Cela revient à demander qu'il existe $d_1, \dots, d_n > 0$ tels que pour tout i, j , on ait $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$.

Remarque 3.2.66. On pourra dans la suite toujours supposer B antisymétrisable pour notre propos.

Définition 3.2.67. Soit B une matrice à signes antisymétriques. On définit alors son diagramme, qui est le graphe orienté à poids $\Gamma(B)$ d'ensemble de sommets I tel qu'une arête est dirigée de i vers j si et seulement si $b_{ij} > 0$, et on associe alors à l'arête le poids $|b_{ij}b_{ji}|$. (On convient que le poids est 1 quand il est omis.)

Plus généralement on appelle diagramme tout graphe fini orienté sans boucles ni arêtes multiples et dont on a attribué aux arêtes des poids strictement positifs réels.



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 3.2.18 – Exemple de diagramme.

Remarque 3.2.68. On voit facilement que $\Gamma(B)$ est connexe si et seulement si B est indécomposable.

Lemme 3.2.69. Une matrice $B = (b_{ij})$ est antisymétrisable si et seulement si d'une part elle est à signes antisymétriques, et d'autre part pour tout $k \geq 3$, et tout i_1, \dots, i_k elle vérifie :

$$b_{i_1 i_2} b_{i_2 i_3} \dots b_{i_k i_1} = (-1)^k b_{i_2 i_1} b_{i_3 i_2} \dots b_{i_1 i_k} \quad (3.2.5)$$

Démonstration. Le sens direct est facile en utilisant l'existence de $d_1, \dots, d_n > 0$ tels que pour tout i, j , $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$.

Soit donc B une matrice à signes antisymétriques qui vérifie (3.2.5). Si B est décomposable, i.e. peut s'écrire comme une somme directe de blocs diagonaux de deux sous-matrices propres, alors les deux blocs n'interfèrent pas entre eux dans la condition d'antisymétrisabilité. On peut donc supposer B indécomposable, et donc $\Gamma(B)$ connexe. On note alors T un de ses arbres couvrant. On construit alors progressivement, en partant d'un sommet quelconque de T puis en se déplaçant à partir de là, une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs d_1, \dots, d_n , telle que $d_i b_{ij} = -d_j b_{ji}$ (*) pour toute arête (i, j) dans T . En effet par définition d'un arbre couvrant on passe ainsi une fois et une seule par chaque sommet. De plus toute arête (i, j) de $\Gamma(B)$ qui n'est pas dans T appartient alors à un cycle dans lequel le reste des arêtes est dans T . En utilisant (3.2.5) on en déduit que (*) est également valable pour toute ces arêtes. Ainsi DB est antisymétrique. \square

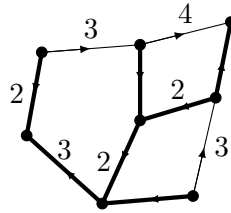
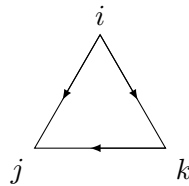


FIGURE 3.2.19 – Arbre couvrant du diagramme $\Gamma(B)$.

Lemme 3.2.70. Soit B une matrice 2-finie. Alors les arêtes de tout triangle dans $\Gamma(B)$ sont orientées de façon cyclique.

Démonstration. Supposons à l'inverse que $b_{ij}, b_{ik}, b_{kj} > 0$ pour des indices distincts i, j, k . (cf. dessin ci-dessous).



Alors dans la matrice $B' = \mu_k(B)$ on a $b'_{ij} = b_{ij} + b_{ik} b_{kj} \geq 2$ et $b'_{ji} = b_{ji} - b_{ki} b_{jk} \leq -2$, ce qui viole la 2-finitude de B . \square

Lemme 3.2.71. Soit B une matrice 2-finie. Alors

$$b_{ij} b_{jk} b_{ki} = -b_{ji} b_{kj} b_{ik}, \quad (3.2.6)$$

pour tout i, j, k distincts. De plus, dans tout triangle de $\Gamma(B)$, les ensembles de poids ne peuvent être que $\{1, 1, 1\}$ ou $\{2, 2, 1\}$.

Démonstration. On fixe des indices distincts i, j, k . Soit i, j, k n'est pas un vrai triangle, c'est-à-dire que l'une des entrées est nulle, et le lemme est clair. Soit on a un vrai triangle, et le lemme 3.2.70 nous permet de supposer que B est une matrice 3×3 de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & -c_2 \\ -a_2 & 0 & b_1 \\ c_1 & -b_2 & 0 \end{pmatrix},$$

où a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 et c_2 sont des entiers strictement positifs. (Les signes venant du fait que l'on a un triangle orienté.) Quitte à renuméroter on peut supposer que le coefficient de plus grande valeur absolue dans B est $-c_2$. Dès lors, on va montrer que l'on a

$$c_1 = a_2 b_2 \quad \text{et} \quad c_2 = a_1 b_1,$$

ce qui impliquera $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2$ et prouvera donc (3.2.6). En effet, si l'on applique la mutation μ_2 à B , on obtient

$$\mu_2(B) = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & a_1 b_1 - c_2 \\ a_2 & 0 & -b_1 \\ c_1 - a_2 b_2 & b_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En appliquant le lemme 3.2.70 à $\mu_2(B)$ on conclut que pour avoir la bonne orientation on a nécessairement

$$a_1 b_1 - c_2 \geq 0, \quad a_2 b_2 - c_1 \geq 0,$$

où les deux inégalités sont simultanément strictes ou des égalités. Montrons qu'il n'est pas possible que ce soit des inégalités strictes. Sinon on aurait $a_2 b_2 > c_1 \geq 1$, d'où $\max(a_2, b_2) \geq 2$. Alors $a_1 b_1 > c_2 \geq \max(a_1, b_1)$ (par hypothèse sur c_2) impliquant $a_1 \geq 2$ et $b_1 \geq 2$. Mais alors $\max(a_1 a_2, b_1 b_2) \geq 4$ ce qui contredit la 2-finitude de B .

Il reste à voir quels sont les ensembles de poids $\{a_1 b_1, a_2 b_2, c_1 c_2\}$ possibles. En utilisant $a_1 b_1 = c_2$, $a_2 b_2 = c_1$ et les inégalités $a_1 a_2 \leq 3$, $b_1 b_2 \leq 3$ et $c_1 c_2 \leq 3$ on obtient facilement le cas $\{1, 1, 1\}$ quand $c_2 = 1$ et le cas $\{2, 2, 1\}$ quand $c_2 = 2$. Si $c_2 = 3$ alors on trouve $c_1 = a_2 = b_2 = 1$ et $\{a_1, b_1\} = \{3, 1\}$. Si, par exemple, $a_1 = 3$ et $b_1 = 1$ on a $B' = \mu_1(B)$ qui vérifie $|b'_{23} b'_{32}| = 4$ ce qui contredit la 2-finitude. L'autre cas est identique. \square

Démonstration de la proposition 3.2.65. Pour prouver 3.2.65 il nous suffit de montrer que toute matrice 2-finie vérifie la relation (3.2.5). Supposons que cela ne soit pas le cas, et parmi toutes les instances où (3.2.5) n'est pas vérifiée pour une certaine matrice 2-finie B , on prend k de plus petite valeur possible, et on appelle B la matrice associée.

Comme (3.2.5) n'est pas vérifiée, nécessairement tous les $b_{i_j i_{j+1}}$ sont non nuls. On peut donc parcourir $i_1, i_2, \dots, i_k, i_1$ le long d'un cycle. Par minimalité de k , il ne peut y avoir de cordes (i.e. $b_{i_j i_m} = 0$ pour j, m non consécutifs). Cela revient à dire que le diagramme $\Gamma(B)$ restreint à ses sommets i_1, \dots, i_m est un cycle sans cordes.

On prend deux arêtes consécutives dans ce cycle qui soient orientés dans le même sens (i.e. $b_{i_{j-1} i_j} b_{i_j i_{j+1}} > 0$). Si l'on ne peut trouver une telle paire, en appliquant une mutation de matrice à un sommet on voit par le calcul que cela conduit à inverser les deux flèches de ce sommet et à ne pas toucher aux autres, ce qui nous donne bien une telle paire. (Quand on aura défini les mutations de diagrammes, on n'aura pas besoin de passer par le calcul.) Par le lemme 3.2.71 on a forcément $k \geq 4$, et donc i_{j-1} et i_{j+1} ne sont pas reliés (i.e. $b_{i_{j-1} i_{j+1}} = 0$). On applique

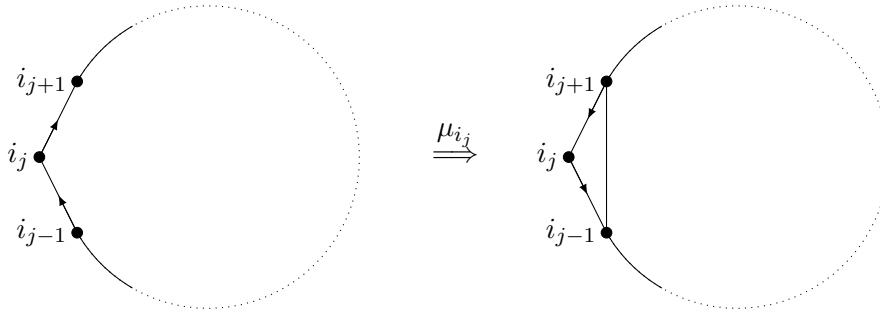


FIGURE 3.2.20 – Obtenir un cycle plus petit.

alors la mutation μ_{i_j} et on note B' la nouvelle matrice. Dans B' on a $b'_{i_{j-1}i_{j+1}} = b_{i_{j-1}i_j}b_{i_ji_{j+1}}$. Dès lors la condition (3.2.5) pour la suite d'indice $i_1, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_k$ dans B' est équivalente à (3.2.5) pour la suite d'indice i_1, \dots, i_k dans B . Elle est donc fautive, ce qui contredit la minimalité de k . \square

Mutations de diagrammes

Soit $B = (b_{ij})$ une matrice antisymétrisable. Le diagramme $\Gamma(B)$ ne caractérise pas B : par exemple $-B^t$ a le même diagramme que B . Cela semble gênant car on aimerait que notre classification de diagrammes nous permette de classifier nos matrices à mutations près. En fait on peut quand même voir les mutations de matrices directement sur les diagrammes, comme le donne la propriété suivante. Voir figure 3.2.21.

Proposition 3.2.72. *Soit B une matrice antisymétrisable. Le diagramme $\Gamma' = \Gamma(\mu_k(B))$ est uniquement déterminé par le diagramme $\Gamma = \Gamma(B)$ et l'indice $k \in I$. Plus précisément, Γ' est obtenu à partir de Γ comme suit :*

1. L'orientation de toute arête dont une extrémité est k est renversée, son poids restant inchangé.
2. Pour tout sommet i et j qui sont reliés dans Γ par un chemin de longueur 2 orienté passant par k (voir le dessin ci-dessous pour les notations) la direction de l'arête (i, j) dans Γ' et son poids c' sont uniquement déterminés par la règle :

$$\pm\sqrt{c} \pm \sqrt{c'} = \sqrt{ab},$$

où le signe devant \sqrt{c} (resp. devant $\sqrt{c'}$) est positif si i, j, k forment un cycle orientés dans Γ (resp. dans Γ') et est négatif sinon. Bien remarquer que c ou c' peuvent être nuls (pas d'arête).

3. Les autres arêtes de Γ et leurs poids restent inchangés.

Remarque 3.2.73. Pour la deuxième condition, on commence par calculer la valeur de c' avec $c' = (\sqrt{ab} \mp \sqrt{c})^2$, puis on déduit l'orientation de la flèche pour qu'il y ait l'égalité annoncée. Si B est à coefficients entiers, tous les poids dans Γ sont des entiers positifs. Le seul endroit dans la règle de mutation ci-dessus où un poids est changé, c'est pour obtenir $c' = (\sqrt{ab} \mp \sqrt{c})^2 = ab + c \mp 2\sqrt{abc}$. Mais comme b est antisymétrisable, on sait que $abc = |b_{ij}b_{ji}b_{ik}b_{ki}b_{jk}b_{kj}|$ est un carré en vertu du lemme 3.2.69 appliqué pour la suite de trois indices i, j, k .

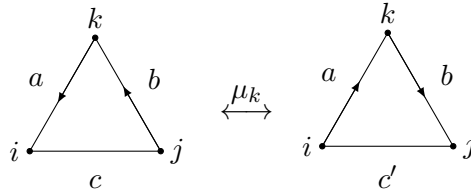


FIGURE 3.2.21 – Mutation de diagramme.

On ne démontre pas ici la proposition 3.2.72, la preuve est courte mais ne sert pas beaucoup à notre propos. On la trouvera dans [FZ03a, p. 28 et 29].

Remarque 3.2.74. Le lecteur habitué aux carquois aura peut-être été surpris par les racines qui apparaissent dans la règle de mutation des diagrammes. Dans le cas des carquois, notre objet de base est une matrice antisymétrique, et non seulement à signes antisymétriques. On définit alors son *carquois valué* comme précédemment. La seule différence est que le poids entre le sommet i et j n'est plus $|b_{ij}b_{ji}|$ mais $|b_{ij}| = |b_{ji}|$. Ceci explique la racine ci-dessus.

Définition 3.2.75. Dans le cadre de la proposition 3.2.72, on écrit $\Gamma' = \mu_k(\Gamma)$, et on appelle μ_k une mutation de diagramme dans la direction k . Deux diagrammes Γ et Γ' reliés par une suite de mutations sont dits équivalents par mutations, et on écrit $\Gamma \sim \Gamma'$. Un diagramme Γ est dit 2-fini si tout diagramme $\Gamma' \sim \Gamma$ a tous ses poids égaux à 1, 2 ou 3.

Proposition 3.2.76. Une matrice B antisymétrisable est 2-finie si et seulement si son diagramme $\Gamma(B)$ est 2-fini.

Démonstration. Dans le sens retour, on se donne B une matrice et B' équivalente par mutations à B . Comme B antisymétrisable, les mutations de matrice correspondent bien aux mutations de diagramme, et donc $\Gamma(B) \sim \Gamma(B')$. Comme $\Gamma(B)$ est 2-fini, on en déduit que toutes les arêtes de $\Gamma(B')$ ont leur poids qui vaut 1, 2 ou 3. Ainsi B' vérifie bien que $|b'_{ij}b'_{ji}| \leq 3$ pour tout i, j . Comme B est antisymétrisable, B' aussi, donc B' à signes antisymétriques. Ainsi, B est 2-finie.

Dans le sens direct, on a B qui est 2-finie. Soit $\Gamma' \sim \Gamma(B)$. Ces deux diagrammes sont semblables par une suite de mutations $\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_k}$. On fait les mutations correspondantes sur B et on trouve $B' \sim B$ qui vérifie $\Gamma(B') = \Gamma'$ en vertu de la proposition 3.2.72. Comme B est 2-fini, les poids des arêtes ont bien pour valeur 1, 2 ou 3. \square

Dans le cas des diagrammes 2-finis, les lemmes 3.2.70 et 3.2.71 montrent que les triangles sont tous orientés de façon cyclique et que les seuls poids possibles sont alors (1, 1, 1) et (2, 2, 1). En conséquence, si l'on part d'un diagramme qui est 2 fini, la règle de mutation se simplifie :

1. La relation devient $\sqrt{c} + \sqrt{c'} = \sqrt{ab}$.
2. les changements d'orientation sont donnés sur la figure 2.

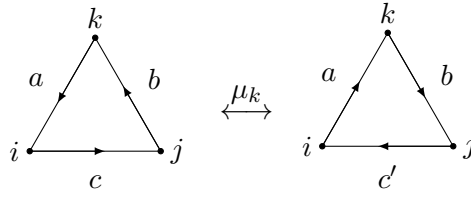


FIGURE 3.2.22 – Mutation de diagramme 2-fini.

Le théorème 3.2.64 devient alors une conséquence de la classification suivante.

Théorème 3.2.77. *Tout diagramme 2-fini est équivalent par mutations à une orientation d'un diagramme de Dynkin (voir figure 3.2.23). De plus, toutes les orientations d'un même diagramme de Dynkin sont équivalentes par mutations les unes aux autres.*

Démonstration que le théorème 3.2.77 implique le théorème 3.2.64. On se donne B une matrice 2-finie. Son diagramme $\Gamma(B)$ est donc 2-fini par la proposition 3.2.76 comme B est antisymétrisable par la proposition 3.2.65. Par le théorème 3.2.77 on a $\Gamma(B) \sim \Gamma_0$ où Γ_0 est une orientation d'un diagramme de Dynkin, que l'on peut supposer faite de telle sorte que l'on n'ait que des puits et des sources. On regarde la chaîne de mutations qui amène $\Gamma(B)$ sur Γ_0 et on fait la même sur B . On obtient une matrice B_0 qui, par la proposition 3.2.72, vérifie $\Gamma(B_0) = \Gamma_0$. Il reste à vérifier que B_0 satisfait bien les conditions du théorème 3.2.14. Que B_0 soit à signes antisymétriques et vérifie $b_{ij}b_{ik} \geq 0$ pour tout i, j, k est clair par choix d'orientation. (On pourra aussi aller voir la remarque 3.2.15 pour reconnaître une structure connue.) Il reste le fait que $A(B_0) = A$ où A est une matrice de Cartan du type du diagramme de Dynkin de Γ_0 . On veut donc connaître B_0 à partir de Γ_0 . On a déjà mentionné qu'un diagramme ne déterminait pas la matrice, mais ici on est dans des cas très particuliers où ce n'est pas loin d'être vrai. Déjà les arêtes qui ont un poids 1 déterminent entièrement les coefficients des matrices associés (si l'arête est orientée de i vers j alors $b_{ij} = 1$ et $b_{ji} = -1$). Ceci règle le cas de tous les diagrammes de type A_n, D_n et E_6, E_7, E_8 . Pour les autres, le fait qu'il n'y ait qu'une seule arête avec un poids différent de 1, mais que ce poids soit alors 2 ou 3 nous laisse avec seulement deux choix pour B_0 : $B_0 = B_1$ ou $B_0 = -B_1^t$ conviennent. Mais ces deux relevés vérifient tout deux $A(B_0) = A$, ce qui conclut. \square

Comme on l'avait remarqué après avoir énoncé le théorème 3.2.64, la réciproque du théorème 3.2.77 est vraie : tout diagramme équivalent par mutations à une orientation d'un diagramme de Dynkin est 2-fini.

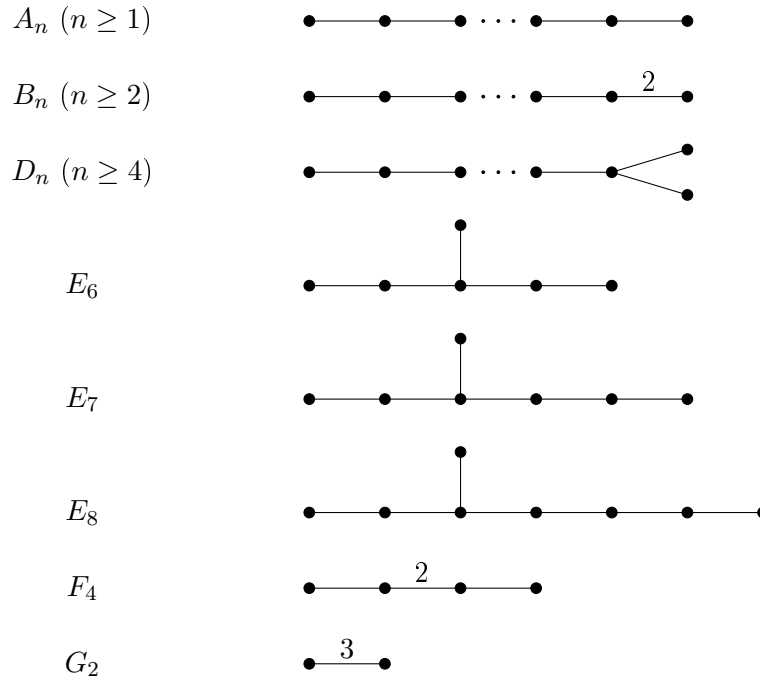


FIGURE 3.2.23 – Les diagrammes de Dynkin.

Diagrammes autorisés et diagrammes interdits

Dans cette section, tous les diagrammes sont supposés connexes, et les poids sont des entiers positifs. Un diagramme qui n'est pas 2-fini sera dit *2-infini*. Notre but est de prouver le théorème 3.2.77.

Définition 3.2.78. *Un sous-diagramme d'un diagramme Γ est un diagramme Γ' obtenu à partir de Γ en prenant le sous-graphe induit orienté sur un ensemble de sommets donné, et en gardant les mêmes poids que dans Γ . On notera $\Gamma' \subset \Gamma$.*

La proposition suivante est immédiate, mais elle est à la base de tout nos raisonnements à venir (c'est le critère dont il était question dans le plan de la section).

Proposition 3.2.79. *Tout sous-diagramme d'un diagramme 2-fini est 2-fini. De façon équivalente, si un diagramme contient un sous-diagramme 2-infini, il est 2-infini.*

Pour prouver le théorème 3.2.77 on raisonne en plusieurs temps.

Indépendance du choix d'orientation. Quand on a k un puits ou une source, les règles de mutations de diagrammes de la proposition 3.2.72 montrent que la mutation en k renverse simplement les flèches en k et ne change rien d'autre, ni au graphe ni aux poids. On dira que ces mutations en un puits ou une source sont celles qui *préservent la forme* du diagramme.

Proposition 3.2.80. *Soit T un sous-diagramme d'un diagramme Γ tel que :*

- T est un arbre.
- T est attaché au reste de Γ par un unique sommet $v \in T$, i.e. aucun sommet de $T \setminus \{v\}$ n'est joint par une arête à un sommet de $\Gamma - T$.

Alors tout diagramme obtenu à partir de Γ en réorientant arbitrairement les arêtes de T , tout en conservant le reste de Γ inchangé, est équivalent par mutations à Γ . En particulier deux orientations quelconques d'un diagramme arbre sont équivalentes par mutations.

(Un *diagramme arbre* est un diagramme dont le graphe est une orientation d'un arbre.)

Démonstration. On va raisonner par récurrence sur la taille de T pour montrer que l'on peut changer l'orientation de toutes les arêtes de T que l'on veut en utilisant uniquement des mutations aux sommets de $T - \{v\}$ qui préservent la forme de T .

Si $T = \{v\}$ il n'y a rien à prouver. Sinon on note l une feuille de T différente de v , et on considère l'arbre $T' = T - \{l\}$. Par l'hypothèse de récurrence appliqué à $\Gamma' = \Gamma - \{l\}$ et à T' , on peut réorienter toute arête de T' comme on le souhaite en appliquant uniquement des mutations qui préservent la forme de T' aux sommets de $T' - \{v\}$. Pour obtenir le même résultat avec T , on fait comme suit : à chaque fois que l'on devrait faire une mutation préservant la forme en l'unique sommet k adjacent à l , on fait d'abord une mutation en l si nécessaire pour que k deviennent un puits ou une source dans tout T et pas seulement dans T' . De cette façon on peut bien orienter toutes les arêtes de T' par des mutations préservant la forme aux sommets de $T - \{v\}$. La dernière arête (k, l) s'oriente comme on le désire en appliquant la mutation préservant la forme μ_l . \square

Cette proposition nous permet pratiquement de ne pas avoir à préciser l'orientation sur un tel arbre $T \subset \Gamma$. Les diagrammes de Dynkin sont une bonne illustration de cela.

Cette proposition justifie également les notations du type $\Gamma \sim A_m$, $\Gamma \supset A_m \dots$

Le cas des arbres.

Proposition 3.2.81. *Tout diagramme arbre 2-fini est une orientation d'un graphe de Dynkin.*

Démonstration. Un diagramme Γ est un *arbre diagramme de Dynkin étendu* si :

- Γ est un arbre diagramme dont tous les poids sont ≤ 3 ;
- Γ n'est pas un des diagrammes de Dynkin ;
- Tout sous-diagramme propre de Γ est une union disjointe de diagrammes de Dynkin.

(Conformément à la proposition 3.2.80, on néglige les questions d'orientation). On a déjà dit que les graphes de Dynkin étaient 2-finis. Étant donné que les arbres diagrammes de Dynkin sont les arbres de base, il suffit de prouver que tout arbre diagramme de Dynkin étendu est 2-infini pour conclure. On obtient les arbres diagrammes 2-infinis en ajoutant aux diagrammes de Dynkin un sommet et/ou en augmentant un des poids, de sorte à ne plus être un diagramme de Dynkin. On voit directement que la figure ci-dessous propose une liste complète de tous ces diagrammes. Dans cette figure, l'arbre $X_n^{(1)}$ a $n + 1$ sommets, et dans le diagramme $G_2^{(1)}$ on a $a \in \{1, 2, 3\}$.

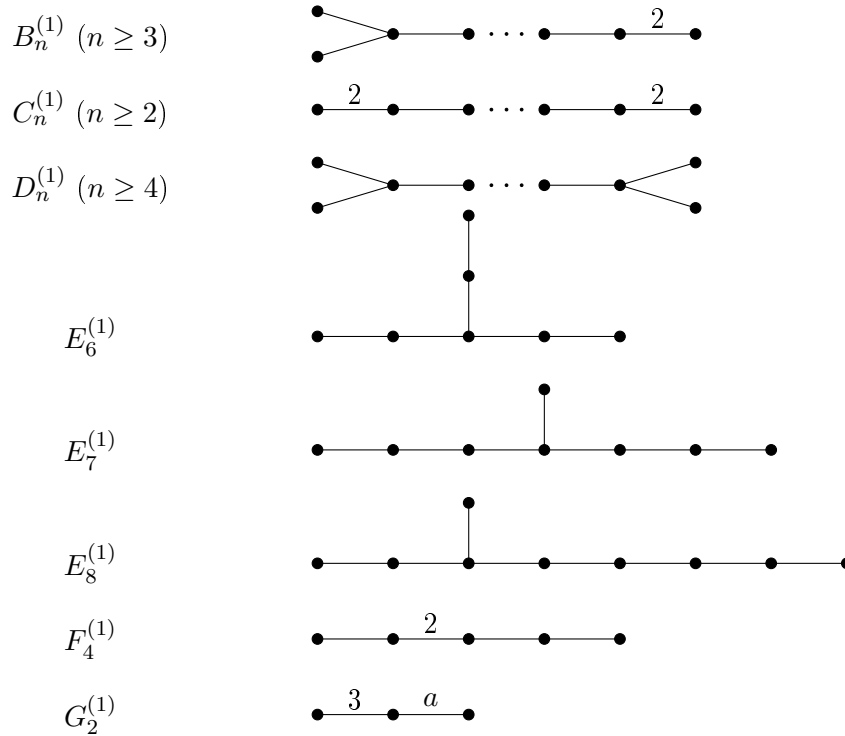


FIGURE 3.2.24 – Arbres diagrammes de Dynkin étendus.

On veut donc prouver que tous ces diagrammes sont 2-infinis. On commence par les trois séries infinies $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$ et $D_n^{(1)}$. On les oriente de droite à gauche. Pour D la valeur minimale de n est 4, contre 3 pour B et 2 pour C . Si on n'est pas dans ce cas-là, on fait une mutation sur le deuxième sommet en partant de la droite, puis on obtient en le retirant un sous-diagramme de type $X_{n-1}^{(1)}$. La figure ci-dessous le montre dans le cas de $B_n^{(1)}$, les autres cas se font de même.

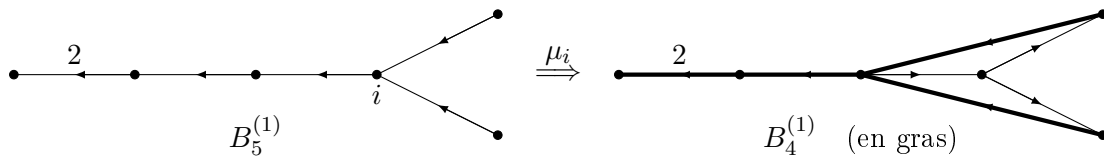


FIGURE 3.2.25 – Passage de $X_n^{(1)}$ à $X_{n-1}^{(1)}$.

Par récurrence sur n , il suffit de montrer que $D_4^{(1)}$, $B_3^{(1)}$ et $C_2^{(1)}$ sont 2-infinis pour conclure sur ces séries infinies.

Pour $C_2^{(1)}$ une mutation au sommet du milieu donne un triangle de poids $(2, 2, 4)$ qui n'est pas 2-fini.

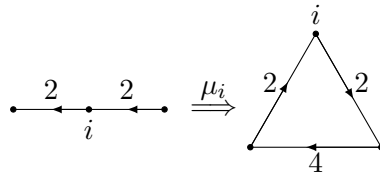


FIGURE 3.2.26 – Mutation de $C_2^{(1)}$.

Pour $B_3^{(1)}$, faire une mutation au sommet qui fait l'embranchement, puis le retirer nous laisse un sous-diagramme $C_2^{(1)}$ que l'on vient de voir 2-infini.

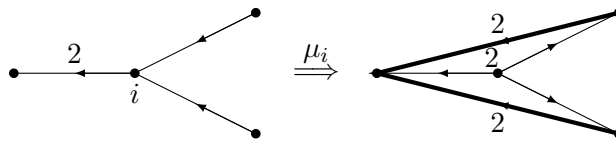


FIGURE 3.2.27 – Passage de $B_3^{(1)}$ à $C_2^{(1)}$.

Il reste $D_4^{(1)}$, on appelle le sommet du milieu 1, les deux sommets qui lui sont joints par des arêtes entrantes 2 et 4, les deux autre 3 et 5. On fait alors la composition de mutation $\mu_3 \circ \mu_2 \circ \mu_1$ pour obtenir comme sous-diagramme sur les sommets 2, 4, 5 un triangle 2-infini (car non orienté cycliquement).

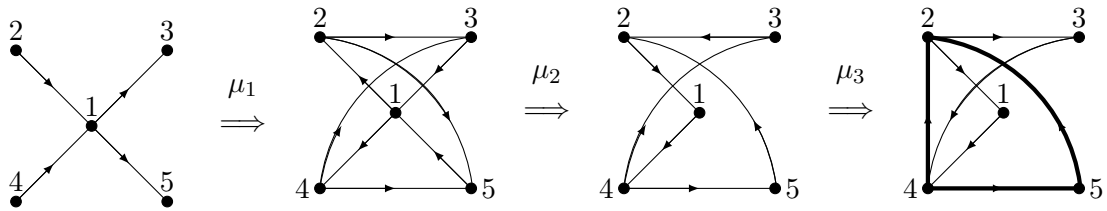


FIGURE 3.2.28 – Mutation de $D_4^{(1)}$ pour obtenir un triangle 2-infini.

Pour voir que $G_2^{(1)}$ est 2-infini, on l'orienté de droite à gauche et on fait une mutation au centre pour obtenir un triangle 2-infini.

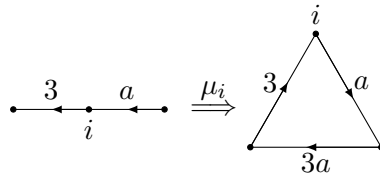


FIGURE 3.2.29 – Mutation de $G_2^{(1)}$.

Pour voir que $F_4^{(1)}$ est 2-infini, on numérote et on oriente encore de gauche à droite, puis on fait $\mu_1 \circ \mu_2 \circ \mu_3 \circ \mu_4$ pour obtenir un sous-diagramme $C_3^{(1)}$ sur les sommets 1, 2, 3 et 5.

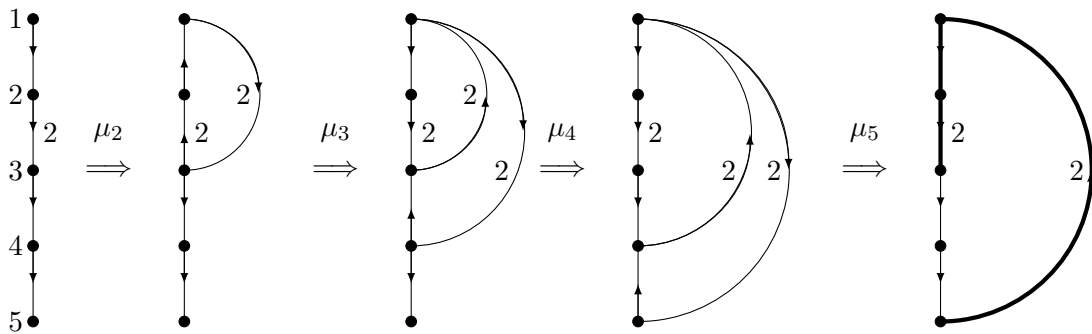


FIGURE 3.2.30 – Mutation de $F_4^{(1)}$.

Les trois cas restants $E_6^{(1)}$, $E_7^{(1)}$ et $E_8^{(1)}$ pourraient s'obtenir aussi directement, mais on va utiliser un cadre plus général qui nous servira ailleurs plus tard.

Définition 3.2.82. Pour $p, q, r \in \mathbb{N}$, on appelle $T_{p,q,r}$ le diagramme arbre (dont tous les poids valent 1) sur $p + q + r + 1$ sommets obtenus en connectant à un même sommet les trois chaînes A_p , A_q et A_r . Voir figure 3.2.31.

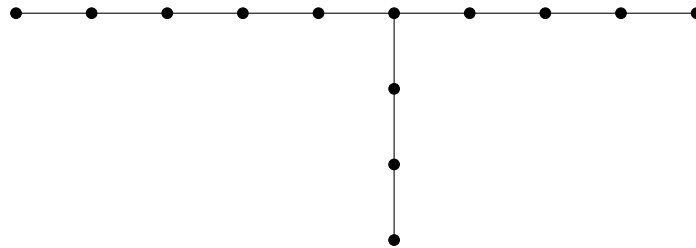


FIGURE 3.2.31 – L'arbre diagramme $T_{5,4,3}$.

Définition 3.2.83. Pour $p, q, r \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{N}$ on appelle $S_{p,q,r}^s$ le diagramme (dont tous les poids valent 1) sur $p + q + r + s$ sommets obtenus en attachant trois branches A_{p-1} , A_{q-1} , et A_{r-1} , dans cet ordre, à trois sommets consécutifs d'un cycle orienté de longueur $s + 3$. Voir figure 3.2.32.

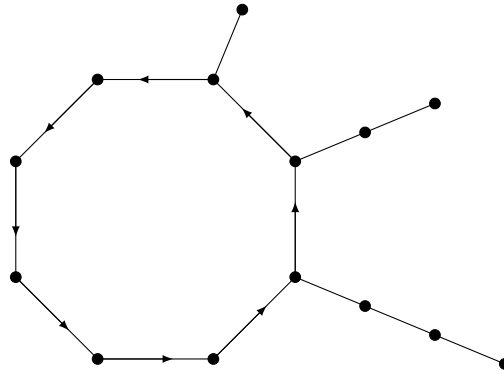


FIGURE 3.2.32 – Le diagramme $S_{4,3,2}^5$.

Remarque 3.2.84. En vertu de la proposition 3.2.80, il n'est pas nécessaire d'orienter les branches sur le dessin précédent.

Lemme 3.2.85. Le diagramme $S_{p,q,r}^s$ est équivalent par mutations à $T_{p+r-1,q,s}$.

Démonstration. On numérote et oriente comme le montre le dessin ci-dessous en oubliant la copie de A_q :

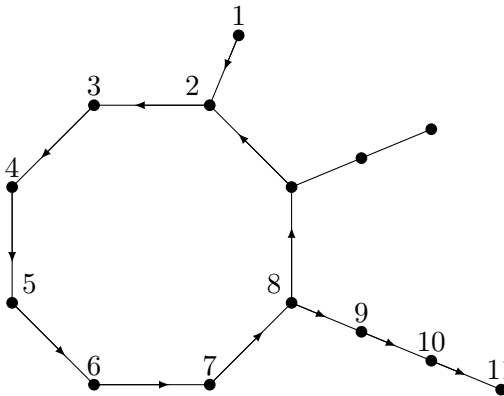


FIGURE 3.2.33 – Numérotation du diagramme $S_{4,3,2}^5$.

Dès lors la mutation $\mu_{s+r+p} \circ \dots \circ \mu_{r+1} \circ \mu_r$ donne le résultat escompté. □

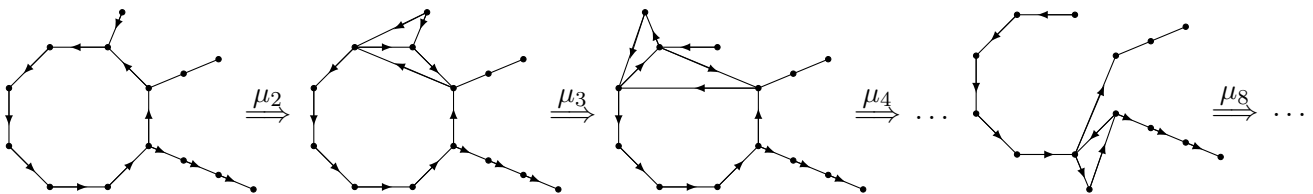


FIGURE 3.2.34 – Mutation du diagramme $S_{4,3,2}^5$.

On peut donc terminer la preuve de la proposition 3.2.81 comme suit :

$$E_6^{(1)} = T_{2,2,2} \sim S_{2,2,1}^2 \supset D_5^{(1)};$$

$$E_7^{(1)} = T_{3,1,3} \sim S_{3,1,1}^3 \supset E_6^{(1)};$$

$$E_8^{(1)} = T_{5,1,2} \sim S_{2,1,1}^5 \supset E_7^{(1)}. \quad \square$$

Le cas des cycles.

Proposition 3.2.86. *Soit Γ un diagramme 2-fini dont le graphe sous-jacent soit un cycle de taille n pour $n \geq 3$ (et pour une certaine orientation). Alors Γ doit être un des diagrammes de la figure 3.2.35. Plus précisément, on est dans l'un des cas suivants :*

- Γ est un cycle orienté dont tous les poids sont égaux à 1. Dans ce cas-là, $\Gamma \sim D_n$ (avec $D_3 = A_3$).
- Γ est un triangle orienté de poids 2, 2, 1 comme montré dans la figure ci-dessous, cas (b). Dans ce cas, $\Gamma \sim B_3$.
- Γ est un 4-cycle orienté de poids 2, 1, 2, 1 comme montré dans la figure ci-dessous, cas (c). Dans ce cas, $\Gamma \sim F_4$.

En particulier, les arêtes de Γ sont toujours cycliquement orientées.

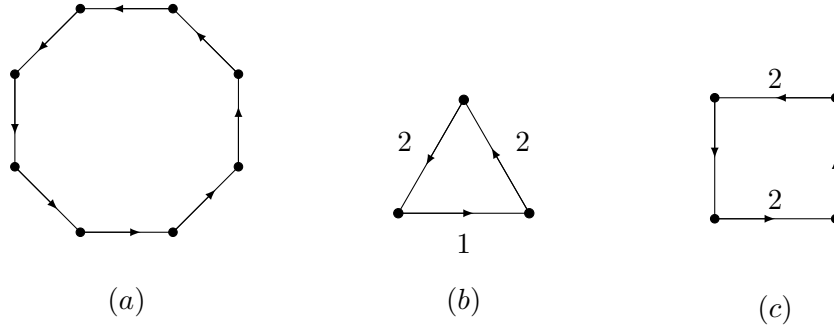
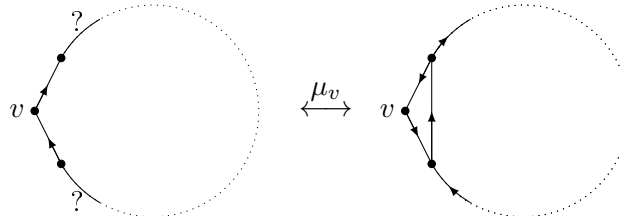


FIGURE 3.2.35 – Les trois cycles possibles.

Démonstration. Le cas $n = 3$ provient des lemmes 3.2.70 et 3.2.71 donc on peut supposer $n \geq 4$.

On commence par prouver par récurrence sur n que Γ doit être cycliquement orienté. Quitte à appliquer des mutations qui préservent le diagramme, on peut supposer qu'un sommet v a une arête incidente et une arête sortante. Soit $\Gamma' = \mu_v(\Gamma)$. Alors le sous-diagramme $\Gamma'' = \Gamma' - \{v\}$ est un cycle de taille $n - 1$ donc est cycliquement orienté par hypothèse de récurrence. En retournant sur Γ on conclut la récurrence.



De plus, comme on l'avait remarqué dans la preuve de 3.2.71, le produit des poids des arêtes de Γ'' est le même que celui de Γ . Par récurrence en utilisant le lemme 3.2.71 on en déduit que ce produit vaut soit 1 soit 4. Dans le premier cas Γ est donc un n -cycle orienté, et le lemme

3.2.85 nous donne $\Gamma = S_{1,1,1}^{n-3} \sim T_{n-3,1,1} = D_n$, comme demandé. Dans le second cas Γ a donc deux poids d'arêtes égaux à 2, et le reste qui vaut 1. Alors soit Γ est de l'un des deux types (b) ou (c) de la proposition, soit il contient un sous-diagramme 2-infini de la forme $C_m^{(1)}$ pour $m \geq 2$.

Il reste simplement à prouver les équivalences annoncées, ce qui est fait ci-dessous. \square

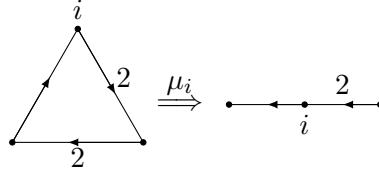


FIGURE 3.2.36 – Le second cas est équivalent à B_3 .

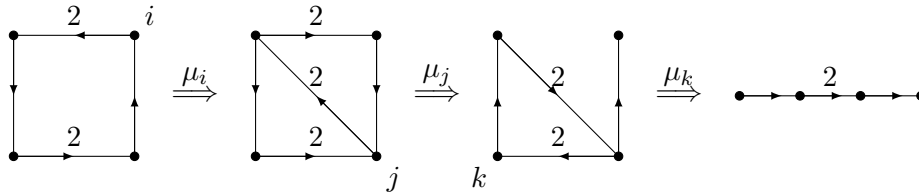


FIGURE 3.2.37 – Le dernier cas est équivalent à F_4 .

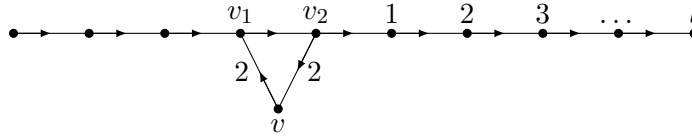
Fin de la démonstration du théorème 3.2.77 et donc de 3.2.16.

Démonstration du théorème 3.2.77. La seconde affirmation du théorème 3.2.77 provient de la proposition 3.2.80. Il nous suffit donc de montrer qu'un diagramme Γ connexe 2-fini est équivalent par mutation à un certain diagramme de Dynkin. Pour cela on raisonne par récurrence sur le nombre n de sommets de Γ . Si $n \leq 3$, alors Γ est soit un arbre, soit un cycle, et le résultat vient des propositions 3.2.81 et 3.2.86. Supposons que l'on sache prouver notre théorème pour $n \geq 3$ et montrons-le pour $n + 1$ sommets. Comme $n \geq 3$, le fait que $G_2^{(1)}$ soit 2-infini et le lemme 3.2.71 impliquent que toutes les arêtes ne peuvent avoir comme poids que 1 ou 2.

Soit $v \in \Gamma$ un sommet tel que $\Gamma' = \Gamma - \{v\}$ reste connexe. Comme Γ' est aussi 2-fini, l'hypothèse de récurrence nous donne qu'il est équivalent par mutations à un des diagrammes de Dynkin. Pour raisonner sur Γ tout entier il nous faut voir comment v se rattache à Γ' . Comme les mutations de matrice préservent la connexité, on va se contenter de regarder comment v se rattache à un représentant choisi de la classe de mutation d'un diagramme de Dynkin.

1. Si Γ' est un diagramme de Dynkin sans embranchement, i.e. est de l'un des types A_n , B_n , F_4 ou G_2 . On oriente alors Γ' pour que toutes les arêtes pointent dans la même direction. Si v est adjacent à exactement un sommet de Γ' , alors Γ est un arbre et la proposition 3.2.81 nous permet de conclure. Si v est adjacent à au moins trois sommets, alors on a forcément un cycle non orienté ce qui contredit la proposition 3.2.86. Donc v est adjacent à exactement deux sommets v_1 et v_2 . Ainsi Γ contient exactement un cycle \mathcal{C} qui doit être l'un des trois types de la proposition 3.2.86.

- (a) \mathcal{C} est du type (a), c'est-à-dire un cycle orienté à poids unitaires. Si Γ a une arête de poids 2 alors il contient un sous-diagramme du type $B_m^{(1)}$, à moins que \mathcal{C} ne soit un 3-cycle auquel cas $\mu_v(\Gamma) \sim B_{n+1}$. Sinon, toutes les arêtes de Γ ont poids 1, et donc Γ est un diagramme $S_{p,q,r}^s$. Γ est donc équivalent à un arbre par le lemme 3.2.85, et on conclut par la proposition 3.2.81.
- (b) \mathcal{C} est du type (b). Si une des arêtes (v, v_1) ou (v, v_2) a un poids de 1, alors μ_v retire l'arête (v_1, v_2) , ce qui nous donne un arbre, et on peut conclure. Sinon les deux arêtes (v, v_1) et (v, v_2) ont un poids de 2. Si au moins une arête en dehors du cycle \mathcal{C} a un poids de 2, alors $\Gamma \supset C_m^{(1)}$. Il reste à considérer le cas où toutes les autres arêtes ont pour poids 1, comme le montre le dessin ci-dessous.



Mais alors $\mu_l \circ \dots \circ \mu_2 \circ \mu_1 \circ \mu_{v_2} \circ \mu_v(\Gamma) = B_{n+1}$.

- (c) Si \mathcal{C} est de type (c), il suffit de voir que tout diagramme obtenu à partir de \mathcal{C} en ajoutant un sommet relié à un seul de \mathcal{C} (ce qui est bien ce que l'on a au minimum par construction) est 2-infini. Mais si cette arête supplémentaire a un poids 1 (resp. 2) alors Γ contient un sous-diagramme 2-infini de type $B_3^{(1)}$ (resp. $C_2^{(1)}$).

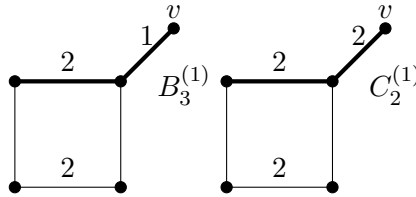


FIGURE 3.2.38 – Cas 1c.

2. Si $\Gamma' \sim D_n$. Par la proposition 3.2.86 on peut supposer que Γ' est un n -cycle orienté à poids unitaires. On se reportera à la figure 3.2.39 pour les différents sous-cas. On rappelle qu'un sous-diagramme est obtenu à partir d'un diagramme en enlevant des sommets mais non des arêtes.
- (a) Si v est adjacent à un unique sommet $v_1 \in \Gamma$. Si l'arête (v, v_1) est de poids 2 alors Γ contient un sous-diagramme de type $B_3^{(1)}$. Donc (v, v_1) a un poids 1, et Γ est $S_{2,1,1}^{n-3}$, qui est équivalent par mutations à un arbre par le lemme 3.2.85, et l'on peut conclure.
- (b) Si v est adjacent à exactement deux sommets v_1 et v_2 dans Γ' qui sont eux-même adjacents. Alors le triangle (v, v_1, v_2) est orienté et de poids $(1, 1, 1)$ ou $(2, 2, 1)$. Dans le premier cas, $\mu_v(\Gamma)$ est un cycle de taille $n + 1$, et donc $\Gamma \sim D_{n+1}$. Dans le second, μ_v renverse l'orientation de l'arête (v_1, v_2) , ce qui transforme Γ' en cycle non orienté et donc 2-infini.
- (c) Si v est adjacent à deux sommets non-adjacents dans Γ' (et éventuellement à d'autres) alors Γ contient nécessairement comme sous-diagramme un cycle non orienté, ce qui contredit la proposition 3.2.86.

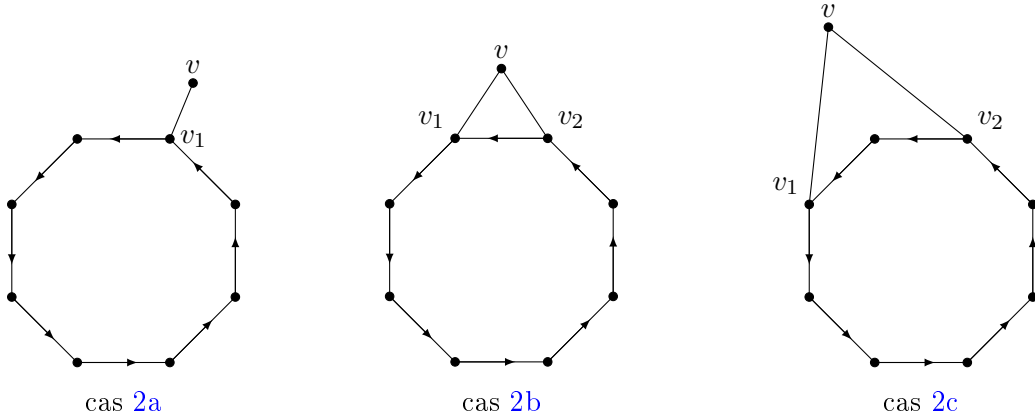


FIGURE 3.2.39 – Les trois sous cas du cas 2.

3. Si $\Gamma' \sim E_n = T_{n-4,2,1}$ pour $n \in \{6, 7, 8\}$. Par le lemme 3.2.85 on peut supposer que Γ' est $S_{1,2,1}^{n-4}$ c'est-à-dire un cycle orienté \mathcal{C} de taille $n - 1$ avec un sommet supplémentaire v_1 hors de \mathcal{C} , le tout avec des arêtes unitaires. On se reportera à la figure 3.2.3 pour les différents sous-cas.
- (a) Si v est adjacent à v_1 et aucun autre sommet de Γ' , alors soit l'arête est étiquetée 2 et contient un sous-diagramme 2-infini $B_4^{(1)}$, soit est elle de poids 1 et le lemme 3.2.85 nous donne que Γ est équivalent par mutations à un arbre.
 - (b) Si v est adjacent à un unique sommet $v_2 \in \mathcal{C}$ et à aucun autre sommet de Γ' . Si $n \geq 6$, alors Γ' contient un sous-diagramme $D_m^{(1)}$ ou $B_3^{(1)}$ selon que le poids de l'arête est 1 ou 2. Si $n = 4$ on a soit un sous-diagramme $B_3^{(1)}$, soit Γ est $S_{2,2,1}^0 \sim A_5$. Si $n = 5$ alors on a soit un sous-diagramme $B_3^{(1)}$ soit $S_{2,2,1}^1 \sim E_6$.
 - (c) Si v est adjacent à au moins deux sommets dans \mathcal{C} , l'analyse faite aux cas 2b et 2c montrent que nécessairement $\Gamma - \{v_1\} \sim D_n$ et on se ramène au cas 2 déjà traité (en remplaçant v par v_1).
 - (d) Si v est adjacent à v_1 et un unique sommet $v_2 \in \mathcal{C}$, soit v_0 le sommet de \mathcal{C} lié à v_1 dans Γ' . Comme Γ ne peut contenir $B_3^{(1)}$ on a nécessairement l'arête (v, v_2) qui a un poids 1. Si v_2 n'est pas v_0 où n'est pas adjacent à v_0 , on a nécessairement un cycle non orienté dans Γ parmi les trois. Si $v_2 = v_0$, le triangle (v, v_1, v_2) est nécessairement un triangle $(1, 1, 1)$ (deux arêtes ont déjà un poids 1) et alors μ_{v_1} enlève l'arête (v, v_2) ce qui transforme Γ en un diagramme équivalent par mutations à un arbre par le lemme 3.2.85. Si v_2 est adjacent à v_0 , alors $\Gamma - \{v_0\}$ est un diagramme de Dynkin qui n'a pas de sommet d'embranchement, et le problème est ramené à celui du cas 1a déjà traité, avec le rôle de v joué par v_0 .

Ceci conclut la preuve du théorème 3.2.77, et donc celle des théorèmes 3.2.64 et 3.2.16. \square

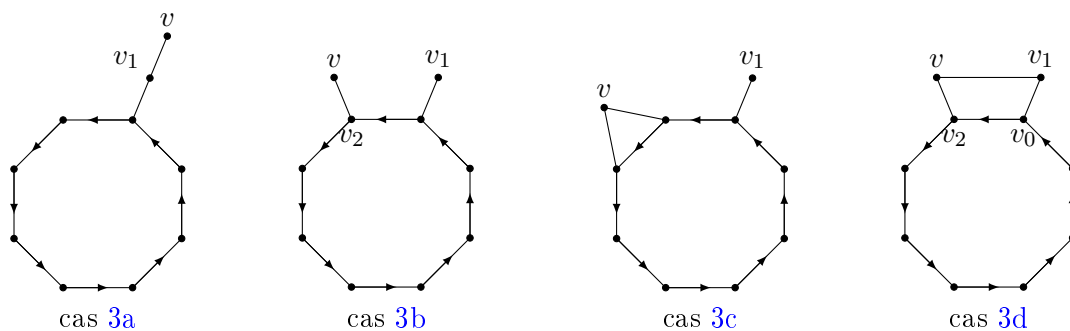


FIGURE 3.2.40 – Les sous cas du cas 3.

Injectivité : preuve du théorème 3.2.17

Démonstration du théorème 3.2.17. Soit B et B' deux matrices à signes antisymétriques telles que $A = A(B)$ et $A' = A(B')$. Leurs diagrammes sont donc des diagrammes de Dynkin, et donc B et B' sont 2-finis. On doit montrer que B et B' sont équivalentes par mutations si et seulement si A et A' sont du même type. Sans perte de généralité, on peut supposer que A et A' sont indécomposables, c'est-à-dire que leurs systèmes de racines Φ et Φ' sont irréductibles. Dans le sens direct, si B et B' sont équivalentes par mutations, alors les complexes simpliciaux $\Delta(\Phi)$ et $\Delta(\Phi')$ sont isomorphes par le théorème 3.2.55. En particulier Φ et Φ' sont de même rang et de même cardinal. Une étude précise de la classification nous montre que les seuls types de Cartan-Killing différents avec cette propriété sont B_n et C_n pour tout $n \geq 3$, et aussi E_6 qui a les mêmes données que B_6 et C_6 . Pour faire la différence entre ces types, on a déjà remarqué que deux matrices antisymétrisables équivalentes par mutation ont la même matrice antisymétrisante D , et que D est antisymétrisante pour B si et seulement si elle est symétrisante pour A . Les coefficients diagonaux de D sont donc nécessairement donnés par $d_i = (\alpha_i, \alpha_i)$ où (\cdot, \cdot) est un produit scalaire W -invariant sur le réseau des racines. Comme le système de racine de B_n a une racine simple courte et $n - 1$ longues, contre $n - 1$ courtes et une longue pour C_n , des matrices correspondantes B et B' ne peuvent être équivalentes par mutations. On conclut de même avec E_6 qui a toutes ses racines de même longueur. Pour la réciproque, supposons que A et A' aient le même type de Cartan-Killing. Par la proposition 3.2.80 on peut supposer que B et B' ont le même diagramme. On a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.87. *Soit B une matrice antisymétrisable. Alors il existe une matrice diagonale à coefficients positifs H telle que HBH^{-1} soit antisymétrique. De plus $S(B) = (s_{ij}) = HBH^{-1}$ est uniquement déterminée par B , et même $\Gamma(B)$, de la façon suivante :*

$$s_{ij} = \operatorname{sgn}(b_{ij}) \sqrt{|b_{ij}b_{ji}|}.$$

Démonstration. Soit D une matrice antisymétrisante de B : DB est antisymétrique avec D diagonale à coefficients positifs. On pose $H = D^{1/2}$. Alors $HBH^{-1} = H^{-1}DBH^{-1}$ est antisymétrique. Pour prouver la formule, remarquons simplement que :

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(s_{ij}) &= \operatorname{sgn}(h_i b_{ij} h_j^{-1}) = \operatorname{sgn}(b_{ij}), \\ s_{ij}^2 &= |s_{ij}s_{ji}| = \left| (h_i b_{ij} h_j^{-1}) \cdot (h_j b_{ji} h_i^{-1}) \right| = |b_{ij}b_{ji}|, \end{aligned}$$

où les h_i sont les coefficients diagonaux de H . □

Dès lors, par le lemme 3.2.87, on a $S(B) = S(B')$ comme S ne dépend que du diagramme. Comme B et B' ont la même matrice antisymétrisante (car A et A' sont de même type), la preuve de ce même lemme donne que $S(B) = HBH^{-1}$ et $S(B') = HB'H^{-1}$ pour $H = D^{1/2}$, d'où $B = B'$. □

3.3 Réalisation géométrique de l'associaèdre selon Chapoton, Fomin et Zelevinsky

3.3.1 État des lieux

Comme dans la section précédente, on se donne un système de racines Φ de rang n et un système simple $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ qu'il contient. On note $Q = \mathbb{Z}\Pi$ et V l'espace vectoriel réel sous-jacent. On se donne encore une bipartition I_+, I_- de I et une fonction signe $\varepsilon : I \rightarrow \{+, -\}$. On note w_0 le mot de plus grande longueur dans le groupe de Weyl W associé à Φ .

Dans la section précédente, on a défini les deux transformations τ_+ et τ_- associées à Φ . En utilisant le théorème 3.2.24 on a alors défini le degré de compatibilité, la compatibilité de deux racines et le complexe simplicial $\Delta(\Phi)$. On s'est déjà intéressé à ce complexe simplicial d'un point de vue géométrique. Dans les deux premiers points du théorème 3.2.31 on a vu que ce complexe est pur, de dimension $n - 1$, que chaque facette (appelée ici amas de racines) est une \mathbb{Z} -base du réseau Q , et que les cônes simpliciaux engendrés par les amas de racines forment un éventail simplicial complet de V . En particulier, on a vu que tout vecteur $\gamma \in Q$ admet un unique développement d'amas, c'est-à-dire peut s'exprimer de façon unique comme une combinaison linéaire à coefficients positifs de racines deux à deux compatibles de $\Phi_{\geq -1}$. Le but de cette section est de démontrer le troisième point du théorème 3.2.31, que l'on répète ici.

Théorème 3.3.1. *L'éventail simplicial $\Delta(\Phi)$ est le cône normal d'un polytope simple de dimension n .*

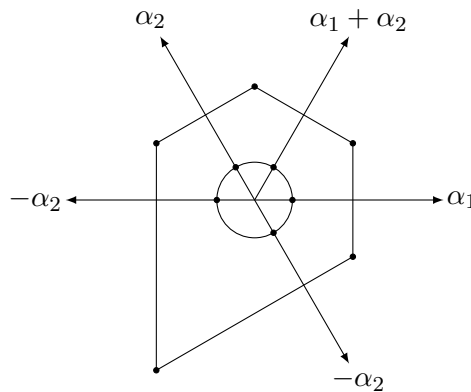


FIGURE 3.3.1 – Le complexe simplicial $\Delta(\Phi)$ et le polytope associé en type A_2 .

3.3.2 Fonction support et réduction du problème

On va ramener le théorème 3.3.1, de nature géométrique, à un problème de nature davantage algébrique et combinatoire. Pour cela on a besoin de quelques notions sur les cônes normaux des polytopes. On renvoie à l'annexe. Dans le cas qui nous intéresse le polytope est simple. On va prouver le théorème 3.3.1 en décrivant une classe de fonctions support F dont les domaines de linéarité sont précisément les cônes normaux de $\Delta(\Phi)$. Une telle fonction est

3.3. RÉALISATION GÉOMÉTRIQUE DE L'ASSOCIAÈDRE SELON CHAPOTON, FOMIN ET ZELEVINS

simplement définie, par linéarité, sur un ensemble de représentants des rayons de $\Delta(\Phi)$. On prend pour tel ensemble $\Phi_{\geq -1}$. On se rappelle du théorème 3.2.24 que les fonctions $\langle \tau_+, \tau_- \rangle$ -invariantes sur $\Phi_{\geq -1}$ sont identifiées naturellement avec les fonctions $\langle -w_0 \rangle$ -invariantes sur $-\Pi$. On est donc ramené à prouver le théorème suivant.

Théorème 3.3.2. *Soit $F : -\Pi \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les deux conditions :*

$$F(w_0(\alpha_i)) = F(-\alpha_i) \text{ pour tout } i \in I, \quad (3.3.1)$$

$$\sum_{i \in I} a_{ij} F(-\alpha_i) > 0 \text{ pour tout } j \in I. \quad (3.3.2)$$

Alors son unique extension $\langle \tau_+, \tau_- \rangle$ -invariante à $\Phi_{\geq -1}$ (encore notée F) s'étend par linéarité à la fonction support d'un polytope simple de cône normal $\Delta(\Phi)$.

Remarque 3.3.3. Une fonction vérifiant les deux conditions (3.3.1) et (3.3.2) peut se construire facilement à la main, comme le montre [CFZ02, Remarque 1.6]. Il suffit en effet de prendre un élément $\lambda \in V^*$ tel que $\langle \lambda | \alpha_i \rangle$ soit strictement positif pour toute racine simple α_i , par exemple un élément (dont le représentant au sens du produit de dualité) est dans la chambre principale du théorème 3.6.6. Un tel élément est dit dominant. On en prend un qui soit aussi $\langle -w_0 \rangle$ -invariant. Dès lors, on considère la fonction $F(-\alpha_i) = [\lambda : \alpha_i^\vee]$. Alors l'équation (3.3.2) a son membre de droite précisément égal à $\langle \lambda | \alpha_j \rangle$ qui est donc bien strictement positif. En effet :

$$\sum_i a_{ij} F(-\alpha_i) = \sum_i \langle \alpha_i^\vee | \alpha_j \rangle [\lambda : \alpha_i] = \left\langle \sum_i [\lambda : \alpha_i^\vee] \alpha_i^\vee | \alpha_j \right\rangle = \langle \lambda | \alpha_j \rangle.$$

Un tel élément dominant et $\langle -w_0 \rangle$ -invariant existe : par exemple la somme des poids fondamentaux $\lambda = \sum_{i \in I} \omega_i$, où les $\omega_i \in V^*$ sont la base duale des α_i . Notre produit scalaire étant W -invariant, ce λ est en effet bien $\langle -w_0 \rangle$ -invariant.

Par la définition 3.7.11 d'une fonction support, on en déduit la réalisation géométrique explicite suivante de l'associaèdre généralisé.

Corollaire 3.3.4. *Soit $F : -\Pi \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les conditions du théorème 3.3.2. Alors son unique extension $\langle \tau_+, \tau_- \rangle$ -invariante à $\Phi_{\geq -1}$ (encore notée F) définit le polytope simple P dans V^* suivant, de cône normal $\Delta(\Phi)$ et de fonction support F :*

1. *Pour un amas $C \in \Phi_{\geq -1}$, soit $\varphi_C \in V^*$ l'unique forme linéaire telle que $F(\alpha) = \langle \varphi_C, \alpha \rangle$, $\forall \alpha \in C$. Les sommets de P sont les points φ_C pour tous les amas C .*
2. *Le système minimal d'inégalités linéaires définissant P est :*

$$\langle \varphi, \alpha \rangle \leq F(\alpha), \text{ pour tout } \alpha \in \Phi_{\geq -1}.$$

Remarque 3.3.5. On représente un point $\varphi \in V^*$ par un n -uplet $(z_j = \langle \varphi, \alpha_j \rangle)_{j \in I}$. Dans ces coordonnées, les inégalités du corollaire précédent se réécrivent par :

$$\sum_j [\alpha : \alpha_j] z_j \leq F(\alpha), \text{ pour tout } \alpha \in \Phi_{\geq -1}.$$

Exemple 3.3.6. En type A_2 il n'y a qu'une seule $\langle \tau_+, \tau_- \rangle$ -orbite sur $\Phi_{\geq -1}$, une seule $\langle -w_0 \rangle$ orbite sur $-\Pi$, donc F doit être constante : $F(\alpha) = c$ pour tout α . La condition (3.3.2) demande alors $c > 0$ et les inégalités de la remarque 3.3.5 deviennent :

$$\max(-z_1, -z_2, z_1, z_2, z_1 + z_2) \leq c.$$

Cela définit un pentagone, comme on l'a représenté précédemment.

En type A_3 on a deux orbites :

$$\{-\alpha_1, -\alpha_3, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3\} \text{ et } \{-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\}.$$

Soit c_1 et c_2 les deux valeurs de F sur chacune de ces orbites. En utilisant les inégalités (3.3.2) on en déduit que l'on a :

$$0 < c_1 < c_2 < 2c_1.$$

On a alors le système d'inégalités suivantes :

$$\max(-z_1, -z_3, z_1, z_3, z_1 + z_2, z_2 + z_3) \leq c_1,$$

$$\max(-z_2, z_2, z_1 + z_2 + z_3) \leq c_2.$$

Pour $c_1 = \frac{3}{2}$ et $c_2 = 2$ on obtient le polytope de la figure 3.3.2. On remarque que les cas limites $c_1 = c_2$ ou $c_2 = 2c_1$ correspondent à la disparition des faces α_2 et $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

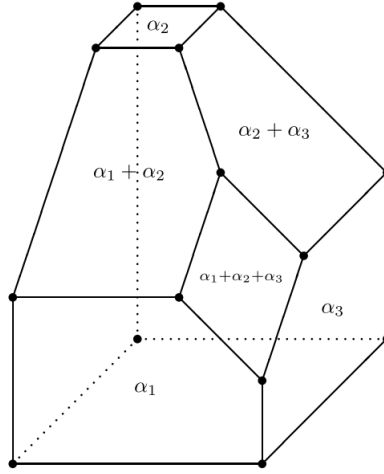


FIGURE 3.3.2 – L'associaèdre en type A_3 . Image extraite de [CFZ02].

En type C_3 on a trois orbites :

$$\{-\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3\};$$

$$\{-\alpha_2, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3\};$$

$$\{-\alpha_3, \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3\}.$$

Les inégalités (3.3.2) sont les suivantes :

$$c_2 < 2c_1, c_1 + c_3 < 2c_2, c_2 < c_3.$$

Pour $(c_1, c_2, c_3) = (5/2, 4, 9/2)$ on obtient le polytope de la figure 3.3.3 :

3.3. RÉALISATION GÉOMÉTRIQUE DE L'ASSOCIAÈDRE SELON CHAPOTON, FOMIN ET ZELEVINS

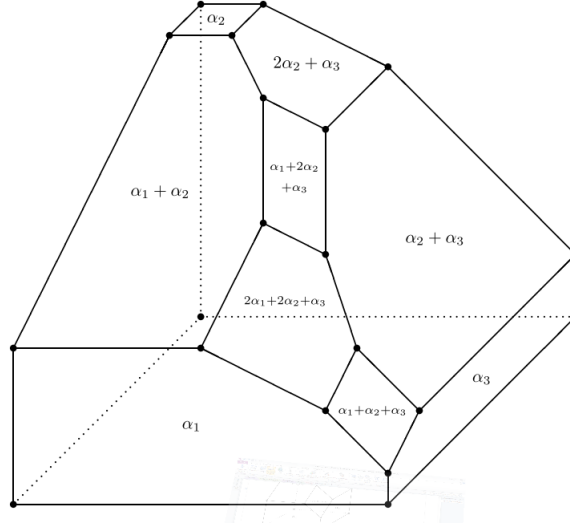


FIGURE 3.3.3 – L'associaèdre généralisé en type C_3 (cyclohèdre). Image extraite de [CFZ02].

Quelques outils. Pour prouver le théorème 3.3.2 on aura encore besoin de la proposition 3.2.39 et des résultats suivants.

Proposition 3.3.7. Soit $\mathcal{C} = \mathbb{R}_{\geq 0}C$ un cône maximal de $\Delta(\Phi)$ engendré par un amas C . Toute application linéaire par morceau $\sigma \in \langle \tau_+, \tau_- \rangle$ se restreint sur \mathcal{C} à une application linéaire qui envoie bijectivement le cône \mathcal{C} sur le cône $\sigma(\mathcal{C}) = \mathbb{R}_{\geq 0}\sigma(C)$. En conséquence si $\gamma \in Q$ admet le développement d'amas $\gamma = \sum_{\beta} m_{\beta}\beta$, alors $\sigma(\gamma)$ a le développement d'amas $\sigma(\gamma) = \sum_{\beta} m_{\beta}\sigma(\beta)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier l'assertion pour les générateurs $\sigma = \tau_{\varepsilon}$. Mais c'est alors évident par définition des τ_{ε} étant donné que, pour $\alpha_i \in \Pi$, le signe des composantes $[\gamma : \alpha_i]$ est le même pour tout $\gamma \in \mathcal{C}$. L'application est donc linéaire, le reste s'en déduit aisément. \square

Théorème 3.3.8. Soit α, α' deux racines échangeables. Si $[\alpha \uplus \alpha' : \alpha_i] > 0$ pour un certain $i \in I$, alors $[\alpha + \alpha' : \alpha_i] > 0$.

On donnera l'ébauche de la preuve dans la section 3.3.3.

Réduction du théorème 3.3.2. Dans ce paragraphe V est un espace vectoriel réel de dimension n . Pour prouver le théorème 3.3.2 on a besoin d'une suite de lemmes.

Lemme 3.3.9. Soit Δ un éventail simplicial complet dans V^* . Soit $F : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue linéaire sur chaque cône maximal de Δ . La fonction F est donc entièrement déterminée par ses valeurs sur un ensemble S de représentants des rayons. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. Δ est l'éventail normal $\mathcal{N}(P)$ d'un unique polytope simple P de dimension n dans V de fonction support F .
2. Les valeurs $F(\alpha)$ pour $\alpha \in S$ vérifient le système d'inégalités linéaires suivants. On se donne une paire de deux cônes maximaux adjacents \mathcal{C} et \mathcal{C}' dans Δ . On note alors $\{\alpha\} = (S \cap \mathcal{C}) - \mathcal{C}'$ le représentant d'un rayon qui est dans \mathcal{C} mais pas dans \mathcal{C}' , et

$\{\alpha'\} = (S \cap \mathcal{C}') - \mathcal{C}$. On écrit alors l'unique (à multiplication par un scalaire près) dépendance linéaire entre les éléments de $S \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{C}')$ sous la forme :

$$m_\alpha \alpha + m_{\alpha'} \alpha' = \sum_{\beta \in S \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'} m_\beta \beta, \quad (3.3.3)$$

où m_α et $m_{\alpha'}$ sont des réels strictement positifs. Alors on a l'inégalité :

$$m_\alpha F(\alpha) + m_{\alpha'} F(\alpha') > \sum_{\beta \in S \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'} m_\beta F(\beta). \quad (3.3.4)$$

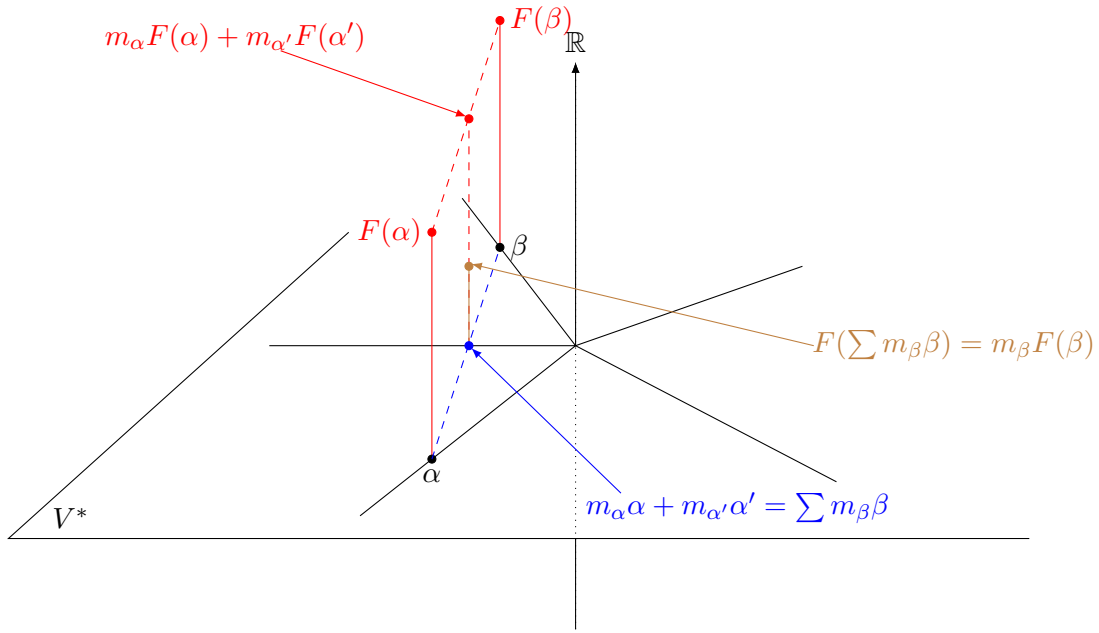


FIGURE 3.3.4 – Interprétation graphique de la condition 2.

Démonstration. Dans chaque cône maximal \mathcal{C} de Δ , la fonction F est donnée par $F(\gamma) = \langle \gamma, \varphi_{\mathcal{C}} \rangle$ pour un unique $\varphi_{\mathcal{C}} \in V$. Au vu de la définition d'une fonction support, il est clair que la condition 1 est équivalente à :

1' : Pour tout \mathcal{C} cône maximal dans Δ , pour tout $\gamma \in V^* - \mathcal{C}$, $F(\gamma) > \langle \gamma, \varphi_{\mathcal{C}} \rangle$. On veut donc prouver que 1' \iff 2.

Le sens direct est facile. Il suffit d'appliquer 1' pour $\gamma = \alpha'$:

$$\begin{aligned} F(\alpha') > \langle \alpha', \varphi_{\mathcal{C}} \rangle &= \left\langle -\frac{m_\alpha}{m_{\alpha'}} \alpha + \sum_{\beta \in S \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'} \frac{m_\beta}{m_{\alpha'}} \beta, \varphi_{\mathcal{C}} \right\rangle \\ &= -\frac{m_\alpha}{m_{\alpha'}} F(\alpha) + \sum_{\beta \in S \cap \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'} \frac{m_\beta}{m_{\alpha'}} F(\beta) \end{aligned}$$

Pour la réciproque, on prend un cône maximal \mathcal{C} de Δ et $\gamma \in V^* - \mathcal{C}$. Pour des raisons de dimension, il existe un segment L joignant γ à un point de l'intérieur de \mathcal{C} , et ne traversant

3.3. RÉALISATION GÉOMÉTRIQUE DE L'ASSOCIAÈDRE SELON CHAPOTON, FOMIN ET ZELEVINS

aucun cône de codimension 2 ou plus dans Δ . Soit alors $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m = \mathcal{C}$ l'ensemble des cônes maximaux traversés successivement par L (avec $\gamma \in \mathcal{C}_1$).

Soit $k = 1, \dots, m-1$ et $\delta \in L \cap (\mathcal{C}_k - \mathcal{C}_{k+1})$. On écrit que le cône \mathcal{C}_k est engendré par $\{\alpha\} \cup (S \cap \mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_{k+1})$ tandis que \mathcal{C}_{k+1} l'est par $\{\alpha'\} \cup (S \cap \mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_{k+1})$. Le point δ est dans le cône \mathcal{C}_k donc :

$$\delta = p_\alpha \alpha + \sum_{\beta \in S \cap \mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_{k+1}} p_\beta \beta,$$

où les p_α, p_β sont des réels positifs. Par ailleurs on a aussi la relation :

$$\alpha = -\frac{m_{\alpha'}}{m_\alpha} \alpha' + \sum_{\beta \in S \cap \mathcal{C}_k \cap \mathcal{C}_{k+1}} \frac{m_\beta}{m_\alpha} \beta.$$

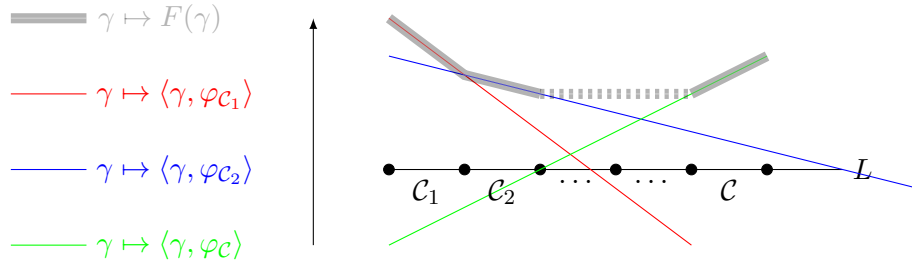
En utilisant ces deux expressions et le fait que $\langle \beta, \varphi_{\mathcal{C}_k} \rangle = \langle \beta, \varphi_{\mathcal{C}_{k+1}} \rangle = F(\beta)$, on en déduit

$$\langle \delta, \varphi_{\mathcal{C}_k} \rangle > \langle \delta, \varphi_{\mathcal{C}_{k+1}} \rangle.$$

En regardant les restrictions des formes linéaires $\varphi_{\mathcal{C}_k}$ à L , qui sont des formes affines, on en déduit que l'on a :

$$F(\gamma) = \langle \gamma, \varphi_{\mathcal{C}_1} \rangle > \langle \gamma, \varphi_{\mathcal{C}_2} \rangle > \dots > \langle \gamma, \varphi_{\mathcal{C}} \rangle,$$

ce qui implique 1'. Le graphe suivant montre le raisonnement fait pour obtenir cette suite d'inégalités :



□

Ainsi un éventail simplicial complet Δ est le cône normal d'un polytope P si et seulement si on trouve une fonction $F : S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie sur un ensemble S de représentants des rayons de Δ qui satisfait les inégalités de la partie 2 du lemme 3.3.9.

Dans la suite notre éventail simplicial complet Δ est $\Delta(\Phi)$, et le système S de représentants des rayons est $\Phi_{\geq -1}$. Pour prouver le théorème 3.3.2 il nous faut décrire plus précisément les relations (3.3.3).

Lemme 3.3.10. *Chacune des relations (3.3.3) pour l'éventail simplicial $\Delta(\Phi)$ peut être normalisée (multipliée par un scalaire positif) pour obtenir les propriétés suivantes : α et α' sont échangeables, $m_\alpha = m_{\alpha'} = 1$ et tous les coefficients m_β sont des entiers positifs, c'est-à-dire que la relation (3.3.3) exprime le développement d'amas de $\alpha + \alpha'$.*

Démonstration. Soit \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux cônes maximaux adjacents dans $\Delta(\Phi)$ engendrés par les amas C et C' respectivement. Soit $\{\alpha\} = C - C'$ et $\{\alpha'\} = C' - C$. On considère la relation de dépendance correspondante (3.3.3). Comme tous les vecteurs entrants en jeu sont dans Q , on peut normaliser cette relation de sorte que les coefficients deviennent des entiers premiers

entre eux dans leur ensemble. On va montrer que cette normalisation vérifie les conditions de l'énoncé.

Tout d'abord on a $m_\alpha = m_{\alpha'} = 1$. En effet on sait que C est une \mathbb{Z} -base de Q , de sorte que les coefficients de l'expression

$$\alpha' = -\frac{m_\alpha}{m_{\alpha'}}\alpha + \sum_{\beta \in S \cap C \cap C'} \frac{m_\beta}{m_{\alpha'}}\beta$$

sont des entiers, ce qui implique (comme ils sont premiers dans leur ensemble) que $m_{\alpha'} = 1$. On raisonne de même pour obtenir $m_\alpha = 1$.

Montrons maintenant que $(\alpha \parallel \alpha') = 1$ (et on aura $(\alpha' \parallel \alpha) = 1$ par symétrie). Comme toute transformation dans le groupe $\langle \tau_+, \tau_- \rangle$ préserve le degré de compatibilité, on peut supposer sans perte de généralité que $\alpha = -\alpha_i \in -\Pi$. On veut montrer que $(\alpha' \parallel -\alpha_i) = 1$ ce qui revient à montrer $[\alpha' - \alpha_i : \alpha_i] = 0$. Mais dans la relation (3.3.3), toutes les racines $\beta \in C \cap C'$ ne comportent pas de α_i , car elles sont dans C donc compatibles avec $\alpha = -\alpha_i$.

Il reste à montrer que les coefficients m_β sont positifs. On utilise pour cela le lemme suivant.

Lemme 3.3.11. *Soit $\alpha, \alpha' \in \Phi_{\geq -1}$ deux racines échangeables. Alors toute racine β apparaissant avec un coefficient non nul dans le développement d'amas de $\alpha + \alpha'$ est compatible avec les deux racines α et α' , mais aussi avec toute racine compatible elle-même avec α et α' .*

Démonstration. Soit $\gamma \in \Phi_{\geq -1}$ qui est soit α , soit α' , soit une autre racine compatible avec α et α' . Il nous faut montrer que β et γ sont compatibles. Pour ce faire, on se donne, en vertu du théorème 3.2.24, $\sigma \in \langle \tau_+, \tau_- \rangle$ tel que $\sigma(\gamma) = -\alpha_i$ pour un certain $i \in I$. Par définition du degré de compatibilité, il suffit de montrer que $-\alpha_i$ et $\sigma(\beta)$ sont compatibles.

Comme β apparaît dans le développement d'amas de $\alpha + \alpha'$, la proposition 3.3.7 nous donne que $\sigma(\beta)$ apparaît dans le développement d'amas de $\sigma(\alpha + \alpha')$. Mais le théorème 3.2.39 nous donne que $\sigma(\alpha + \alpha') \in \{\sigma(\alpha) + \sigma(\alpha'), \sigma(\alpha) \uplus \sigma(\alpha')\}$. On considère alors deux cas :

Cas 1. γ est α ou α' , par exemple $\gamma = \alpha$. Donc $\sigma(\alpha) = -\alpha_i$. De plus $(\alpha' \parallel \alpha) = 1$ donc $(\sigma(\alpha') \parallel -\alpha_i) = 1$ et $[\sigma(\alpha') : \alpha_i] = 1$. Ainsi $[\sigma(\alpha) + \sigma(\alpha') : \alpha_i] = 0$. Le théorème 3.3.8 nous donne que cela implique $[\sigma(\alpha) \uplus \sigma(\alpha') : \alpha_i] \leq 0$.

Si $-\alpha_i$ apparaît dans le développement d'amas de $\sigma(\alpha + \alpha')$ alors aucune des autres racines intervenant ne peut faire intervenir de α_i , en particulier $[\sigma(\beta) : \alpha_i] = 0$. Si elle n'apparaît pas on a immédiatement que $[\sigma(\beta) : \alpha_i] \leq 0$. Dans les deux cas on en déduit que $\sigma(\beta)$ est compatible avec $-\alpha_i$, ce que l'on voulait.

Cas 2. Si γ est compatible avec les deux racines α et α' . Alors $\sigma(\alpha)$ et $\sigma(\alpha')$ sont compatibles avec $-\alpha_i$, c'est-à-dire que $[\sigma(\alpha) : \alpha_i] \leq 0$ et $[\sigma(\alpha') : \alpha_i] \leq 0$. Le même argument que dans le premier cas permet de conclure que $\sigma(\beta)$ est compatible avec $-\alpha_i$. \square

On peut maintenant finir la preuve du lemme 3.3.10. Par le lemme 3.3.11, toute racine β qui apparaît dans le développement d'amas de $\alpha + \alpha'$ est en fait compatible avec toute racine de C et toute racine de C' . Par maximalité on en déduit que $\beta \in C \cap C'$. Ainsi les racines intervenant dans le développement d'amas de $\alpha + \alpha'$ et dans la relation (3.3.3) sont les mêmes, et donc cette dernière relation est le développement d'amas recherché. \square

En utilisant les deux lemmes 3.3.9 et 3.3.10 on voit que le théorème 3.3.2 devient une conséquence du lemme suivant.

3.3. RÉALISATION GÉOMÉTRIQUE DE L'ASSOCIAÈDRE SELON CHAPOTON, FOMIN ET ZELEVINS

Lemme 3.3.12. *Soit F une fonction $\langle \tau_+, \tau_- \rangle$ -invariante sur $\Phi_{\geq -1}$ satisfaisant la condition (3.3.2) du théorème 3.3.2. Soit α, α' deux racines échangeables, et soit :*

$$\alpha + \alpha' = \sum_{\beta} m_{\beta} \beta \quad (3.3.5)$$

le développement d'amas de $\alpha + \alpha'$. Alors :

$$F(\alpha) + F(\alpha') - \sum_{\beta} m_{\beta} F(\beta) > 0. \quad (3.3.6)$$

En fait, en utilisant l'invariance par $\langle \tau_+, \tau_- \rangle$ de F , on peut réduire la liste d'inégalités à vérifier. On va voir qu'il suffit de considérer le cas particulier où $\alpha' \in -\Pi$. En effet, prenons une paire (α, α') comme dans ce lemme 3.3.12. Le théorème 3.2.24 nous dit qu'il existe $\sigma \in \langle \tau_+, \tau_- \rangle$ tel que $\sigma(\alpha') = -\alpha_j \in -\Pi$, pour $j \in I$. La proposition 3.3.7 nous donne que

$$\sigma(\alpha + \alpha') = \sum_{\beta} m_{\beta} \sigma(\beta)$$

est le développement d'amas de $\sigma(\alpha + \alpha')$. Le théorème 3.2.39 nous donne alors

$$\sigma(\alpha + \alpha') \in \{\sigma(\alpha) + \sigma(\alpha'), \sigma(\alpha) \uplus \sigma(\alpha')\} = \{\sigma(\alpha) + \sigma(\alpha'), \tau_{-\varepsilon(j)}(\tau_{-\varepsilon(j)}\sigma(\alpha) - \alpha_j)\}.$$

On a alors l'alternative suivante. Soit $\sigma(\alpha) - \alpha_j = \sum_{\beta} m_{\beta} \sigma(\beta)$ est le développement d'amas de $\sigma(\alpha) - \alpha_j$, soit $\tau_{-\varepsilon(j)}\sigma(\alpha) - \alpha_j = \sum_{\beta} m_{\beta} \sigma(\beta)$ est le développement d'amas de $\tau_{-\varepsilon(j)}\sigma(\alpha) - \alpha_j$. Ces deux formules sont de la forme (3.3.5). Par invariance de F on en déduit qu'elles satisfont l'inégalité (3.3.6) si et seulement si la paire initiale $\{\alpha, \alpha'\}$ la satisfait. Pour résumer on s'est ramené à démontrer le lemme suivant :

Lemme 3.3.13. *Soit $F : -\Pi \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant les deux conditions (3.3.1) et (3.3.2) du théorème 3.3.2. Soit $\alpha \in \Phi^+$ et $-\alpha_j \in -\Pi$ deux racines échangeables. Soit*

$$\alpha - \alpha_j = \sum_{\beta} m_{\beta} \beta \quad (3.3.7)$$

le développement d'amas de $\alpha - \alpha_j$. Alors

$$F(\alpha) + F(-\alpha_j) > \sum_{\beta \in \Phi_{>0}} m_{\beta} F(\beta). \quad (3.3.8)$$

3.3.3 Esquisse des preuves restantes

Il nous reste à prouver les théorèmes 3.2.39, 3.3.8 et de façon indifférente les lemmes 3.3.12 et 3.3.13

Le théorème 3.2.39 est admis. Sa preuve est dans [CFZ02, section 3] et est de nature essentiellement calculatoire.

On va donner une esquisse des autres résultats. Il se trouve que ces derniers se montrent au cas par cas de la classification établie dans la seconde partie. On se contentera de donner la démonstration en type A , qui présente bien moins de calcul mais toutes les idées. Les types B , C et D se traitent de façon vraiment analogue. Les types exceptionnels E_6 , E_7 , E_8 , F_4 et G_2 se montrent par calcul explicite par ordinateur. Le lecteur est invité à consulter [CFZ02, sections 4 et 5] pour plus de détails.

Preuve du théorème 3.3.8 en type A. En type A, on identifie I avec l'ensemble $[n]$. Les racines positives sont alors,

$$\alpha[i, j] = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j,$$

pour $1 \leq i \leq j \leq n$.

Lemme 3.3.14. *Supposons que $(-\alpha_j | \alpha) = 1$. Ainsi $\alpha = \alpha[i, k]$ pour $1 \leq i \leq j \leq k \leq n$. Alors :*

$$(-\alpha_j) + \alpha[i, k] = \alpha[i, j-1] + \alpha[j+1, k],$$

$$(-\alpha_j) \uplus \alpha[i, k] = \alpha[i, j-2] + \alpha[j+2, k],$$

avec les conventions $\alpha[l, l-1] = 0$ et $\alpha[l, l-2] = -\alpha_{l-1}$ (où $\alpha_0 = \alpha_{n+1} = 0$).

Démonstration. Il s'agit d'un calcul immédiat avec la formule du théorème 3.2.39. □

On réutilise dans cette partie tout le point de vue introduit dans la section 3.2.2.

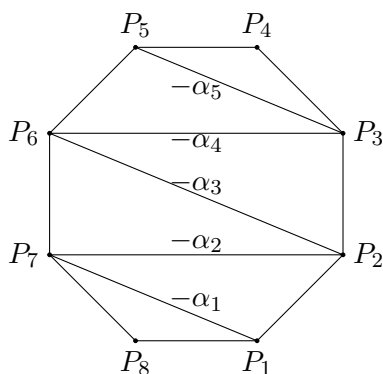


FIGURE 3.3.5 – Le « serpent » dans A_5 .

Lemme 3.3.15. *Soient $\alpha, \alpha' \in \Phi_{\geq -1}$ deux racines échangeables, de sorte que les diagonales correspondantes se croisent. Soit $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ et β_4 les racines correspondantes aux côtés du quadrilatère dont les diagonales sont α et α' (avec la convention que $\beta_i = 0$ s'il s'agit d'un côté du $(n+3)$ -gone), comme indiqué sur le dessin ci-dessous. Alors l'un des vecteurs $\alpha + \alpha'$ ou $\alpha \uplus \alpha'$ admet pour développement d'amas $\beta_1 + \beta_3$, tandis que l'autre admet le développement d'amas $\beta_2 + \beta_4$. De plus, si $\alpha' \in -\Pi$, on retrouve comme développements d'amas les formules du lemme 3.3.14.*

Démonstration. Quitte à appliquer un élément de $\langle \tau_+, \tau_- \rangle$, c'est-à-dire une symétrie du $(n+3)$ -gone (qui préserve le développement d'amas par la proposition 3.3.7) on peut supposer que $\alpha' = -\alpha_j$ pour un certain j , de sorte que l'on se retrouve dans le cadre du lemme 3.3.14. En regardant directement le dessin, on voit qu'effectivement les paires $\{\alpha[i, j-1], \alpha[j+1, k]\}$ et $\{\alpha[i, j-2], \alpha[j+2, k]\}$ apparaissant dans ce lemme sont précisément les paires $\{\beta_1, \beta_3\}$ et $\{\beta_2, \beta_4\}$. En particulier comme les paires ne se croisent pas, on en déduit les expressions du lemme 3.3.14 sont vraiment des développements d'amas. □

3.3. RÉALISATION GÉOMÉTRIQUE DE L'ASSOCIAÈDRE SELON CHAPOTON, FOMIN ET ZELEVINS

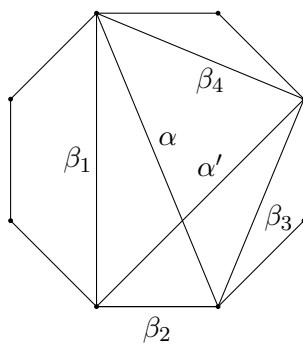


FIGURE 3.3.6 – La situation du lemme 3.3.15.

Démonstration du théorème 3.3.8 en type A. On se donne donc α, α' deux racines échangeables, et β_1, \dots, β_4 comme dans le lemme 3.3.15. Supposons que $[\alpha \uplus \alpha' : \alpha_i] > 0$ pour un certain $i \in I$. Si, par exemple, $\alpha \uplus \alpha' = \beta_2 + \beta_4$, on peut supposer que $[\beta_4 : \alpha_i] > 0$. La diagonale correspondant à $-\alpha_i$ croise donc celle de β_4 dans l'intérieur du $(n+3)$ -gone. (En particulier $\alpha, \alpha' \neq -\alpha_i$.) Comme β_4 est un côté d'un quadrilatère de diagonale α et α' , il est clair géométriquement que α ou α' croise la diagonale $-\alpha_i$. Dès lors $[\alpha + \alpha' : \alpha_i] > 0$, ce qui conclut. \square

Preuve du lemme 3.3.12 en type A. Dans le modèle géométrique précédemment utilisé, une fonction $\langle \tau_+, \tau_- \rangle$ invariante F comme dans le lemme 3.3.12 est une fonction sur les diagonales du $(n+3)$ -gone régulier qui est invariante par le groupe diédral de celui-ci. On peut donc la voir comme une fonction $f : [n] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(n+1-i) = f(i).$$

On utilise donc $f(i)$ comme notation pour $F(-\alpha_i)$, c'est-à-dire encore, à cause de l'invariance par le groupe diédral, pour la valeur de F sur toutes les diagonales reliant deux sommets distants de $\min(i+1, n+2-i)$ points. La condition (3.3.6) du lemme 3.3.12 s'écrit alors :

$$2f(j) - f(j-1) - f(j+1) > 0,$$

pour $1 \leq j \leq n$, avec les conventions $f(0) = f(n+1) = 0$. Autrement dit, f est une fonction strictement concave sur l'ensemble $\{0, 1, \dots, n+1\}$.

Au vu du lemme 3.3.15, il nous suffit pour prouver le lemme 3.3.12 de montrer :

$$F(\alpha) + F(\alpha') > F(\beta_2) + F(\beta_4),$$

pour toute paire de racine échangeables α et α' . De façon équivalente au vu de la définition de $f(i)$, il nous faut montrer :

$$f(i_1 + i_2 + 1) + f(i_2 + i_3 + 1) > f(i_2) + f(i_4),$$

pour tous entiers positifs i_1, i_2, i_3, i_4 satisfaisant

$$(i_1 + 1) + (i_2 + 1) + (i_3 + 1) + (i_4 + 1) = n + 3.$$

Fixons $x < y$ et $t > 0$. En sommant de $j = x$ à $j = y$ la relation de stricte concavité de la fonction f on peut démontrer :

$$f(x) + f(y) > f(x - 1) + f(y + 1),$$

et donc en itérant :

$$f(x) + f(y) > f(x - t) + f(y + t).$$

Dès lors :

$$f(i_1 + i_2 + 1) + f(i_2 + i_3 + 1) > f(i_2) + f(i_1 + i_2 + i_3 + 2) = f(i_2) + f(i_4),$$

comme souhaité.

3.4 Complexes de sous-mots et polytope de briques

3.4.1 Complexes de sous-mots

Soit (W, S) un système de Coxeter. On note S^* le monoïde libre engendré par S , autrement dit les mots sur S . Un *sous-mot* d'un mot Q de S^* est un élément de S^* obtenu en retirant certaines « lettres » à Q . Par exemple si $Q = q_1q_2q_3q_4q_5$, alors $q_2q_4q_5$ en est un sous-mot.

Définition 3.4.1. *Soit $Q = q_1q_2 \dots q_m \in S^*$ et $\rho \in W$. Le complexe de sous-mots $\Delta(Q, \rho)$ est le complexe simplicial pur des sous-mots de Q dont les compléments contiennent une expression réduite de ρ . Les sommets de ce complexe simplicial sont les positions des lettres dans Q (et ce même si deux lettres sont égales). On notera $[m]$ ces positions. Les facettes sont les compléments des expressions réduites de ρ dans Q .*

Démonstration. Il faut vérifier qu'il s'agit bien d'un complexe simplicial pur. Mais si on prend un sous-mot de Q dont le complément contient une expression réduite de ρ , il est clair que si on prend un sous-mot de ce sous-mot, le complément contient toujours la même expression réduite de ρ . La pureté provient du fait que la longueur de ρ est uniquement déterminée. \square

On veut s'intéresser uniquement aux tels complexes qui sont sphériques. Il est expliqué dans [PS13] et prouvé dans [KM04] que l'on peut alors se contenter de prendre $\rho = w_0$, et donc écrire $\Delta(Q)$ au lieu de $\Delta(Q, w_0)$. Dans ce cas, pour toute facette I de $\Delta(Q)$ et tout élément $i \in I$ il existe une unique facette J dans $\Delta(Q)$ et un unique élément $j \in J$ tels que $I \setminus i = J \setminus j$. On dit que I et J sont des facettes *adjacentes*, et que J s'obtient à partir de I en *flippant* i .

Exemple 3.4.2. On se place dans le groupe \mathfrak{S}_4 (en type A_3) où une décomposition réduite de w_0 est $\tau_2\tau_3\tau_1\tau_2\tau_3\tau_1$, où les τ_i sont les transpositions $(i, i+1)$. On prend le mot $Q^{ex} = \tau_2\tau_3\tau_1\tau_3\tau_2\tau_1\tau_2\tau_3\tau_1$. Les facettes de $\Delta(Q^{ex})$ sont alors $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 3, 9\}$, $\{2, 5, 6\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{2, 7, 9\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{3, 4, 9\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{4, 6, 7\}$, et $\{4, 7, 9\}$. Le complexe est bien sphérique.

On mentionne les deux lemmes suivants, tirées de [CLS14].

Lemme 3.4.3. *Si deux mots Q et Q' coïncident à commutation près de deux lettres consécutives qui commutent, les complexes de sous-mots $\Delta(Q)$ et $\Delta(Q')$ sont isomorphes.*

Démonstration. L'isomorphisme s'obtient simplement en réordonnant les lettres de Q pour obtenir Q' . Des compléments d'expressions réduites de w_0 restent bien alors compléments d'expressions réduites de w_0 . \square

On définit le *mot tourné* de $Q = q_1q_2 \dots q_m$ par $Q_\circ = q_2 \dots q_m \psi(q_1)$ où ψ est l'automorphisme sur les réflexions simples de W donné par $\psi(s) = w_0^{-1}sw_0$.

Lemme 3.4.4. *Les complexes $\Delta(Q)$ et $\Delta(Q_\circ)$ sont isomorphes*

Démonstration. On obtient l'isomorphisme en envoyant q_i sur q_i pour $2 \leq i \leq r$ et q_1 sur $\psi(q_1)$. Le fait que des faces restent bien des faces provient de ce que $q_1w_0 = w_0\psi(q_1)$. En effet, si on a $w_0 = q_1q_{i_2} \dots q_{i_n}$ alors $w_0 = q_{i_2} \dots q_{i_n}\psi(q_1)$. \square

Exemple 3.4.5. On considère le type A_n : $W = \mathfrak{S}_{n+1}$ agit sur $\mathbf{1}^\perp\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\}$ et $S = \{\tau_i \mid i \in [n]\}$ où $\tau_i = (i, i+1)$. On représente alors un mot $Q = q_1q_2 \dots q_m \in S^*$ par un *réseau de tri* \mathcal{N}_Q . Voir figure 3.4.1. Celui-ci est formé de $n+1$ lignes horizontales (appelés

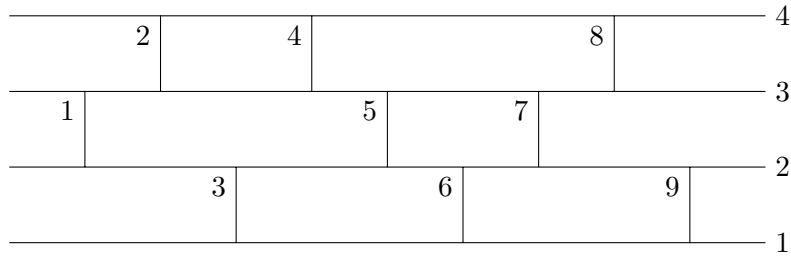


FIGURE 3.4.1 – Réseau de tri dans le cas $Q = Q^{ex}$ de l'exemple 3.4.2.

niveaux, numérotés de bas en haut) et de m segments horizontaux (appelés *commutateurs*, numérotés de gauche à droite) correspondants aux lettres de Q de la façon suivante : si $q_k = \tau_p$, alors le k -ième commutateur de \mathcal{N}_Q se trouve entre les niveaux p et $p + 1$. Une *pseudodroite* supporté par le réseau \mathcal{N}_Q est un chemin sur \mathcal{N}_Q d'abscisse monotone. Un commutateur de \mathcal{N}_Q est alors soit un *croisement* entre deux pseudodroites s'il est traversé par ces deux pseudodroites, soit un *contact* si ses deux extrémités sont contenues chacune dans une pseudodroite distincte (il n'y a pas d'échange).

On appelle *arrangement de pseudodroites* un ensemble Λ de $n + 1$ pseudodroites sur \mathcal{N}_Q telle que deux quelconques d'entre elles ont toujours exactement un croisement, éventuellement plusieurs contacts, et aucune autre intersection.

En conséquence de la définition, la pseudodroite de Λ qui part du niveau p va monter de $n + 1 - l$ croisements et descendre $l - 1$ fois, pour donc atteindre le niveau $n - p + 2$. On l'appelle la p -ième pseudodroite.

Comme le montre la figure ci-dessous, une facette I dans $\Delta(Q)$ nous donne un arrangement de pseudodroites Λ_I supporté par \mathcal{N}_Q : ses contacts (resp. croisements) sont les commutateurs de \mathcal{N}_Q correspondants aux lettres de I (resp. du complément de I). On voit alors que le complément de I est une expression réduite de w_0 : l'ordre des pseudodroites est inversé, et l'expression est réduite car deux pseudodroites ne se croisent qu'une seule fois.

Soit I et J deux facettes adjacentes dans $\Delta(Q)$, avec $I \setminus i = J \setminus j$. Alors j est la position du croisement entre les deux pseudodroites de Λ_I qui sont en contact à la position i , et l'arrangement de pseudodroites Λ_J se déduit de Λ_I en échangeant le contact en i et le croisement en j . Par exemple voici un flip dans $\Delta(Q^{ex})$.

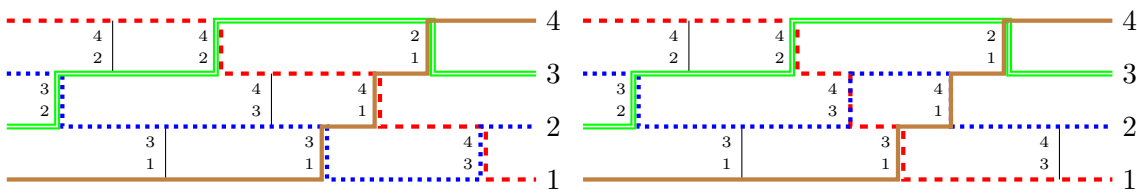


FIGURE 3.4.2 – Flip entre les facettes $\{2, 3, 5\}$ et $\{2, 3, 9\}$ de $\Delta(Q^{ex})$.

On appelle *brique* de \mathcal{N}_Q une composante connexe de son complémentaire dans \mathbb{R}^2 , qui soit bornée par la droite par un commutateur de \mathcal{N}_Q . Ainsi, la k -ième brique est celle immédiatement à droite du k -ième commutateur.

En utilisant comme dans la section 3.2.2 le repli de A_{2n-1} sur B_n on peut de même avoir

une interprétation du complexe d'amas de type B par des arrangements de pseudodroites symétriques par rapport à la droite horizontale. Voir par exemple [PS13, p.14].

On peut se demander quel est le rapport entre les complexes de sous-mots et tout ce que l'on a défini jusque là ? On va introduire une définition, puis énoncer le théorème qui fait le lien avec les parties précédentes. Les résultats énoncés sont détaillés dans [CLS14].

Définition 3.4.6. *On appelle $c \in W$ un élément de Coxeter, si le mot sous-jacent à une expression réduite de c contient chaque lettre de S en un unique exemplaire. Par exemple, $c^\mp = t_-t_+$ défini en section 3.2.2 est un élément de Coxeter. On note encore c^∞ le mot infini obtenu en répétant c .*

On définit alors $w_0(c)$ comme étant le premier (au sens de l'ordre lexicographique sur les positions) sous-mot de c^∞ qui représente une expression réduite de w_0 .

Remarque 3.4.7. On peut facilement définir un élément de Coxeter simplement en choisissant un choix d'orientation de toutes les arêtes du graphe de Dynkin de Φ . On dit qu'on oriente de i vers j si j apparaît après i dans un mot à commutation près de c . On constate alors que les orientations bipartites correspondent exactement au choix t_-t_+ et t_+t_- . On pourra aller voir la remarque 3.2.15 dans laquelle on avait fait d'une certaine façon appel à cette construction.

Théorème 3.4.8. *Le complexe de sous-mots $\Delta(c^\mp w_0(c^\mp))$ est isomorphe au complexe d'amas $\Delta(\Phi)$. Plus précisément l'isomorphisme s'obtient en envoyant la lettre c_i de c^\mp sur la racine négative $-\alpha_{c_i}$, et la lettre w_i de $w_0(c)$ sur la racine positive $w_1 \dots w_{i-1}(\alpha_{w_i})$.*

Remarque 3.4.9. La preuve du résultat est technique. Mais on peut au moins observer que les sommets se correspondent bien. Dans $\Delta(c^\mp w_0(c^\mp))$ ces sommets sont indexés par les positions dans le mot $c^\mp w_0(c^\mp)$. Si $|S| = n$ il y en a donc $n + l(w_0) = n + \text{Inv}(w_0) = n + |\Phi^+| = |\Phi_{\geq -1}|$, ce qui est bien le nombre de sommet de $\Delta(\Phi)$. Le fait que toutes les racines positives obtenues soient distinctes découlera du lemme 3.4.18

Corollaire 3.4.10. *Un sous-ensemble C de $\Phi_{\geq -1}$ est un amas de racines si et seulement si le complément du sous-mot correspondant dans $c^\mp w_0(c^\mp)$ représente une expression réduite de w_0 .*

Remarque 3.4.11. On peut plus généralement définir une famille de relations de compatibilité indexée par un élément de Coxeter c , telles que les relations correspondantes aux deux éléments t_-t_+ et t_+t_- (c'est-à-dire qui correspondent à l'orientation bipartite du graphe de Dynkin) soient bien celles que l'on avait avant. On définit alors de même la notion de c -amas, c -ensemble compatible et de c -complexe. Le théorème précédent prend alors la forme suivante.

Théorème 3.4.12. *Le complexe de sous-mots $\Delta(cw_0(c))$ est isomorphe au c -complexe d'amas $\Delta_c(\Phi)$.*

En utilisant les deux lemmes 3.4.3 et 3.4.4 ainsi que des raisonnements sur les mots dans un groupe de Coxeter, on arrive au résultat suivant.

Corollaire 3.4.13. *Tous les $\Delta(cw_0(c))$ pour les différents éléments de Coxeter sont isomorphes.*

Exemple 3.4.14. On peut aussi définir, indépendamment des théorèmes précédents, une façon d'associer à une triangulation d'un $(n + 3)$ -gone un arrangement de pseudodroites. On se rend compte alors que le complexe de sous-mots $\Delta(cw_0(c))$ est bien isomorphe au complexe simplicial des triangulations d'un $(n + 3)$ -gone convexe, c'est donc le complexe de bord de notre fameux associaèdre.

On peut également définir la notion de k -triangulation, et alors le complexe de sous-mots $\Delta(c^k w_0(c))$ est isomorphe au complexe simplicial de k -triangulations du $(n + 2k + 1)$ -gone. Pour plus de détails voir [PS13] et la bibliographie vers laquelle les auteurs renvoient.

3.4.2 Configuration racine

On définit dans cette section une application dont les propriétés se lisent bien en type A à partir des arrangements de pseudodroites, puis se généralisent en tout type.

Définition 3.4.15. *A une facette I de $\Delta(Q)$ et une position $k \in [m]$ on associe la racine :*

$$r(I, k) = \Pi Q_{[k-1] \setminus I}(\alpha_{q_k}),$$

où on note ΠQ_X le produit des réflexions $q_x \in Q$, pour $x \in X$, dans l'ordre donné par Q . La configuration racine de la facette I est le multi-ensemble

$$R(I) = \{\{r(I, i) \mid i \in I\}\}$$

pour toutes les racines associées aux éléments de I seulement.

Exemple 3.4.16. Dans le complexe de sous-mots $\Delta(Q^{ex})$ de l'exemple 3.4.2, avec $Q^{ex} = \tau_2 \tau_3 \tau_1 \tau_3 \tau_2 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_1$, on a $r(\{2, 3, 9\}, 2) = \tau_2(\alpha_3) = \alpha_3 + \alpha_2$, qui s'écrit encore $r(\{2, 3, 9\}, 2) = \tau_2(e_4 - e_3) = e_4 - e_2$. On a également $r(\{2, 3, 9\}, 7) = \tau_2 \tau_3 \tau_2 \tau_1(e_3 - e_2) = e_3 - e_1$. De plus,

$$R(\{2, 3, 9\}) = \{e_4 - e_2, e_3 - e_1, e_3 - e_4\}.$$

Exemple 3.4.17. Dans la situation 3.4.5 on lit directement $r(I, k)$ sur l'arrangement de pseudodroites Λ_I : pour $k \in [m]$ on a $r(I, k) = e_h - e_b$ où h et b sont telles que la h -ième pseudodroite et la b -ième pseudodroite de Λ_I arrivent respectivement en haut et en bas du k -ième commutateur de \mathcal{N}_Q . Comparer les résultats de l'exemple 3.4.16 avec les figures de l'exemple 3.4.5.

Une autre façon de dire la chose consiste à dire que la fonction racine nous permet de savoir d'où proviennent vraiment les deux pseudodroites qui encadrent le k -ième commutateur.

Pour le lemme suivant, et la plupart des résultats qui suivent, le raisonnement qui les précède est toujours le même : on voit comment les choses se passent en type A avec l'interprétation des arrangements de pseudodroites, et on généralise à tous les groupes de Coxeter. Le lecteur pourra donc essayer de comparer le résultat suivant aux dessins de l'exemple 3.4.5 pour voir d'où proviennent les idées.

Lemme 3.4.18. *Soit I une facette du complexe de sous-mots $\Delta(Q)$.*

1. *L'application $r(I, \cdot) : k \mapsto r(I, k)$ est une bijection entre le complément de I et Φ^+ .*
2. *Si I et J sont deux facettes adjacentes de $\Delta(Q)$, avec $I \setminus i = J \setminus j$, la position j est l'unique position dans le complément de I pour laquelle $r(I, j) \in \{\pm r(I, i)\}$. De plus, $r(I, j) = r(I, i) \in \Phi^+$ si $i < j$, tandis que $r(I, j) = -r(I, i) \in \Phi^-$ si $j < i$.*

3. Dans la situation précédente, l'application $r(J, \cdot)$ se déduit de $r(I, \cdot)$ par :

$$r(J, k) = \begin{cases} s_{r(I, i)}(r(I, k)) & \text{si } \min(i, j) < k \leq \max(i, j), \\ r(I, k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Pour le premier point, soit $\beta \in \Phi^+$. Comme $\Pi Q_{[m] \setminus I}$ est une expression réduite de w_0 on sait que $(\Pi Q_{[m] \setminus I})^{-1}(\beta) = w_0(\beta) \in \Phi^-$. Il existe donc $k \in [m] \setminus I$ tel que $(\Pi Q_{[k-1] \setminus I})^{-1}(\beta) \in \Phi^+$ mais $q_k(\Pi Q_{[k-1] \setminus I})^{-1}(\beta) \in \Phi^-$. Dès lors, par un résultat classique de théorie de Coxeter on a $\alpha_{q_k} = (\Pi Q_{[k-1] \setminus I})^{-1}(\beta) \in \Phi^+$, et donc $\beta = r(I, k)$. La fonction $r(I, \cdot)$ est donc surjective et même bijective du complément de I vers Φ^+ comme ces deux ensembles ont même cardinal $l(w_0) = |\Phi^+|$.

Pour le troisième point supposons que $i < j$. On écrit :

$$r(I, k) = \Pi Q_{[k-1] \setminus I}(\alpha_{q_k}) = w_0(\Pi Q_{[k, m] \setminus I})^{-1}(\alpha_{q_k}).$$

Cette écriture montre que les racines $r(I, k)$ et $r(J, k)$ sont égales dès que les ensembles I et J coïncident soit sur l'ensemble $[k-1]$ soit sur l'ensemble $\{k, \dots, m\}$. On a donc prouvé le point pour $k \leq i$ et $j < k$. Il reste le cas $i < k \leq j$ pour lequel on écrit :

$$\begin{aligned} r(J, k) &= \Pi Q_{[k-1] \setminus I} \cdot q_i \cdot \Pi Q_{[i, k-1] \setminus I}(\alpha_{q_k}) \\ &= s_{\Pi Q_{[i-1] \setminus I}(\alpha_{q_i})} \Pi Q_{[i-1] \setminus I} \Pi Q_{[i, k-1] \setminus I}(\alpha_{q_k}) \quad \text{car } w s_v = s_{w(v)} w \\ &= s_{r(I, i)}(r(I, k)). \end{aligned}$$

La preuve fonctionne de même si $i > j$.

Enfin, le deuxième point est une conséquence directe des deux autres : en retirant i de I on doit ajouter une position $j \notin I$ de sorte que la fonction racine continue d'envoyer bijectivement le complément de $(I \cup j) \setminus i$ sur Φ^+ et le troisième point impose alors la valeur de $r(I, j)$. \square

Exemple 3.4.19. Pour $Q = \tau_1 \tau_2 \tau_1 \tau_2 \tau_1 \tau_1 \tau_1 \tau_1$ dans A_2 et $I = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$ on a :

$$r(I, 1) = -\alpha_1, r(I, 2) = \alpha_2, r(I, 3) = \alpha_1 + \alpha_2, r(I, 4) = \alpha_1, r(I, 5) = \dots = r(I, 8) = -\alpha_1.$$

Au vu du lemme 3.4.18, on dit que $r(I, i) \in V$ est la *direction* du flip entre les facettes I et J .

On observe que l'on peut reconstruire une facette I de $\Delta(Q)$ simplement en connaissant sa configuration racine $R(I)$.

Proposition 3.4.20. *Le multi-ensemble $R(I)$ caractérise I parmi toutes les facettes de $\Delta(Q)$.*

Démonstration. Soit I et J deux facettes distinctes de $\Delta(Q)$. Supposons sans perte de généralité que le premier élément i de la différence symétrique $I \Delta J$ soit dans $I \setminus J$. Ainsi les racines $r(I, k)$ et $r(J, k)$ coïncident pour $1 \leq k \leq i$ (pour $k = i$, car cela ne dépend que de $I \cap [i-1]$).

On pose $\alpha = \Pi Q_{[i-1] \setminus I}(\alpha_{q_i}) = \Pi Q_{[i-1] \setminus J}(\alpha_{q_i}) \in \Phi^+$. Mais le second point du lemme 3.4.18 nous donne les occurrences de α dans $R(J)$ apparaissent toutes avant i (car i est dans le complémentaire de J donc s'il existe $k \in J$ tel que $r(J, k) = \alpha$ on a nécessairement $k < i$.) En conséquence, α apparaît au moins une fois de plus dans $R(I)$ que dans $R(J)$. \square

Remarque 3.4.21. Le fait que les occurrences de α dans $R(J)$ apparaissent toutes avant i se voit facilement en type A . Si $\alpha = \alpha[i, j] = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$ pour $i \leq j$ alors on cherche à repérer dans Λ_J les commutateurs pour avant lesquels la pseudodroite j est au-dessus et la pseudodroite i en dessous. Mais on ne pourra plus en trouver après le croisement i car à partir de là la pseudodroite j est toujours en dessous de la pseudodroite i .

Remarque 3.4.22. La proposition 3.4.20 nous dit que l'on peut reconstruire la facette I à partir de sa configuration racine $R(I)$ en scannant le mot Q de gauche à droite de la façon suivante. On commence en position 0 et on définit I_0 comme le mot vide et $R_0 = R(I)$ comme multi-ensemble. À l'étape k on construit un nouveau sous-mot I_k et un multi-ensemble R_k à partir de I_{k-1} et R_{k-1} de la façon suivante :

- Si $\beta_{k-1} = \Pi Q_{[k-1] \setminus I_{k-1}}(\alpha_{q_k}) \in R_{k-1}$, alors $I_k = I_{k-1} \cup k$ et $R_k = R_{k-1} \setminus \beta_{k-1}$.
- Sinon $I_k = I_{k-1}$ et $R_k = R_{k-1}$.

La facette I est alors le sous-mot I_m . L'algorithme fonctionne bien car, comme expliqué dans la remarque précédente, si on n'insère pas k dans I on crée un croisement et on ne retrouvera jamais dans la suite β_{k-1} .

Observons en plus que l'on peut reconstruire I en connaissant seulement ses racines positives $R(I) \cap \Phi^+$ car, d'après le lemme 3.4.18 les positions qui donnent des racines négatives appartiennent nécessairement à I .

En utilisant le lemme 3.4.18 et la connexité du graphe de flip (car on a des complexes simpliciaux sphériques), on a aisément le lemme suivant :

Lemme 3.4.23. *Les configurations racines $R(I)$, pour toutes les facettes I de $\Delta(Q)$, sont soit toutes simultanément linéairement indépendantes, soit toutes simultanément liées.*

Remarque 3.4.24. On s'intéresse ici uniquement au cas où la configuration racine d'une facette I (de façon équivalente, de toutes les facettes) est linéairement indépendante. On dit alors que $\Delta(Q)$ est à racines indépendantes. On montre alors (voir [PS13, Proposition 3.6]) que dans le cas où la configuration racine est linéairement indépendante mais n'engendre pas V , on peut toujours trouver un complexe de sous-mots isomorphe pour lequel la configuration racine soit une base. On peut donc supposer dans la suite que les configurations racines de complexes de sous-mots à racines indépendantes sont effectivement des bases de V .

Définition 3.4.25. *Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire, et I une facette de $\Delta(Q)$. On dit qu'un élément $i \in I$ préserve f si $f(r(I, i)) = 0$. On note également :*

$$\Delta_f(Q) = \{I \text{ facette de } \Delta(Q) \mid \forall i \in I, f(r(I, i)) \geq 0\}$$

l'ensemble des facettes de $\Delta(Q)$ dont la configuration racine est contenue dans le demi-espace positif fermé défini par f .

Les deux résultats suivants sont essentiellement techniques mais nous seront utiles dans la suite. Ils proviennent de [PS13].

Proposition 3.4.26. *Si $\Delta(Q)$ est à racines indépendantes, l'ensemble $\Delta_f(Q)$ forme une composante connexe du graphe des flips de $\Delta(Q)$ préservant f .*

Corollaire 3.4.27. *Si $\Delta(Q)$ est à racines indépendantes, l'ensemble $\Delta_f(Q)$ est une face du complexe de sous-mots $\Delta(Q)$.*

3.4.3 Polytopes de briques

Définition 3.4.28. *À une facette I de $\Delta(Q)$ et une position $k \in [m]$, on associe le poids*

$$w(I, k) = \Pi Q_{[k-1] \setminus I}(\omega_{q_k}),$$

où, comme auparavant, ΠQ_X désigne le produit des réflexions $q_x \in Q$, pour $x \in X$, dans l'ordre donné par Q . Le vecteur de briques de la facette I est alors défini par

$$B(I) = \sum_{k \in [m]} w(I, k).$$

Le polytope de briques $\mathcal{B}(Q)$ du mot Q est l'enveloppe convexe de tous les vecteurs de briques

$$\mathcal{B}(Q) = \text{Conv}\{B(I) \mid I \text{ facette de } \Delta(Q)\}.$$

Exemple 3.4.29. Dans le complexe de sous-mots $\Delta(Q^{ex})$ de l'exemple 3.4.2 on a par exemple $w(\{2, 3, 9\}, 2) = \tau_2(e_4) = e_4$ et $w(\{2, 3, 9\}, 7) = \tau_2\tau_3\tau_2\tau_1(e_3 + e_4) = e_2 + e_3$. Le vecteur de briques de $\{2, 3, 9\}$ est $B(\{2, 3, 9\}) = e_1 + 6e_2 + 5e_3 + 6e_4 = (1, 6, 5, 6)$. Le polytope de briques est alors représenté par un prisme pentagonal décrit par la figure 3.4.29.

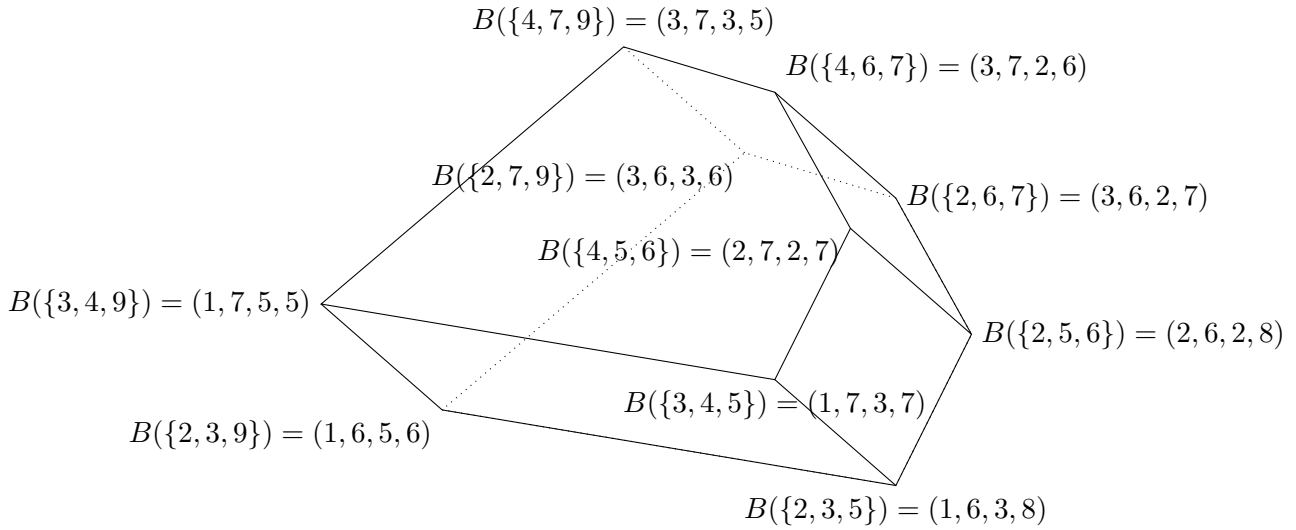


FIGURE 3.4.3 – Le polytope de briques $\mathcal{B}(Q^{ex})$ pour le mot Q^{ex} de l'exemple 3.4.2.

Exemple 3.4.30. En type A , on peut interpréter cette définition en termes de réseau de tri de l'exemple 3.4.5. Pour une facette I de $\Delta(Q)$ et une position $k \in [m]$, le poids $w(I, k)$ est la somme des e_i pour tous les indices i d'une pseudodroite de Λ_I passant au dessus de la k -ième brique de \mathcal{N}_Q . On procède alors à un double décompte :

$$\begin{aligned} w(I, k) &= \sum_{k \text{ brique}} w(I, k) = \sum_{k \text{ brique}} \sum_{\substack{i \text{ pseudodroite} \\ \text{au dessus} \\ \text{de la brique } k}} e_i = \sum_{i \text{ pseudodroite}} \sum_{\substack{\text{briques en dessous} \\ \text{de la pseudodroite } i}} e_i \\ &= \sum_{i \text{ pseudodroite}} \#\{\text{briques en dessous de la pseudodroite } i\} e_i. \end{aligned}$$

Dès lors la p -ième coordonnée du vecteurs de briques $B(I)$ est le nombre de briques de \mathcal{N}_Q en dessous de la pseudodroite numéro p de Λ_I . Cela explique le nom *polytope de briques*.

La fonction racine $r(\cdot, \cdot)$ et la fonction poids $w(\cdot, \cdot)$ ont une définition similaire et donc des propriétés similaires.

Lemme 3.4.31. Soit I une facette du complexe de sous-mots $\Delta(Q)$.

1. On a $w(I, k+1) = \begin{cases} w(I, k) & \text{si } k \in I, \\ w(I, k) - r(I, k) & \text{si } k \notin I. \end{cases}$
2. Si I et J sont deux facettes adjacentes de $\Delta(Q)$, avec $I \setminus i = J \setminus j$ alors $w(J, \cdot)$ se déduit de $w(I, \cdot)$ par

$$w(J, k) = \begin{cases} s_{r(I, i)}(w(I, k)) & \text{si } \min(i, j) < k \leq \max(i, j), \\ w(I, k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Pour $j \notin I$, on a $\langle r(I, j) | w(I, k) \rangle$ strictement positif si $j \geq k$, et strictement négatif si $j < k$.

Démonstration. Le premier point est une conséquence immédiate des définitions de $r(I, k)$ et $w(I, k)$. La preuve du second point est similaire à celle faite au lemme 3.4.18. Il reste le troisième point.

Si $j \geq k$, montrons que $\Pi Q_{[k, j-1] \setminus I}(\alpha_{q_j}) \in \Phi^+$ comme $j \notin I$. En effet par définition $\Pi Q_{[m] \setminus I}$ est réduite donc aussi $\Pi Q_{[k, j] \setminus I}$ qui en est un « sous-élément » (au sens du groupe et non des mots). Comme $j \notin I$ on a $\Pi Q_{[k, j] \setminus I} = \Pi Q_{[k-1, j] \setminus I} q_j$ qui est un mot réduit. Mais on connaît les inversions d'un mot réduit par le lemme 3.6.17, on en déduit que $\Pi Q_{[k, j-1] \setminus I}(\alpha_{q_j}) \in \text{Inv} \left((\Pi Q_{[k-1, j] \setminus I} q_j)^{-1} \right) \subset \Phi^+$.

Dès lors :

$$\langle r(I, j) | w(I, k) \rangle = \langle \Pi Q_{[k, j-1] \setminus I}(\alpha_{q_j}) | \omega_{q_k} \rangle \geq 0,$$

par invariance du produit scalaire sous W . De même si $j > k$ alors $(\Pi Q_{[j-1, k] \setminus I})^{-1}(\alpha_{q_j}) \in \Phi^-$ comme $j \notin I$. Par conséquent :

$$\langle r(I, j) | w(I, k) \rangle = \langle (\Pi Q_{[j-1, k] \setminus I})^{-1}(\alpha_{q_j}) | \omega_{q_k} \rangle \leq 0. \quad \square$$

On suppose dans la suite que $\Delta(Q)$ est à racines indépendantes.

Lemme 3.4.32. *Si I et J sont deux facettes adjacentes de $\Delta(Q)$, avec $I \setminus i = J \setminus j$, alors la différence des vecteurs de briques $B(I) - B(J)$ est un multiple strictement positif de $r(I, i)$.*

Démonstration. Comme I et J jouent des rôles symétriques, on peut supposer que $i < j$. En particulier, par le lemme 3.4.18, $r(I, j) = r(I, i)$. En utilisant le lemme 3.4.31 on obtient :

$$B(I) - B(J) = \sum_{k \in [m]} (w(I, k) - w(J, k)) = \left(\sum_{i < k \leq j} 2 \frac{\langle r(I, j) | w(I, k) \rangle}{\langle r(I, j) | r(I, j) \rangle} \right) r(I, i),$$

où dans la dernière somme tous les termes sont positifs et le dernier vaut 1. □

Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. On note $\mathcal{B}_f(Q)$ la face de $\mathcal{B}(Q)$ qui maximise f .

Lemme 3.4.33. *Les faces du polytope de briques $\mathcal{B}(Q)$ sont des faces du complexe de sous-mots $\Delta(Q)$. De plus, pour toute facette I de $\Delta(Q)$, on a $B(I) \in \mathcal{B}_f(Q) \iff I \in \Delta_f(Q)$.*

Démonstration. Soit I une facette de $\Delta(Q)$ telle que $B(I) \in \mathcal{B}_f(Q)$. Soit J la facette obtenue à partir de I en flipant i . Le lemme 3.4.32 nous donne alors qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $r(I, i) = \lambda(B(I) - B(J))$. Dès lors, $f(r(I, i)) = \lambda(f(B(I)) - f(B(J))) \geq 0$ étant donné que $B(I)$ maximise f . Ainsi $f(r(I, i)) \geq 0$ et $I \in \Delta_f(Q)$.

L'ensemble des facettes I de $\Delta(Q)$ telles que $B(I) \in \mathcal{B}_f(Q)$ est contenu dans $\Delta_f(Q)$. Mais le premier ensemble est clos par flips préservant f alors que le second est connexe par flips préservant f par la proposition 3.4.26. Dès lors, ils coïncident. □

Proposition 3.4.34. *Pour toute facette I de $\Delta(Q)$, le cône du polytope de briques $\mathcal{B}(Q)$ au vecteur de briques $B(I)$ coïncide avec le cône engendré par l'opposé de la configuration racine $R(I)$ de I . On a :*

$$C(I) := \text{Cone}\{B(J) - B(I) \mid J \text{ facette de } \Delta(Q)\} = \text{Cone}\{-r(I, i) \mid i \in I\}.$$

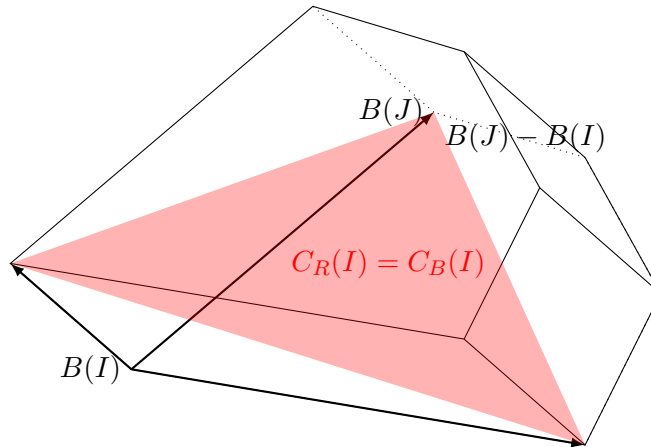


FIGURE 3.4.4 – Configuration racine et cône du polytope de briques.

Démonstration. On note $C_B(I)$ le cône du polytope de briques $\mathcal{B}(Q)$ au vecteur de briques $B(I)$ et $C_R(I)$ le cône généré par $-R(I)$. Le fait que $C_R(I) \subset C_B(I)$ correspond à la deuxième égalité dans la formule précédente, et est une conséquence immédiate du lemme 3.4.32.

Dans l'autre sens, il nous faut prouver que toute face de $C_R(I)$ est une face de $C_B(I)$. Soit donc une face F de $C_R(I)$. Soit $f \in V^*$ qui définit cette face, c'est-à-dire que $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in C_R(I)$. Par définition de $C_R(I)$ on en déduit que $f(R(I)) \geq 0$ et donc $I \in \Delta_f(Q)$. Par le lemme 3.4.33 on en déduit que $B(I) \in \mathcal{B}_f(Q)$. Dès lors les sommets de $\mathcal{B}(Q)$ maximisant f sont forcément dans cette face F de $C_R(I)$, qui est donc une face de $C_B(I)$.

Une autre façon de prouver cela est de supposer qu'il existe J n'étant pas dans la face F de $C_R(I)$ qui maximise cependant f sur tout $\mathcal{B}_f(Q)$. Le raisonnement précédent donne alors que $J \in \Delta_f(Q)$, ensemble connexe par flips préservant f , d'où $f(I) = f(J)$ ce qui est absurde par maximalité de J si J n'est pas dans F . \square

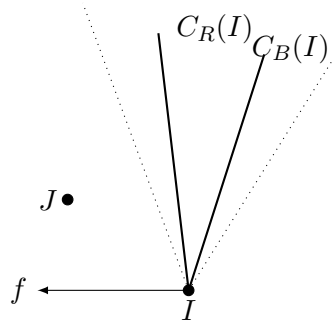


FIGURE 3.4.5 – Preuve par l'absurde dans la proposition 3.4.34.

Théorème 3.4.35. *Si $\Delta(Q)$ est à racines indépendantes, il est isomorphe au complexe du bord du polaire du polytope de briques $\mathcal{B}(Q)$.*

Démonstration. Par la proposition 3.4.34, le vecteur de briques de toute facette de $\Delta(Q)$ est un sommet de $\mathcal{B}(Q)$, et le polytope est de dimension pleine et simple (car on a des racines

indépendantes). Comme les faces du polytope de briques sont des faces du complexes de sous-mots par le lemme 3.4.33, on en déduit (par un raisonnement classique de géométrie discrète) que le complexe de bord du polaire du polytope de briques $\mathcal{B}(Q)$ est isomorphe au complexe de sous-mots $\Delta(Q)$. \square

Corollaire 3.4.36. *Le polaire du polytope de briques $\mathcal{B}(cw_0(c))$ réalise le complexe de sous-mots $\Delta(cw_0(c))$, donc le complexe d'amas.*

Démonstration. La configuration racine de la facette initiale $R = [n]$ du complexe de sous-mots $\Delta(cw_0(c))$ est la base de racines Π . Ainsi le complexe de sous-mots $\Delta(cw_0(c))$ est à racines indépendantes, ce qui nous permet d'appliquer le théorème 3.4.35. \square

Exemple 3.4.37. On prend l'élément de Coxeter $c^{ex} = \tau_1\tau_2\tau_3$ dans A_3 . On a alors $w_0(c^{ex}) = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_1\tau_2\tau_1$. On calcule alors directement les facettes et leurs vecteurs de briques. La figure 3.4.6 montre le résultat annoncé au théorème 3.4.8 et aux résultats qui suivent : on retrouve notre associaèdre.

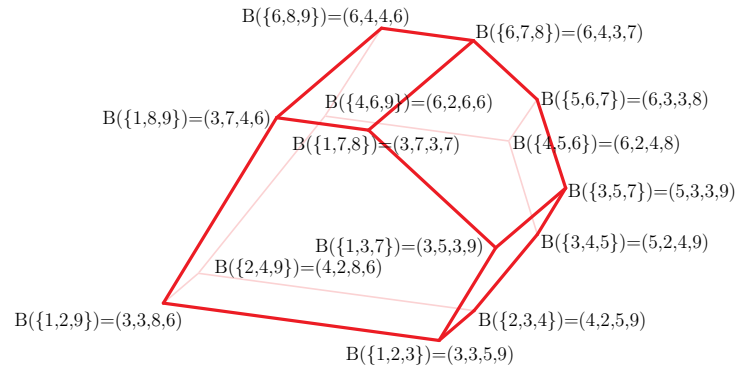


FIGURE 3.4.6 – Le polytope de briques $\mathcal{B}(c^{ex}w_0(c^{ex}))$ est l'associaèdre de dimension 3. Image extraite de [PS13].

3.5 Complexes de sous-mots et degré de compatibilité

3.5.1 Objectif

On se donne (W, S) un système de Coxeter et $Q \in S^*$ qui contienne comme sous-mot le mot le plus long w_0 de W . On veut définir un degré de compatibilité $\{\cdot\|\cdot\}$ sur les positions de Q tel que, pour toute facette de base I_0 , les vecteurs de compatibilité des positions de Q avec I_0 forment les rayons d'un éventail. Plus précisément, une fois le degré de compatibilité $\{\cdot\|\cdot\}$ défini, et la facette I_0 choisie, on associe à chaque position j dans Q le rayon défini par $\rho_{I_0}(j) = (\{i\|j\})_{i \in I_0}$, et à chaque face J dans $\Delta(Q)$ le cône $C_{I_0}(J) = \text{Cone}(\rho_{I_0}(J))$. Notre espoir est que l'ensemble des cônes

$$F_{I_0} = \{C_{I_0}(J) \mid J \text{ face de } \Delta(Q)\}$$

soit un éventail simplicial complet qui réalise $\Delta(Q)$.

C'est ce qu'on a fait pour définir notre complexe d'amas $\Delta(\Phi)$: on avait une configuration initiale (qui était $-\Pi$, ou le « serpent » dans l'interprétation géométrique) qui nous permettait de calculer les autres cônes. On veut faire de même mais le problème est que l'on n'a plus a priori nos applications τ_+ , τ_- et le degré de compatibilité.

3.5.2 Degré de compatibilité

On suppose dans la suite que $\Delta(Q)$ est à racines indépendantes. Les propositions qui suivent proviennent de [CP14].

On note m la taille de Q , et $\mathcal{V}(Q)$ l'ensemble des sommets $j \in [m]$ qui apparaissent dans au moins une facette de $\Delta(Q)$. Comme $\Delta(Q)$ est à racines indépendantes, on peut supposer que $R(I_0)$ est une base :

$$r(I_0, j) = \sum_{i \in I_0} [r(I_0, j) : r(I_0, i)]_{R(I_0)} r(I_0, i).$$

On définit alors, pour $i \in I_0$, $j \in [m]$:

$$\{i\|j\} = \pm [r(I_0, j) : r(I_0, i)]_{R(I_0)},$$

où le signe est positif si $i < j$ et négatif sinon.

Exemple 3.5.1. On prend $W = A_3$, $S = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ où $\tau_i = (i, i+1)$. On pose $c = \tau_1\tau_2\tau_3$, (ce n'est pas le bipartite) et $Q = cw_0(c)$, $I_0 = [n]$.

Alors, si $i \in I_0$, $j \in [m]$ (où m est la taille du mot Q), on a $r(I_0, i) = \alpha_i$ et $r(I_0, j) = \beta \in \Phi$. En notant comme d'ordinaire Π le système de racines simples, on sait que $R(I_0) = \Pi$, et $(-\alpha_i\|\beta) = [\beta : \alpha_i]_{\Pi} = [r(I_0, j) : r(I_0, i)]_{R(I_0)}$.

Proposition 3.5.2. $\{i\|j\}$ ne dépend pas de I_0 .

Démonstration. Il suffit de montrer que $[r(I_0, j) : r(I_0, i)]_{R(I_0)}$ est indépendant du choix de I_0 . Comme toutes les facettes qui contiennent i se déduisent les unes des autres par flip, il suffit de montrer que ce coefficient est invariant par flip n'impliquant pas la position i .

Le lemme 3.4.18 nous donne alors les vecteurs de base dans $R(I_0)$ sont simplement, pour certains, translatés pas un multiple d'un élément de $R(I_0)$ qui n'est pas $r(I_0, i)$. Ainsi tous les coefficients dans la décomposition sur la base restent les mêmes sauf celui correspondant à l'élément flippé. \square

3.5.3 Conjectures

Définition 3.5.3. On dit que $i, j \in [m]$ sont compatibles s'il existe une facette les contenant tous les deux, et échangeables s'ils appartiennent à deux facettes adjacentes.

Conjecture 3.5.4. Pour toutes positions $i, j \in [m]$,

1. $\{i||j\} \geq 0$ si $i \neq j$,
 $\{i||j\} = 0$ ssi i et j compatibles,
 $\{i||j\} = -1$ si $i = j$.
2. $\{i||j\} = \{j||i\} = 1$ ssi i et j sont échangeables.

Quelques éléments de preuve. Si i et j sont compatibles, soit I une facette contenant i et j . Comme $R(I)$ est une base, on en déduit que dans cette facette $[r(I, i), r(I, j)]_{R(I)} = [r(I, j), r(I, i)]_{R(I)} = 0$. Ceci montre le sens retour de la deuxième ligne.

Pour le sens retour du second point on utilise le lemme 3.4.18. On sait que $r(I, j) \in \{\pm r(I, i)\}$ avec, de plus, $r(I, j) = r(I, i) \in \Phi^+$ si $i < j$, tandis que $r(I, j) = -r(I, i) \in \Phi^-$ si $j < i$. On en déduit immédiatement le résultat annoncé. \square

Quelques pistes de réflexions dans le cas $Q = cw_0$ pour une expression réduite fixée de w_0 . Si on prend $I_0 = [n]$, on a immédiatement que $R(I_0) = \Pi$, et donc pour $i \in I_0$ et $j \in [m]$ on a bien $\{i||j\} \geq 0$.

On s'intéresse dans la suite à voir l'influence des opérations du mot Q de longueur m sur le degré de compatibilité $\{\cdot||\cdot\}$.

On rappelle qu'on a défini le *mot tourné* de $Q = q_1 q_2 \dots q_m$ par $Q_\circ = q_2 \dots q_m \psi(q_1)$ où ψ est l'automorphisme sur les réflexions simples donné par $\psi(s) = w_0^{-1} s w_0$. On note $\{\cdot||\cdot\}$ le degré de compatibilité pour Q , et $\{\cdot||\cdot\}_\circ$ celui pour Q_\circ .

Lemme 3.5.5. Soit I_\circ une facette de $\Delta(Q_\circ)$ et $i \in I_\circ$. (Ainsi $i + 1$ est dans la facette I de $\Delta(Q)$ obtenue en translatant I_\circ .) Alors :

$$\{i||j\}_\circ = \{i + 1, j + 1\},$$

où les indices sont pris modulo m avec la convention $0 = m$.

Démonstration. 1. Si $1 \notin I$ alors :

$$r(I_\circ, k) = \begin{cases} q_1 r(I, k + 1) & \text{si } k \neq m \\ q_1 w_0 \alpha_{\psi(q_1)} = \alpha_{q_1} & \text{si } k = m. \end{cases}$$

(Pour le second cas, voir plus loin le calcul.) Ainsi $R(I_\circ) = q_1 R(I)$. Soit alors $i, j \in [m]$.

(a) Si $i, j \neq m$: $\{i||j\}_\circ = \{i + 1||j + 1\}$ comme rien n'a changé.

(b) Sinon, $i \in I_\circ$ et $j = m$ (comme $m \notin I_\circ$). Alors :

$$\begin{aligned} \{i||m\}_\circ &= [r(I_\circ, m) : r(I_\circ, i)]_{R(I_\circ)} \\ &= [\alpha_{q_1} : q_1 r(I, i + 1)]_{q_1 R(I)} \\ &= [q_1 \alpha_{q_1} : r(I, i + 1)]_{R(I)} \\ &= -[\alpha_{q_1} : r(I, i + 1)]_{R(I)} = \{i + 1||1\}. \end{aligned}$$

2. Si $1 \in I \Leftrightarrow m \in I_\circ$, alors :

$$r(I_\circ, k) = \begin{cases} r(I, k+1) & \text{si } k \neq m \\ w_0 \alpha_{\psi(q_1)} = -\alpha_{q_1} = -r(I, 1) & \text{si } k = m. \end{cases}$$

(Pour le second cas, voir plus loin le calcul.) Ainsi $R(I_\circ) = R(I) \setminus \{r(I, 1)\} \cup \{-r(I, 1)\}$. Soit alors $i, j \in [m]$.

(a) Si $i \neq m, i \in I_\circ$ et $j \in [m] : \{i||j\}_\circ = \{i+1||j+1\}$ comme rien n'a changé sur ces coordonnées.

(b) Sinon, $i = m \in I_\circ$. Alors

$$\begin{aligned} \{m||j\}_\circ &= -[r(I_\circ, j) : r(I_\circ, m)]_{R(I_\circ)} \\ &= [-r(I, j+1), -r(I, 1)]_{R(I_\circ)} = \{1||j+1\}. \end{aligned}$$

Il reste à prouver les deux affirmations précédentes du calcul de $r(I_\circ, m)$ en fonction de $r(I, 1)$ dans les deux cas. La vraie question est : qui est $\alpha_{\psi(q_1)}$? Il y a deux cas :

1. Si $w_0 = -1$, alors $\alpha_{\psi(q_1)} = \alpha_{q_1}$, et $q_1 w_0 \alpha_{\psi(q_1)} = \alpha_{q_1}$, $w_0 \alpha_{\psi(q_1)} = -\alpha_{q_1}$ comme annoncé auparavant.
2. Sinon on est dans le cas A_n ($n \geq 2$), D_n pour n impair, E_6 ou $I_2(p)$ pour p impair. Dans ce cas on sait que w_0 est -1 multiplié par φ l'automorphisme d'ordre 2 du diagramme de Coxeter. Voir figure 3.5.1.

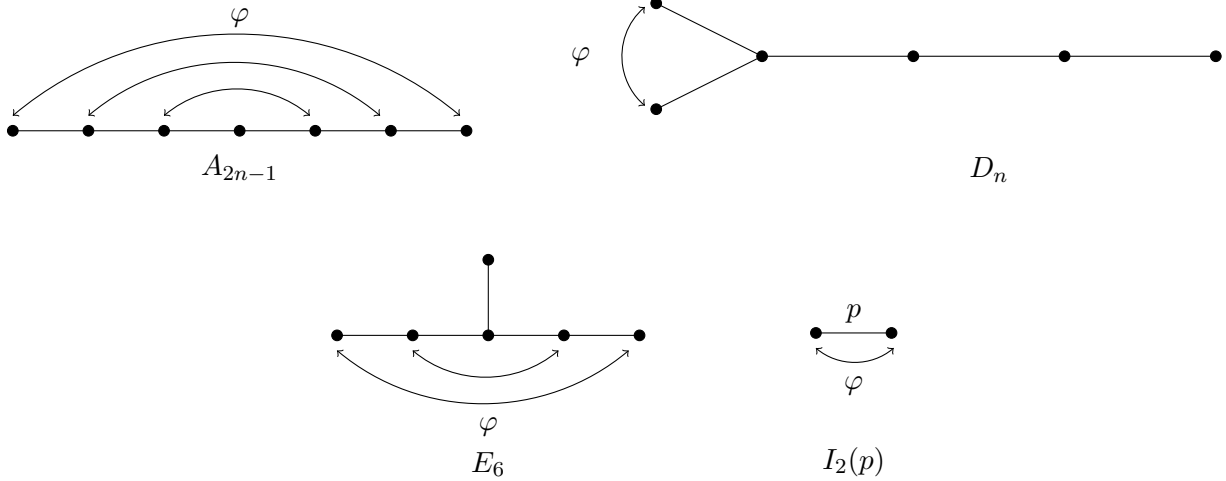


FIGURE 3.5.1 – Les automorphismes de diagramme de Coxeter.

En utilisant que $\psi(q_1) \in S$, et que l'élément de S associé à la racine α change toutes les racines simples positives sauf α en racines positives, et change α en $-\alpha$, on en déduit que $\alpha_{\psi(q_1)} = \alpha_{\varphi(i_1)}$ où i_1 correspond à la racine simple associée à q_1 . Dès lors

$$w_0 \alpha_{\psi(q_1)} = -\alpha_{\varphi^2(i_1)} = -\alpha_{q_1},$$

ce qui prouve les affirmations précédentes. □

Remarque 3.5.6. La fin de la preuve est assez technique, car elle utilise les formes explicites de w_0 dans chaque preuve. Le lecteur pourra voir qu'en type A , avec l'interprétation par des arrangements de pseudodroites, les affirmations énoncées sont assez claires.

Lemme 3.5.7. *Soit Q un mot tel que $q_i = \alpha$ et $q_{i+1} = \beta$ commutent pour un certain indice $i \in [m]$. On note Q_{\leftrightarrow} le mot obtenu en échangeant q_i et q_{i+1} dans Q . Alors les degrés de compatibilité $\{\cdot\|\cdot\}$ et $\{\cdot\|\cdot\}_{\leftrightarrow}$ sont les mêmes, à inversion des indices i et $i+1$ près.*

Démonstration. En utilisant le lemme 3.5.5, on peut supposer que $i = m-1$, $i+1 = m$, i.e. i et $i+1$ sont les deux dernières lettres de $Q = q_1 \dots q_{m-2} q_{m-1} q_m$.

Comme q_m et q_{m-1} commutent, on remarque que $q_{m-1}(\alpha_{q_m}) = \alpha_{q_m}$ et que $q_m(\alpha_{q_{m-1}}) = \alpha_{q_{m-1}}$. Soit alors I une facette de $\Delta(Q)$, I_{\leftrightarrow} la facette correspondante dans $\Delta(Q_{\leftrightarrow})$ (obtenue avec les mêmes positions plus petites que $m-2$, et échangeant le cas échéant $m-1$ et m). On déduit de cette remarque que $r(I, m-1) = r(I_{\leftrightarrow}, m)_{\leftrightarrow}$ et $r(I, m) = r(I_{\leftrightarrow}, m-1)_{\leftrightarrow}$, où $r(\cdot, \cdot)_{\leftrightarrow}$ est la fonction racine du complexe de sous-mots $\Delta(Q_{\leftrightarrow})$. On en déduit immédiatement le résultat annoncé, comme les bases $R(I)$ et $R(I_{\leftrightarrow})$ ne changent pas, ni les autres racines. \square

3.6 Groupes de Coxeter

Cette annexe présente des rappels sur les groupes de Coxeter et provient notamment de [Bou68] et de [Hum90].

3.6.1 Système de Coxeter

Exemple 3.6.1. Le groupe symétrique \mathfrak{S}_{n+1} sur $\{1, \dots, n+1\}$ admet la présentation par générateurs et relations suivante :

$$\mathfrak{S}_{n+1} = \langle \tau_i \mid \tau_i^2 = 1, (\tau_i \tau_j)^3 = 1 \rangle.$$

où l'on note $\tau_i = (i, i+1)$ pour $1 \leq i \leq n$. On dit que c'est un groupe de type A_n .

Définition 3.6.2. Soit W un groupe engendré par un ensemble S d'involutions. Pour tout $s, t \in S$ on note $m(s, t)$ l'ordre de st quand il est fini. On dit que (W, S) est un système de Coxeter s'il admet la présentation suivante :

$$W = \langle s \mid s^2 = 1, (st)^{m(s,t)} = 1 \rangle.$$

On dit alors que W est un groupe de Coxeter.

On peut coder autrement l'information nécessaire à la définition d'un groupe de Coxeter :

- Par sa matrice de Cartan $A = (a_{ij})_{i,j \in S}$ définie par $a_{ij} = -\cos\left(\frac{\pi}{m(i,j)}\right)$ si $i \neq j$ et 2 sinon.
- Par son graphe de Dynkin défini de la façon suivante : on se donne un ensemble de sommets indexé par S , et on relie deux sommets s et t si seulement si $m(s, t) \geq 3$. Dans ce cas on étiquette l'arête par $m(s, t)$. On prend en plus les conventions de ne pas étiqueter les arêtes 3, de mettre une double arête pour les arêtes 4 et une triple arête pour les arêtes 6.

Exemple 3.6.3. Le graphe de Dynkin du groupe symétrique \mathfrak{S}_n est le suivant :



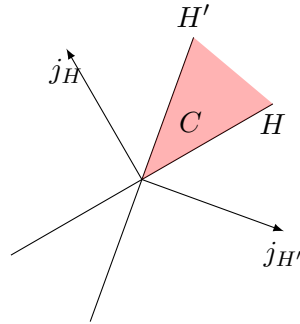
Parallèlement à cette notion on se donne la notion de groupe de réflexion réel.

Définition 3.6.4. On se donne V un espace vectoriel réel de dimension fini. On appelle réflexion de V une application linéaire involutive s_α qui fixe un hyperplan H_α et envoie un vecteur supplémentaire α sur son opposé.

On dit que W est un groupe fini de réflexions si W est un groupe fini engendré par des réflexions. Ce groupe W est irréductible si son action sur V n'admet pas de sous-espaces stables.

Définition 3.6.5. On se donne W un groupe fini de réflexions. On note \mathcal{A} l'ensemble des hyperplans des réflexions de W . Une chambre C est une composante connexe de $V^{reg} = V \setminus \cup \mathcal{A}$. Un mur de C est un hyperplan H tel que $H \cap \bar{C}$ est d'intérieur non vide dans H . On note alors M_C l'ensemble des murs de C et S_C l'ensemble des réflexions associés aux murs de M_C .

Théorème 3.6.6. Si W est un groupe fini de réflexions irréductible alors (W, S_C) est un système de Coxeter. Supposons en plus que l'on se soit donné un produit scalaire invariant par W . L'ensemble $(j_H)_{H \in M_C}$ des vecteurs normaux entrants de la chambre C est une base de V et $\langle j_H, j_{H'} \rangle = -\cos\left(\frac{\pi}{m(s_H, s_{H'})}\right)$.



Réciproquement un système de Coxeter (W, S) est représenté fidèlement sur un espace vectoriel réel de dimension $|S|$.

3.6.2 Système de racines

On se place désormais dans un espace euclidien V .

Définition 3.6.7. On appelle système de racines Φ un ensemble fini de vecteurs non nuls, appelés racines, vérifiant :

- (i) $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{-\alpha, \alpha\}, \forall \alpha \in \Phi$.
- (ii) $s_\alpha(\Phi) = \Phi, \forall \alpha \in \Phi$.

Si Φ est un système de racines, $\langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$ est un groupe fini de réflexions associé. Réciproquement on peut associer à un groupe fini de réflexions un système de racines.

Pour toute la suite on se fixe un système de racines Φ .

Définition 3.6.8. On se donne $f \in V^*$ une forme linéaire non nulle telle que $f(\alpha) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi$. Alors f partage Φ en deux parties $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi \mid f(\alpha) > 0\}$ et son complémentaire Φ^- . On dit que Φ^+ est l'ensemble des racines positives, et que Φ^- est l'ensemble des racines négatives.

La donnée de $f \in V^*$ nous a donc donné un ordre. On se donne un tel ordre dans la suite.

Définition 3.6.9. Un système simple Π est un sous-ensemble de Φ vérifiant :

- (i) $\langle \Pi \rangle = \langle \Phi \rangle$.
- (ii) Tout vecteur de Φ s'obtient comme combinaison linéaire d'éléments de Π avec tous les coefficients de même signe.

On appelle les éléments de Π les racines simples.

Le théorème suivant montre les liens entre les systèmes de racines simples et positifs, et affirme en particulier l'existence des systèmes simples.

Théorème 3.6.10. (i) Si Π est un système simple dans Φ , alors il existe un unique système positif contenant Π .

- (ii) Tout système positif Φ^+ de Φ , contient un unique système simple.

Remarque 3.6.11. Plus géométriquement, si on se donne un système positif Φ^+ les racines simples sont les rayons du cône engendré par Φ^+ .

3.6.3 Classification des groupes de Coxeter finis

En utilisant des raisonnements sur les graphes on trouve le résultat suivant.

Théorème 3.6.12. *Les seuls groupes de réflexions finis réels irréductibles sont ceux correspondant aux diagrammes de Dynkin de la figure 3.6.1.*

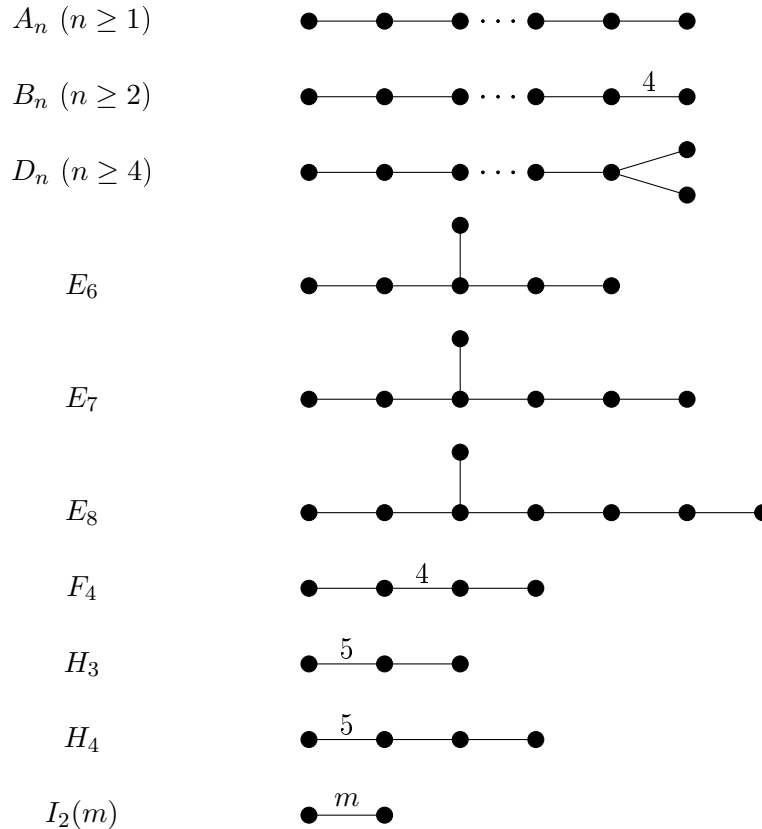


FIGURE 3.6.1 – Groupes de Coxeter finis irréductibles.

Remarque 3.6.13. On ne s'intéresse pas à H_3 , H_4 , ni $I_2(m)$ pour $m \neq 2, 3, 4, 6$ dans le cadre des algèbres amassées, car on a besoin que les a_{ij} soient des entiers (ils vont être des exposants dans les relations d'échange). En fait ces groupes sont certes représentables sur \mathbb{R} mais ne le sont pas sur \mathbb{Q} , ce qui entraîne beaucoup d'impossibilités, notamment ces groupes ne sont pas associés à des Algèbres de Lie (ce ne sont pas des groupes de Weyl contrairement aux autres). Ces groupes sont néanmoins considérés pour les complexes de sous-mots et les polytopes de briques.

Remarque 3.6.14. On se donne W un groupe de Weyl. Si α_i et α_j sont deux éléments d'un système simple de W alors on a $s_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\alpha_i$, et $a_{ij} \in \{-1, -2, -3\}$ si $i \neq j$.

3.6.4 Mots sur S

On note S^* le monoïde libre engendré par S : c'est donc le monoïde engendré par les mots sur S .

Définition 3.6.15. La longueur $l(w)$ d'un élément $w \in W$ est la longueur de la plus petite expression de w comme produit des générateurs dans S . Une expression $w = s_1 s_2 \dots s_l$ avec $s_1, \dots, s_l \in S$ est dite réduite si $l = l(w)$.

Définition 3.6.16. Pour $w \in W$, on pose $\text{Inv}(w) = \Phi^+ \cap w^{-1}(\Phi^-)$. C'est son ensemble d'inversion.

Proposition 3.6.17. On se donne un mot réduit $s_1 \dots s_n$. Alors son ensemble d'inversion est :

$$\{\alpha_n, s_n(\alpha_{n-1}), s_n s_{n-1}(\alpha_{n-2}), \dots, s_n \dots s_2(\alpha_1)\}.$$

Corollaire 3.6.18. Soit $w \in W$. Alors $l(w) = |\text{Inv}(w)|$.

Proposition 3.6.19. Il existe un unique élément de longueur maximale w_0 dans W . C'est une involution, son ensemble d'inversion est Φ^+ et $l(w) = |\Phi^+|$.

3.6.5 Poids et coracines

Définition 3.6.20. Si $\alpha \in \Phi$, on note $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$ la coracine associée à α . L'ensemble des coracines est noté Φ^\vee : c'est aussi un système de racines appelé système de racines dual. Par exemple B_n et C_n sont duaux l'un de l'autre.

Définition 3.6.21. On appelle poids fondamentaux $\{\omega_s \mid s \in S\}$ la base duale de la base des coracines $\{\alpha_s^\vee \mid s \in S\}$.

Remarque 3.6.22. Géométriquement le poids ω_s donne la direction du rayon de la chambre fondamentale \mathcal{C} qui n'est pas contenu dans l'hyperplan de réflexion de s .

On aurait pu prendre la base duale des α_s , mais pour le polytope de briques on préfère renormaliser afin de simplifier les calculs. Voir [PS13].

3.7 Géométrie discrète

3.7.1 Complexes et éventails

Définition 3.7.1. On appelle complexe simplicial une collection d'ensembles stable par sous-ensemble. On appelle faces les ensembles du complexe simplicial, et facettes d'un complexe les faces maximales (pour l'inclusion).

Exemple 3.7.2. On se donne un tétraèdre et on considère l'ensemble constitué de ses sommets, ses arêtes et ses faces. C'est un complexe simplicial. Pour rendre tout cela plus rigoureux on numérote les sommets de 1 à 6 selon la figure ci-dessous. Alors si l'on considère la facette $\{1, 2, 3\}$, tous ses sous-ensembles $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$ sont dans le tétraèdre. À l'inverse considérons son polaire le cube pour lequel on numérote encore les sommets. Si l'on considère la face $\{1, 2, 3, 4\}$, le sous-ensemble $\{1, 3\}$ n'est pas une arête du cube, donc le bord du cube n'est pas un complexe simplicial.

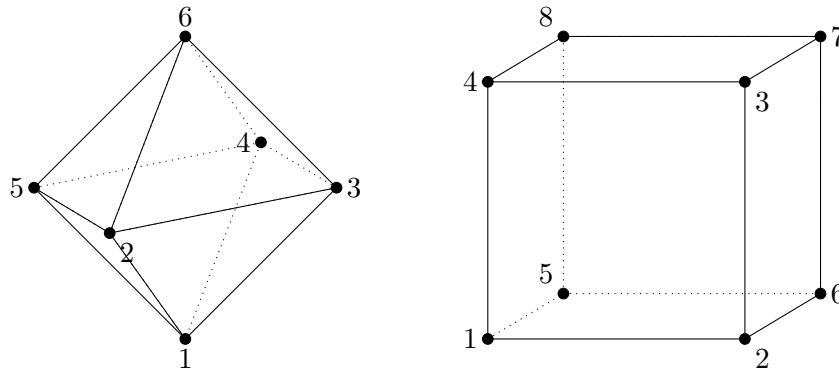


FIGURE 3.7.1 – Un tétraèdre et un cube.

Définition 3.7.3. Dans un complexe simplicial, on appelle dimension (ou degré) d'une face son cardinal moins un. Dans l'exemple précédent, une arête (c'est-à-dire un ensemble à deux éléments) est de dimension 1. Un complexe simplicial est dit pur si toutes ses facettes sont de même dimension, et on appelle alors dimension du complexe la dimension de ses facettes.

Exemple 3.7.4. Le tétraèdre est bien pur. À l'inverse le complexe suivant n'est pas pur car les faces $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 4\}$ sont maximales mais de dimension distinctes.

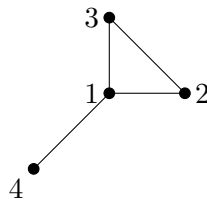


FIGURE 3.7.2 – Un complexe simplicial non pur.

Définition 3.7.5. Une sphère est un complexe simplicial homéomorphe à une sphère de même dimension. (On met sur un complexe simplicial la topologie induite par celle des simplexes.)

Définition 3.7.6. Dans \mathbb{R}^n un cône est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients positifs d'un ensemble donné de vecteurs (appelés rayons). Le cône est pointé si tous les rayons sont dans un même demi-espace.

Définition 3.7.7. Un éventail est un ensemble F de cônes tel que :

1. Si $C \in F$, alors toutes les faces de C sont dans F .
2. Si $C, C' \in F$, alors $C \cap C'$ est une face de C et de C' .

F est dit simplicial si tous ses cônes sont simpliciaux. Il est dit complet dans \mathbb{R}^n si tout point de \mathbb{R}^n est dans un cône maximal, lequel est unique s'il est dans l'intérieur du cône maximal.

3.7.2 Polytopes simples et simpliciaux

Définition 3.7.8. On appelle polytope dans \mathbb{R}^n l'enveloppe convexe de points dans \mathbb{R}^n . En considérant ces points comme faces de dimension 1 on peut alors voir le polytope comme un ensemble d'ensemble. S'il est stable par sous-ensembles, le polytope est dit simplicial (i.e. son complexe sous-jacent est simplicial, ou encore les faces de dimension d sont des d -simplexes, ou encore les sommets d'une facette sont en position générale). Si pour tout sommet, les facettes dans lesquels il est inclus sont en positions générales, le polytope est dit simple.

Exemple 3.7.9. Le cube et le tétraèdre sont des polytopes. Le premier est simple tandis que le second est simplicial.

Définition 3.7.10. Soit P un polytope et un v un sommet de P . Le cône engendré par v dans P est le cône dont les rayons sont les $v - w$ pour w sommet voisin de v dans P .

Définition 3.7.11. Soit P un polytope simple de dimension maximale dans V espace vectoriel réel de dimension n . La fonction support de P est la fonction réelle définie sur V^* par :

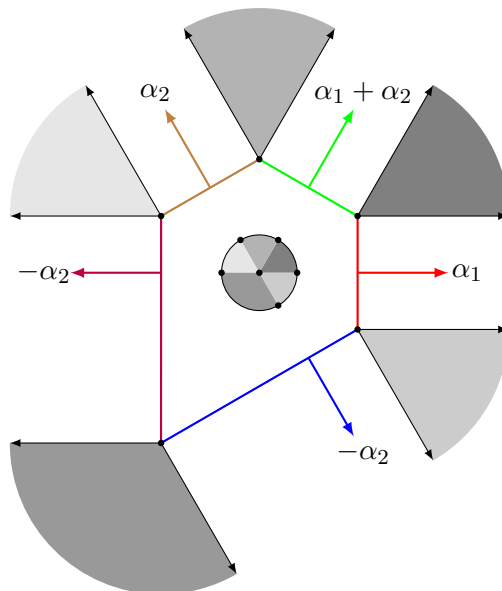
$$F(\gamma) = \max_{\varphi \in P} \langle \gamma, \varphi \rangle.$$

Le cône normal $\mathcal{N}(P)$ est l'éventail simplicial complet dans V^* dont les cônes maximaux sont les domaines de linéarité de F . Plus précisément ces cônes sont en correspondance avec les sommets de P de la façon suivante : si φ est un sommet de P , il correspond au cône :

$$\{\gamma \in V^* : F(\gamma) = \langle \gamma, \varphi \rangle\}.$$

Exemple 3.7.12. L'idée de la correspondance décrite ci-dessus est la suivante : si l'on se donne une direction (un vecteur $\gamma \in V^*$), on peut se demander quel est l'ensemble des vecteurs $\varphi \in P$ qui réalisent effectivement le maximum dans la définition 3.7.11. L'exemple ci-dessous explique que cette correspondance direction/ensemble des vecteurs fait correspondre à une facette de P un rayon de $\mathcal{N}(P)$, et à un sommet de P un cône maximal de $\mathcal{N}(P)$.

Sur le dessin suivant, on a dessiné les directions des racines de $\Phi_{\geq -1}$ en couleur, et on voit qu'elles correspondent à la facette de P de la même couleur. A l'inverse en chaque sommet de P on a dessiné les cônes ouverts dans V^* qui sont les ensembles de directions maximisées seulement par leur sommet. On a reporté au centre ces cônes pour montrer l'éventail simplicial complet.

FIGURE 3.7.3 – Les correspondances $P/\mathcal{N}(P)$ en type A_2 .

Chapitre 4

Exposé de première année

Partitions de n sous la direction d'Olivier Benoist Avec Gabriel Lellouch.

Introduction

Toto a n billes, et autant d'amis, indiscernables. De combien de manières peut-il réaliser le partage ? C'est cette question que nous allons tâcher de résoudre ici.

Plus formellement, le problème se pose ainsi : étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, on appelle *partition de n* tout p -uplet (n_1, \dots, n_p) , avec $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p$ tel que $n_1 + \dots + n_p = n$. Combien existe-t-il de partitions de n ? Autrement dit, de combien de manières peut-on écrire n comme somme d'entiers naturels, sans tenir compte de l'ordre ?

Dans toute la suite, on notera $p(n)$ le nombre de partitions de n . Par exemple, on a $p(5) = 7$, car on a $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 3 = 1 + 4 = 1 + 2 + 2 = 2 + 3 = 5$. Par convention, on posera $p(0) = 1$.

En 1918, le célèbre duo Hardy-Ramanujan ([HR00]) donne un équivalent de $p(n)$ quand n tend vers l'infini, qui découle d'un développement asymptotique plus précis, de la forme :

$$p(n) = \sum_{k < \alpha\sqrt{n}} P_k(n) + O(n^{-1/4}).$$

La série de terme général $P_k(n)$ diverge pour tout n .

En 1937, le mathématicien Hans Rademacher modifie légèrement les travaux de Hardy et Ramanujan pour obtenir une série convergente, ce qui donne ainsi une formule exacte pour $p(n)$. Les sommes partielles de cette série ont également le bon goût de donner un développement asymptotique de $p(n)$. Ceci se révèle particulièrement important pour le calcul de $p(n)$, puisque, $p(n)$ étant entier, il suffit alors de tronquer la somme à un rang assez grand et de prendre le plus proche entier pour obtenir le nombre exact $p(n)$.

Nous allons ici nous intéresser à la preuve de la formule exacte de $p(n)$, obtenue par Rademacher (théorème 4.1.13). La preuve en elle-même est l'objet de la première partie. Pour cela,

nous introduirons la fonction génératrice définie sur tout $B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n.$$

Nous obtiendrons une formule pour F sous forme de produit qui mettra en évidence des divergences en toutes les racines de l'unité.

Le calcul de $p(n)$ revient alors au calcul du résidu en 0 de la fonction $F(x)/x^{n+1}$.

L'intérêt de la preuve va être le choix du contour d'intégration pour appliquer le théorème des résidus. Intégrer sur le contour que nous définirons permettra de diviser l'intégrale en une somme, indexée par les racines de l'unité, d'intégrales décrivant le comportement de F au voisinage de la singularité correspondante. Il restera alors à utiliser une équation fonctionnelle vérifiée par F et reliant son comportement en une racine de l'unité à celui en 0 pour pouvoir estimer chacune des intégrales de la somme. Nous admettrons dans un premier temps cette équation fonctionnelle.

Les trois parties restantes sont consacrées à la démonstration de l'équation fonctionnelle de F . Pour cela, nous allons devoir faire appel à des classes de fonctions bien particulières. Tout d'abord, la deuxième partie aura pour objet l'étude des fonctions dites elliptiques. Le but sera de définir la fonction Δ (section 2.3), que nous introduirons par le biais de la fonction elliptique \wp de Weierstrass (section 2.2).

La troisième partie étudiera les fonctions dites modulaires, qui sont équivariantes pour un certain groupe de transformations du demi-plan supérieur, le groupe modulaire (section 3.1). Nous démontrerons le résultat principal qu'une fonction modulaire ne prenant pas toutes les valeurs possibles est constante (théorème 4.3.2).

Enfin, nous définirons dans la dernière partie la fonction η de Dedekind. Cette fonction nous permettra d'utiliser les résultats développés dans les deux parties précédentes. Son lien étroit avec Δ nous donnera une équation fonctionnelle qu'elle vérifie (section 4.2) ; et une relation simple entre η et F nous amènera alors à transformer cette équation en l'équation fonctionnelle de F (section 4.3) que nous avons admise dans la première partie.

Le lecteur se rendra sans doute compte que, pour les besoins de la preuve, nous ferons appel à des objets fondamentaux (fonctions elliptiques, modulaires,...), que nous n'utiliserons peut-être pas autant qu'ils le mériteraient. Il faut bien comprendre que ces objets ont de nombreuses autres applications. En présenter une ici permet de donner une idée des résultats qu'ils peuvent donner non seulement en analyse, mais également dans le cas présent, en théorie des nombres. Cette utilisation d'outils d'analyse complexe en théorie des nombres peut se généraliser. Le lecteur intéressé pourra se référer à [CC10]. En suivant l'exemple des partitions de n , on estime le nombre de manières d'écrire un entier comme somme de carrés, ou de cubes, et pourquoi pas ? le nombre de manières d'écrire un nombre pair comme somme de nombres premiers...

Remerciements :

Nous voudrions vivement remercier Olivier Benoist pour sa disponibilité, son aide constante et pour le moins fondamentale, ses conseils avisés et son enthousiasme, et enfin, pour n'avoir pas osé effacer notre contour d'intégration de son tableau durant plusieurs mois.

4.1 Nombre de partitions

4.1.1 Expression sous forme de produit

Comme expliqué dans le préambule nous allons étudier la fonction définie sur $B(0, 1)$:

$$F(z) = \sum_{n \geq 1} p(n)z^n.$$

La proposition suivante montre que cela a un sens et exprime cette série par une autre expression.

Proposition 4.1.1. *La série $\sum_{n \geq 1} p(n)z^n$ et le produit infini $\prod_{n \geq 1} \frac{1}{1-z^n}$ convergent absolument sur $B(0, 1)$ vers une même fonction que l'on notera $F(z)$.*

Démonstration. Le fait que $\prod_{n \geq 1} \frac{1}{1-z^n}$ converge absolument sur $B(0, 1)$ est immédiat étant donné que son inverse converge absolument car la série $\sum_{k \geq 1} z^k$ converge absolument. On note $F(z)$ la limite.

On veut montrer que la somme et le produit coïncident sur $B(0, 1)$. Nous allons d'abord voir une preuve intuitive de ce résultat puis nous écrirons formellement ce qui se passe.

En fait, si l'on développe chaque facteur par la série entière qui lui est associé on a :

$$\prod_{n \geq 1} \frac{1}{1-x^n} = (1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^3+x^6+\dots)\dots$$

On développe alors le membre de gauche et on range les termes par puissance de x . On obtient alors une série de la forme :

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} a(k)x^k.$$

On voudrait montrer que $a(k) = p(k)$. Supposons que l'on ait pris dans le premier facteur le terme x^{k_1} , le terme x^{2k_2} dans le second... jusqu'au terme x^{mk_m} pour le m -ième, où tous les $k_i \geq 0$. Leur produit est :

$$x^{k_1} x^{2k_2} x^{3k_3} \dots x^{mk_m} = x^k$$

avec :

$$k = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + mk_m.$$

On a donc écrit k de la façon suivante :

$$k = (1 + 1 + 1 + \dots + 1) + (2 + 2 + \dots + 2) + \dots + (m + m + \dots + m),$$

où la première parenthèse contient k_1 termes, la seconde k_2 termes et ainsi de suite. On a donc écrit une partition de k . On voit donc que chaque partition de k produit un terme x^k et que, réciproquement, chaque terme x^k provient d'une partition de k . Ainsi $a(k)$, le coefficient de x^k , est égal à $p(k)$, le nombre de partitions de k .

Il est évident que cette preuve n'est pas rigoureuse, car nous avons ignoré toutes les questions de convergence et que nous avons traité des produits infinis comme des polynômes. Nous allons donc rendre cette preuve plus rigoureuse.

Pour ce faire nous allons restreindre x à l'intervalle $[0, 1[$. On introduit également deux fonctions :

$$G_m(x) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{1-x^k}, \text{ et } : G(x) = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x^k} = \lim_{m \rightarrow \infty} G_m(x).$$

Le produit $G(x)$ converge absolument pour $0 \leq x < 1$ comme vu précédemment. Remarquons également qu'à x fixé la suite $G_m(x)$ est croissante car :

$$G_{m+1}(x) = \frac{1}{1-x^{m+1}} G_m(x) \geq G_m(x).$$

Ainsi : $\forall x \in [0, 1[, \forall m, G_m(x) \leq G(x)$.

Par ailleurs, $G_m(x)$ est le produit d'un nombre fini de séries absolument convergentes. C'est donc également une série absolument convergente que l'on peut écrire :

$$G_m(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_m(k)x^k.$$

Ici, $p_m(k)$ est le nombre de solutions à l'équation :

$$k = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots + mk_m,$$

c'est-à-dire que $p_m(k)$ est le nombre de partitions de k en somme d'entiers tous inférieurs ou égaux à m . Dès lors, on a que si $m \geq k$, $p_m(k) = p(k)$. On a donc toujours :

$$p_m(k) \leq p(k)$$

avec égalité quand $m \geq k$. En d'autres termes :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(k) = p(k).$$

On divise alors la série de G_m en deux termes :

$$\begin{aligned} G_m(x) &= \sum_{k=0}^m p_m(k)x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k)x^k \\ &= \sum_{k=0}^m p(k)x^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} p_m(k)x^k. \end{aligned}$$

Comme $x \geq 0$ on a :

$$\sum_{k=0}^m p(k)x^k \leq G_m(x) \leq G(x).$$

Ceci montre que la série $\sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k$ converge. De plus, comme $p_m(k) \leq p(k)$ on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k \leq G(x).$$

Ainsi, à x fixé, la série $\sum p_m(k)x^k$ converge uniformément en m . On fait tendre m vers l'infini et on obtient :

$$G(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} G_m(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_m(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} p_m(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k.$$

Ceci conclut la preuve si $0 \leq x < 1$. La série entière $\sum_{n \geq 1} p(n)z^n$ converge sur $[0, 1]$ donc aussi sur $B(0, 1)$. Alors, la fonction $\sum_{n \geq 1} p(n)z^n - \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1-z^n}$ est analytique sur le disque et s'y annule une infinité de fois donc est identiquement nulle. \square

4.1.2 Équation fonctionnelle de F

Le résultat suivant est admis pour le moment et fera l'objet des trois prochaines parties. Il sera finalement démontré à l'extrême fin de ce mémoire, au théorème 4.4.11.

Théorème 4.1.2. *Soit $F(t) = 1 / \prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)$.*

Soit $k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $h, H \in \mathbb{Z}$ tels que $\operatorname{Re}(z) > 0$, $(h, k) = 1$ et $hH \equiv -1[k]$ Alors, pour

$$x = \exp\left(\frac{2i\pi h}{k} - \frac{2\pi z}{k^2}\right), x' = \exp\left(\frac{2i\pi H}{k} - \frac{2\pi}{z}\right)$$

on a

$$F(x) = e^{i\pi s(h,k)} \left(\frac{z}{k}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\pi}{12z} - \frac{\pi z}{12k^2}\right) F(x'),$$

où $s(h, k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k} \left(\frac{hr}{k} - \left[\frac{hr}{k}\right] - \frac{1}{2}\right)$ est appelée somme de Dedekind.

Remarque 1 : La force de cette équation est qu'elle relie le comportement de F en une racine de l'unité à son comportement en 0, que l'on connaît bien.

Remarque 2 : Les sommes de Dedekind seront étudiées en détail en 4.2.2.

4.1.3 Contour d'intégration

Nous arrivons maintenant à la partie centrale du calcul de $p(n)$. Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, nous allons appliquer le théorème des résidus : en effet, la fonction $F(x)/x^{n+1}$ admet en 0 un pôle dont le résidu est précisément $p(n)$. On a donc :

$$p(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{F(x)}{x^{n+1}} dx.$$

Tout l'intérêt de la preuve réside dans le choix du contour d'intégration C . Il nous faut ici décrire le contour particulier qui fut utilisé par Rademacher. Celui-ci est relié aux ensembles de Farey et aux cercles de Ford que l'on va définir et dont on va décrire certaines propriétés ici.

Ensemble de Farey

Définition 4.1.3. *L'ensemble des fractions de Farey d'ordre n , noté F_n , est l'ensemble des fractions irréductibles dans l'intervalle $[0, 1]$ dont le dénominateur est $\leq n$, rangé par ordre croissant.*

Exemples :

$$F_1 : \frac{0}{1}, \frac{1}{1}$$

$$F_2 : \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

$$F_3 : \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$$

$$F_4 : \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$$

$$F_5 : \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

$$F_5 : \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$$

Ces premiers exemples montrent déjà certaines propriétés générales de ces ensembles. On voit ainsi que $F_n \subset F_{n+1}$. On passe donc de F_n à F_{n+1} en ajoutant de nouvelles fractions. On voit aussi que si les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont consécutives dans F_n mais pas dans F_{n+1} , alors c'est leur *médiane* $\frac{a+c}{b+d}$ qui les sépare, et c'est la seule fraction insérée entre les deux fractions.

Dans toute la suite, on prendra $(a, b) = 1$ et $(c, d) = 1$ avec $b > 0$ et $d > 0$.

Lemme 4.1.4. *Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, alors leur médiane $\frac{a+c}{b+d}$ se situe strictement entre les deux.*

Démonstration.

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{bc-ad}{d(b+d)} > 0.$$

□

Les exemples précédents montrent que $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont consécutifs pour $n = 3$ et 4 . Ceci illustre la propriété générale suivante :

Lemme 4.1.5. *Soit $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$. Si $bc - ad = 1$ alors les fractions a/b et c/d sont consécutives dans F_n pour :*

$$\max(b, d) \leq n \leq b + d - 1.$$

Démonstration. La relation $bc - ad = 1$ implique que a/b et c/d sont irréductibles. Si $\max(b, d) \leq n$ alors $b \leq n$ et $d \leq n$ donc a/b et c/d sont dans F_n . Prouvons alors qu'ils sont consécutifs pour $n \leq b + d - 1$. Supposons qu'ils ne le soient pas : il existe une fraction h/k avec $a/b < h/k < c/d$. Il nous faut montrer que $k \geq b + d$ et alors on aura ce que l'on veut.

Mais on a l'égalité :

$$k = (bc - ad)k = b(ck - dh) + d(bh - ak). \quad (1)$$

Et les inégalités $a/b < h/k < c/d$ montrent qu'on a aussi $ck - dh \geq 1$ et $bh - ak \geq 1$. Et ainsi $k \geq b + d$.

En conclusion, toute fraction se trouvant entre a/b et c/d a un dénominateur $k \geq b + d$. Donc pour $n \leq b + d - 1$, les fractions a/b et c/d sont consécutives dans F_n . Ceci conclut la preuve. □

Lemme 4.1.6. *Soit $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$ avec $bc - ad = 1$. Notons h/k la médiane des fractions a/b et c/d . Alors $a/b < h/k < c/d$, et ces fractions vérifient les relations :*

$$bh - ak = 1, ck - dh = 1.$$

Démonstration. Comme h/k se trouve entre a/b et c/d , on a $ck - dh \geq 1$ et $bh - ak \geq 1$. Enfin l'équation (1) de la preuve précédente montre que $k = b + d$ si et seulement si $ck - dh = 1$ et $bh - ak = 1$. \square

La prochaine proposition nous explique comment construire F_{n+1} à partir de F_n .

Proposition 4.1.7. *L'ensemble F_{n+1} contient F_n . Chaque fraction de F_{n+1} qui n'est pas dans F_n est la médiane de deux fractions consécutives dans F_n . De plus, si $a/b < c/d$ dans l'un quelconque des F_n , alors on a la relation dite unimodulaire : $bc - ad = 1$.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n . Pour $n = 1$, les fractions $0/1$ et $1/1$ sont consécutives et vérifient la relation unimodulaire. On passe de F_1 à F_2 en insérant leur médiane $1/2$.

Supposons désormais que a/b et c/d sont consécutives dans F_n et satisfont la relation unimodulaire. Alors, d'après le lemme 4.1.5, elles sont consécutives dans F_m pour m satisfaisant :

$$\max(b, d) \leq m \leq b + d - 1.$$

On forme leur médiane h/k où $h = a + c$, $k = b + d$. D'après le lemme 4.1.6, on a $bh - ak = 1$ et $ck - dh = 1$, donc h et k sont premiers entre eux. Les fractions a/b et c/d sont consécutives dans F_m pour $\max(b, d) \leq m \leq b + d - 1$, mais ne sont pas consécutives dans F_k , vu que $k = b + d$ et que h/k se trouve dans F_k entre a/b et c/d . Mais les deux nouvelles paires $a/b < h/k$ et $h/k < c/d$ sont désormais consécutives dans F_k puisque $k = \max(b, k) = \max(d, k)$. Ces deux paires satisfont toujours la relation unimodulaire.

On a donc montré que pour passer de F_n à F_{n+1} on ajoute seulement des médianes de paires consécutives dans F_n , et que les nouvelles paires satisfont les relations unimodulaires. Ainsi F_{n+1} a toutes les propriétés demandées. \square

Cercles de Ford

Définition 4.1.8. *Soit un nombre rationnel h/k avec $(h, k) = 1$. Le cercle de Ford lié à cette fraction, noté $C(h, k)$, est le cercle dans le plan complexe de rayon $1/(2k^2)$ centré en $h/k + i/(2k^2)$ (figure ci-dessous).*

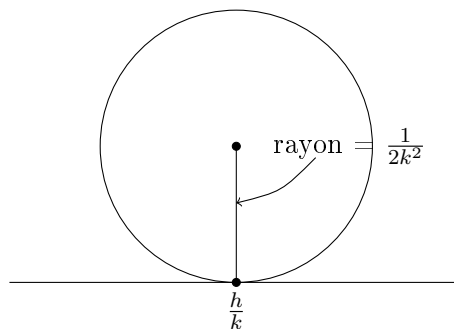


Figure 1.1

Proposition 4.1.9. *Deux cercles de Ford, $C(a, b)$ et $C(c, d)$ sont soit tangents l'un à l'autre, soit ne s'intersectent pas. Ils sont tangents si et seulement si $bc - ad = \pm 1$. En particulier, les cercles de Ford de deux fractions consécutives dans l'un des ensembles de Farey sont tangents l'un à l'autre.*

Démonstration.

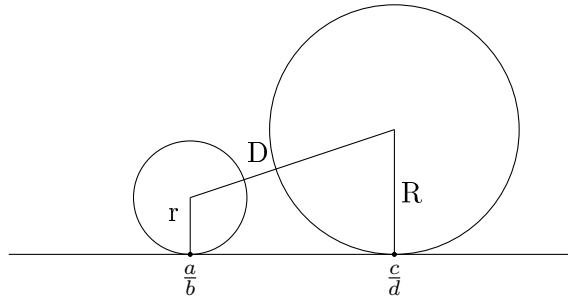


Figure 1.2

Cette figure nous montre que le carré de la distance D entre les centres est :

$$D^2 = \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2$$

alors que le carré de la somme de leurs rayons est :

$$(r + R)^2 = \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2.$$

Ainsi la différence $D^2 - (r + R)^2$ vaut :

$$\begin{aligned} D^2 - (r + R)^2 &= \left(\frac{ad - bc}{bd}\right)^2 + \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2d^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2d^2}\right)^2 \\ &= \frac{(ad - bc)^2 - 1}{b^2 d^2} \geq 0, \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $(ab - cd)^2 = 1$. □

Proposition 4.1.10. *Soit $h_1/k_1 < h/k < h_2/k_2$ trois fractions de Farey consécutives (i.e. consécutives dans un des ensembles de Farey). Les points de tangence de $C(h, k)$ avec $C(h_1, k_1)$ et $C(h_2, k_2)$ sont respectivement les points :*

$$\tau_1(h, k) = \frac{h}{k} - \frac{k_1}{k(k^2 + k_1^2)} + \frac{i}{k^2 + k_1^2}$$

et :

$$\tau_2(h, k) = \frac{h}{k} + \frac{k_1}{k(k^2 + k_2^2)} + \frac{i}{k^2 + k_2^2}.$$

Démonstration.

La figure 1.3 montre que

$$\tau_1(h, k) = \left(\frac{h}{k} - a\right) + i \left(\frac{1}{2k^2} - b\right).$$

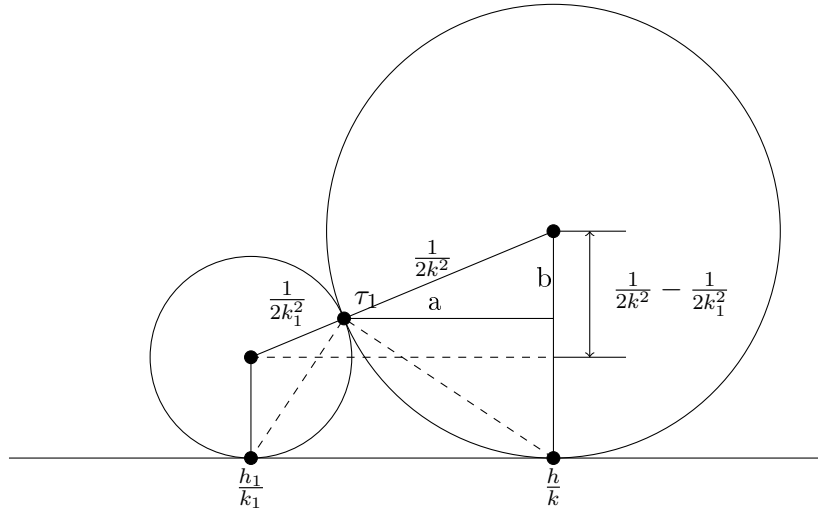


Figure 1.3

Un coup de théorème de Thalès nous permet d'obtenir que :

$$\frac{a}{\frac{h}{k} - \frac{h_1}{k_1}} = \frac{\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k_1^2}} = \frac{k_1^2}{k^2 + k_1^2} \text{ et donc } a = \frac{k_1}{k(k^2 + k_1^2)}.$$

De même on trouve que :

$$\frac{b}{\frac{1}{2k^2}} = \frac{\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2k_1^2}}{\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2k_1^2}} = \frac{k_1^2 - k^2}{k_1^2 + k^2} \text{ et donc } b = \frac{1}{2k^2} \frac{k_1^2 - k^2}{k_1^2 + k^2}.$$

Et ces formules donnent celle souhaitée pour $\tau_1(h, k)$. De même, on obtient les bonnes formules pour $\tau_2(h, k)$. \square

Retour au cercle

Pour simplifier les calculs qui suivront, nous allons ramener chacun des cercles de Ford à un même cercle. Ceci est décrit par le changement de variables suivant :

Lemme 4.1.11. *Le changement de variable*

$$z = -ik^2 \left(\tau - \frac{h}{k} \right)$$

transforme le cercle de Ford $C(h, k)$ en un cercle K de rayon $1/2$ centré en $z = 1/2$. Les points de contact $\tau_1(h, k)$ et $\tau_2(h, k)$ du théorème 4.1.10 deviennent les points :

$$z_1(h, k) = \frac{k^2}{k^2 + k_1^2} + i \frac{kk_1}{k^2 + k_1^2}$$

et

$$z_2(h, k) = \frac{k^2}{k^2 + k_2^2} - i \frac{kk_2}{k^2 + k_2^2}.$$

De plus, l'arc supérieur joignant $\tau_1(h, k)$ et $\tau_2(h, k)$ devient l'arc de K reliant $z_1(h, k)$ et $z_2(h, k)$ et ne touchant pas l'axe imaginaire, comme le montre la figure 1.4.

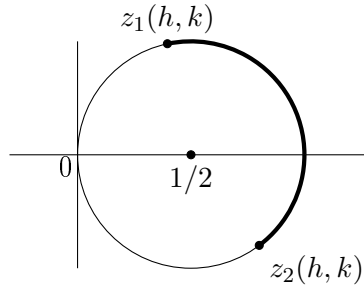


Figure 1.4

Démonstration. La translation $\tau - h/k$ déplace $C(h, k)$ vers la gauche de h/k et place donc son centre à $i/(2k^2)$. La multiplication par $-ik^2$ permet d'amener le rayon du cercle à $1/2$ et fait tourner de cercle de $-\pi/2$. Les expressions de $z_1(h, k)$ et $z_2(h, k)$ se calculent facilement. \square

Enfin, on va chercher à obtenir des majorations sur ce nouveau cercle.

Lemme 4.1.12. *Pour les points z_1 et z_2 du lemme 4.1.11 on a :*

$$|z_1(h, k)| = \frac{k}{\sqrt{k^2 + k_1^2}}$$

$$|z_2(h, k)| = \frac{k}{\sqrt{k^2 + k_2^2}}$$

De plus, si z est sur la corde joignant z_1 à z_2 on a :

$$|z| < \frac{\sqrt{2}k}{N}$$

avec N tel que $h_1/k_1 < h/k < h_2/k_2$ sont consécutifs dans F_N . Enfin la longueur de la corde n'excède pas $2\sqrt{2}k/N$.

Démonstration. Les formules pour le calcul de $|z_1(h, k)|$ et $|z_2(h, k)|$ s'obtiennent directement. La majoration sur la corde se trouve en écrivant que, si z est sur la corde, alors $|z(h, k)| \leq \max(|z_1(h, k)|, |z_2(h, k)|)$. Il suffit donc de prouver que :

$$|z_1| < \frac{\sqrt{2}k}{N} \text{ et } |z_2| < \frac{\sqrt{2}k}{N}.$$

On utilise pour ce faire l'inégalité arithmético-géométrique sous la forme :

$$\frac{k + k_1}{2} \leq \left(\frac{k^2 + k_1^2}{2} \right)^{1/2}.$$

Ce qui nous donne :

$$(k^2 + k_1^2)^{1/2} \geq \frac{k + k_1}{\sqrt{2}} \geq \frac{N + 1}{2} \geq \frac{N}{2}.$$

Pour obtenir la deuxième inégalité on utilise que $k = k_1 + k_2$ et que, selon la proposition 4.1.7, on a $N - 1 \leq k_1 + k_2$. On obtient ainsi les majorations en combinant ce résultat au calcul explicite de $|z_1(h, k)|$ et $|z_2(h, k)|$.

Enfin la longueur de la corde est $\leq |z_1| + |z_2|$. \square

Contour $P(N)$

Comme nous allons le voir dans le vif de la preuve, intégrer directement autour de 0 n'est pas simple. Dans toute la suite, nous allons donc jongler entre le cercle unité et le demi-plan supérieur via la transformation $z \rightarrow e^{2i\pi z}$. Pour cela, au lieu d'intégrer en tournant autour de 0, nous allons choisir un chemin, dans le demi-plan supérieur, reliant les points i et $i + 1$. Pour tout entier N , nous allons considérer un contour d'intégration, noté $P(N)$, joignant les points i et $i + 1$.

Pour ce faire on considère les cercles de Ford de l'ensemble de Farey F_N . Les propositions 4.1.9 et 4.1.10 montrent que l'on peut considérer le chemin constitué par les arcs supérieurs reliant deux cercles de Ford correspondant à deux fractions consécutives dans F_N . Voici par exemple le contour $P(3)$:

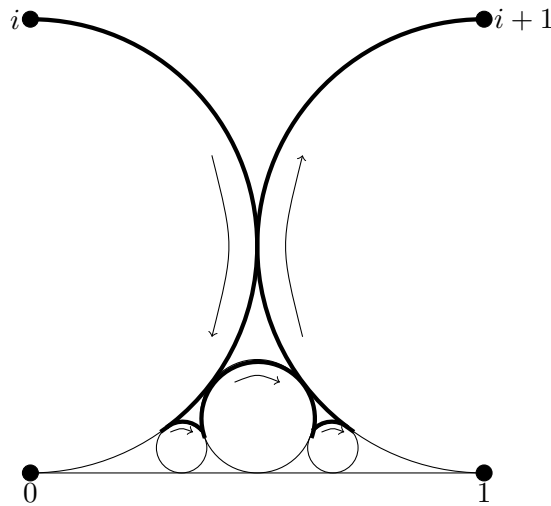


Figure 1.5 : le contour d'intégration $P(3)$

Une ultime remarque avant de prouver le résultat de Rademacher. On remarque que quand N augmente, on se retrouve à intégrer sur une partie de plus en plus importante du cercle de Ford et l'on se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

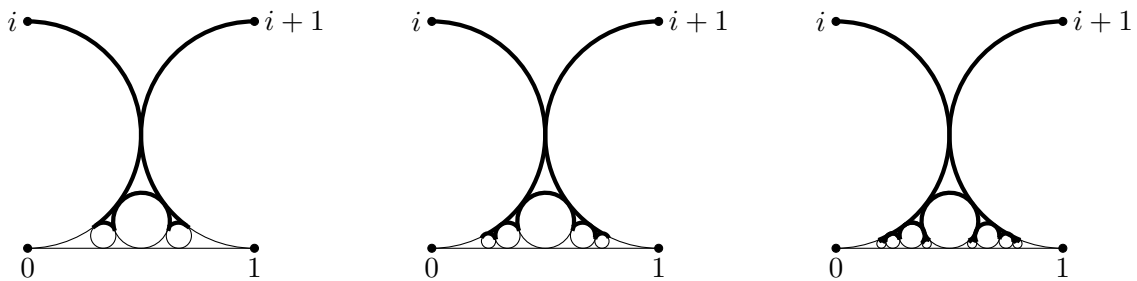


Figure 1.6 : les contours d'intégration $P(3)$, $P(4)$ et $P(5)$

Ainsi, on voit bien que ce contour permet d'intégrer dans le demi-plan supérieur au voisinage de chaque élément de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, ce qui correspondra à intégrer dans le disque unité près des racines de l'unité.

4.1.4 Nombre de partitions

Preuve

Théorème 4.1.13. *Si $n \geq 1$, le nombre de partitions $p(n)$ est égal à la série convergente :*

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh \left\{ \frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(n - \frac{1}{24} \right) \right\}}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right),$$

avec :

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 \leq h < k \\ (h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n h/k}.$$

Démonstration. On a, par le théorème des résidus que :

$$p(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{F(x)}{x^{n+1}} dx$$

avec $F(x) = \sum_{n \geq 1} p(n)x^n = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1-x^n}$,

et C est une courbe orientée dans le sens positif, entourant $x = 0$ et tracée dans le cercle unité.

Le changement de variable $x = e^{2\pi i \tau}$ transforme le cercle unité en la bande verticale semi-infinie entre 0 et 1 dans le demi-plan supérieur. Si C est un cercle de centre 0 de rayon $e^{-2\pi}$, le point τ varie de i à $i+1$ le long d'un segment horizontal. Au lieu d'intégrer selon ce segment, nous allons intégrer selon les contours $P(N)$ décrits précédemment.

On a alors :

$$p(n) = \int_i^{i+1} F(e^{2\pi i \tau}) e^{2\pi i n \tau} d\tau = \int_{P(N)} F(e^{2\pi i \tau}) e^{2\pi i n \tau} d\tau.$$

Dans toute la discussion n est fixé, et on fera tendre à la toute fin N vers l'infini.

On va découper le contour d'intégration $P(N)$ selon les différents cercles de Ford :

$$\int_{P(N)} = \sum_k \sum_{\substack{0 \leq h < k \\ (h,k)=1}} \int_{\gamma(h,k)} = \sum_{h,k} \int_{\gamma(h,k)},$$

où $\gamma(h, k)$ désigne la partie du cercle de Ford $C(h, k)$ contenue dans $P(N)$, et où on a abrégé l'écriture de la double somme dans la deuxième expression.

On fait alors le changement de variable décrit plus haut :

$$z = -ik^2 \left(\tau - \frac{h}{k} \right).$$

Par le lemme 4.1.11, on se retrouve à intégrer sur un arc de cercle du cercle K de centre $1/2$ et de rayon $1/2$, et joignant les points $z_1(h, k)$ et $z_2(h, k)$ définis dans ce même théorème.

On a donc désormais :

$$\begin{aligned}
 p(n) &= \sum_{h,k} \int_{z_1(h,k)}^{z_2(h,k)} F \left(\exp \left(\frac{2i\pi h}{k} - \frac{2\pi z}{k^2} \right) \right) \frac{i}{k^2} e^{-2\pi i n h/k} e^{2n\pi z/k^2} dz \\
 &= \sum_{h,k} i k^{-2} e^{-2\pi i n h/k} \int_{z_1(h,k)}^{z_2(h,k)} F \left(\exp \left(\frac{2i\pi h}{k} - \frac{2\pi z}{k^2} \right) \right) e^{2n\pi z/k^2} dz.
 \end{aligned}$$

On utilise ici l'équation fonctionnelle du théorème 4.1.2 pour F qui montre que :

$$F(x) = \omega(h, k) \left(\frac{z}{k} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{\pi}{12z} - \frac{\pi z}{12k^2} \right) F(x')$$

pour :

$$x = \exp \left(\frac{2i\pi h}{k} - \frac{2\pi z}{k^2} \right), \quad x' = \exp \left(\frac{2i\pi H}{k} - \frac{2\pi}{z} \right)$$

et :

$$\omega(h, k) = e^{\pi i s(h,k)}, \quad (h, k) = 1, \quad hH \equiv -1[k]$$

On note $\Psi_k(z) = z^{1/2} \exp(\pi/(12z) - \pi z/(12k^2))$ et on divise l'intégrale en deux parties en écrivant :

$$F(x') = 1 + [F(x') - 1].$$

Et donc on a :

$$p(n) = \sum_{h,k} i k^{-5/2} \omega(h, k) e^{-2\pi i n h/k} (I_1(h, k) + I_2(h, k)),$$

où :

$$I_1(h, k) = \int_{z_1(h,k)}^{z_2(h,k)} \Psi_k(z) e^{2n\pi z/k^2} dz$$

et :

$$I_2(h, k) = \int_{z_1(h,k)}^{z_2(h,k)} \Psi_k(z) \left[F \left(\exp \left(\frac{2i\pi H}{k} - \frac{2\pi}{z} \right) \right) - 1 \right] e^{2n\pi z/k^2} dz.$$

Pourquoi a-t-on scindé ainsi l'intégrale ? Dans notre problème on étudie F au voisinage des racines de l'unité et, pour ce faire, on regarde $F(x)$ pour $|z|$ petit. Mais grâce à l'équation fonctionnelle, cela nous amène à regarder $F(x')$ avec x' qui se rapproche de zéro quand $|z|$ se rapproche de zéro. Et $F(0) = 1$ donc on s'attend à avoir I_2 négligeable devant I_1 quand N augmente.

Pour évaluer $I_2(h, k)$, on modifie le contour d'intégration pour intégrer non plus selon l'arc mais selon la corde entre z_1 et z_2 comme le montre le dessin suivant :

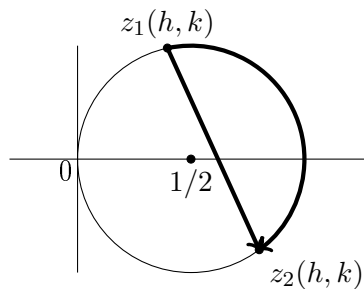


Figure 1.7

On rappelle que, par le lemme 4.1.12, si z est sur la corde joignant z_1 à z_2 on a $|z| < \frac{\sqrt{2}k}{N}$ et que la longueur de la corde n'excède pas $2\sqrt{2}k/N$.

De plus, on peut voir directement que la transformation $w = 1/z$ transforme le disque K en le demi-plan $Re(z) \geq 1$.

Dès lors, on a aussi les majorations : $0 < Re(z) \leq 1$ et $Re(1/z) \geq 1$. Et ce sont ces majorations qui vont permettre d'avoir un comportement intéressant en zéro.

On peut désormais estimer l'intégrande de I_2 sur la corde :

$$\begin{aligned}
& \left| \Psi_k(z) \left[F \left(\exp \left(\frac{2i\pi h}{k} - \frac{2\pi z}{k^2} \right) \right) - 1 \right] e^{2n\pi z/k^2} \right| \\
&= |z|^{1/2} \exp \left\{ \frac{\pi}{12} Re \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{\pi}{12k^2} Re(z) \right\} \times e^{2\pi n Re(z)/k^2} \left| \sum_{m=1}^{\infty} p(m) e^{2i\pi H m/k} e^{-2\pi m/z} \right| \\
&\leq |z|^{1/2} \exp \left\{ \frac{\pi}{12} Re \left(\frac{1}{z} \right) \right\} e^{2\pi n/k^2} \sum_{m=1}^{\infty} p(m) e^{-2\pi m Re(1/z)} \\
&< |z|^{1/2} e^{2\pi n} \sum_{m=1}^{\infty} p(m) e^{-2\pi(m-(1/24))Re(1/z)} \\
&\leq |z|^{1/2} e^{2\pi n} \sum_{m=1}^{\infty} p(m) e^{-2\pi(m-(1/24))} \\
&= |z|^{1/2} e^{2\pi n} \sum_{m=1}^{\infty} p(m) e^{-2\pi(24m-1)/24} \\
&< |z|^{1/2} e^{2\pi n} \sum_{m=1}^{\infty} p(24m-1) e^{-2\pi(24m-1)/24} \\
&= |z|^{1/2} e^{2\pi n} \sum_{m=1}^{\infty} p(24m-1) y^{24m-1} \text{ où } y = e^{-2\pi/24} \\
&= c |z|^{1/2},
\end{aligned}$$

où l'on a posé : $c = e^{2\pi n} \sum_{m=1}^{\infty} p(24m-1) y^{24m-1}$. La constante c ne dépend donc ni de z ni de N . Elle dépend de n , mais on l'a fixé dans cette discussion. Comme sur la corde, on a $|z| < \frac{\sqrt{2}k}{N}$, l'intégrande est borné par $c 2^{1/4} (k/n)^{1/2}$. Comme la longueur de la corde est $\leq |z_1| + |z_2|$, on trouve :

$$|I_2(h, k)| < C k^{3/2} N^{-3/2},$$

pour une certaine constante C , et donc :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{h,k} i k^{-5/2} \omega(h, k) e^{-2\pi i n h/k} I_2(h, k) \right| &< \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{0 \leq h < k \\ (h,k)=1}} C k^{-1} N^{-3/2} \\
&\leq C N^{-3/2} \sum_{k=1}^N 1 \\
&= C N^{-1/2}
\end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$p(n) = \sum_{h,k} ik^{-5/2} \omega(h,k) e^{-2\pi i n h/k} I_1(h,k) + O(N^{-1/2}).$$

On s'occupe maintenant de $I_1(h,k)$. On a vu en section 1.3.4 que l'on est amené, quand N tend vers l'infini, à intégrer sur tout le cercle de Ford. Il semble donc logique d'estimer $I_1(h,k)$, en intégrant le long du cercle K .

$$I_1(h,k) = \int_{K_-} - \int_0^{z_1(h,k)} - \int_{z_2(h,k)}^0 = \int_{K_-} -J_1 - J_2,$$

où on désigne par K_- l'intégrale le long du cercle selon le sens négatif. Pour estimer $|J_1|$, on remarque que la longueur de la corde joignant 0 à $z_1(h,k)$ est inférieure à

$$\pi |z_1(h,k)| < \pi \sqrt{2} \frac{k}{N}.$$

Comme $Re(1/z) = 1$ et $0 < Re(z) \leq 1$ sur le cercle K , on majore l'intégrande :

$$\begin{aligned} \left| \Psi_k(z) e^{2n\pi z/k^2} \right| &= e^{2n\pi Re(z)/k^2} |z|^{1/2} \exp \left\{ \frac{\pi}{12} Re\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{\pi}{12k^2} Re(z) \right\} \\ &\leq \frac{e^{2n\pi} 2^{1/4} k^{1/2} e^{\pi/12}}{N^{1/2}} \end{aligned}$$

et ainsi :

$$|J_1| < C_1 k^{3/2} N^{-3/2},$$

où C_1 est une constante. Comme précédemment on somme sur h et k et on obtient un terme en $O(N^{-1/2})$ dans l'expression de $p(n)$.

Une estimation similaire sur J_2 nous conduit également à un terme en $O(N^{-1/2})$ dans la formule de $p(n)$. Ainsi on obtient :

$$p(n) = \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{0 \leq h < k \\ (h,k)=1}} ik^{-5/2} \omega(h,k) e^{-2\pi i n h/k} \int_{K_-} \Psi_k(z) e^{2n\pi z/k^2} dz + O(N^{-1/2}).$$

On fait maintenant tendre N vers l'infini pour obtenir :

$$p(n) = i \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) k^{-5/2} \int_{K_-} z^{1/2} \exp \left\{ \frac{\pi}{12z} - \frac{2\pi z}{k^2} \left(n - \frac{1}{24} \right) \right\} dz,$$

où

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 \leq h < k \\ (h,k)=1}} e^{\pi i s(h,k) - 2\pi i n h/k}.$$

La preuve est ici terminée. Nous allons simplement l'écrire plus explicitement en terme de fonction de Bessel pour obtenir l'expression désirée.

On fait pour cela le changement de variable :

$$w = \frac{1}{z}$$

qui nous donne alors :

$$p(n) = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) k^{-5/2} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} w^{-5/2} \exp \left\{ \frac{\pi w}{12} - \frac{2\pi}{wk^2} \left(n - \frac{1}{24} \right) \right\} dw.$$

On pose maintenant $t = \pi w/12$ et la formule devient :

$$p(n) = 2\pi \left(\frac{\pi}{12} \right)^{3/2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) k^{-5/2} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} t^{-5/2} \exp \left\{ t - \frac{\pi^2}{6tk^2} \left(n - \frac{1}{24} \right) \right\} dt$$

où $c = \pi/12$. On définit la fonction de Bessel :

$$I_\nu(z) = \frac{(\frac{1}{2}z)^\nu}{2i\pi} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} t^{-\nu-1} e^{t+(z^2/4t)} dt \text{ où } c > 0, \operatorname{Re}(\nu) > 0.$$

On applique cette formule à :

$$z = 2 \left(\frac{\pi^2}{6k^2} \left(n - \frac{1}{24} \right) \right)$$

et $\nu = 3/2$, on obtient :

$$p(n) = \frac{(2\pi) \left(n - \frac{1}{24} \right)^{-3/4}}{24^{3/4}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) k^{-1} I_{3/2} \left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24} \right)} \right).$$

Enfin on a l'identité, démontrée dans [Wat95] :

$$I_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \frac{d}{dz} \left(\frac{\sinh z}{z} \right).$$

Ceci nous donne enfin la formule trouvée par Rademacher :

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh \left\{ \frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24} \right)} \right\}}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right).$$

□

Interprétation de la série

Comportement asymptotique : On va d'abord admettre que l'on a un vrai développement asymptotique c'est-à-dire que :

$$\frac{\sum_{k>k_0} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh \left\{ \frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24} \right)} \right\}}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right)}{A_{k_0}(n) \sqrt{k_0} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh \left\{ \frac{\pi}{k_0} \sqrt{\frac{2}{3} \left(n - \frac{1}{24} \right)} \right\}}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dès lors le premier terme de la série nous donne l'équivalent. Ce premier terme est :

$$A_1(n) \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh \left\{ \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \left(n - \frac{1}{24} \right) \right\}}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right) \sim \frac{e^{\pi \sqrt{\frac{2}{3}} n}}{4n\sqrt{3}}.$$

Ceci est bien l'équivalent trouvé par Hardy et Ramanujan en 1918 dans leurs travaux.

Importance des pôles : Quand $N \rightarrow \infty$ on peut voir que l'on intègre entièrement sur les cercles de Ford et ce, en se rapprochant de plus en plus des fractions des ensembles de Farey. Cette interprétation se fait en coordonnées τ . En coordonnées x , cela correspond à des contours qui se rapprochent de plus en plus des racines de l'unité. On a donc intégré sur un contour de plus en plus proche des singularités, comme prévu.

Ceci nous permet d'interpréter la provenance de chaque terme de la série. Si l'on revient à ce qu'était k initialement, on voit que le k -ième terme correspond à la contribution des singularités de F au niveau des racines k -ièmes primitives de l'unité.

Si l'on compare ce résultat avec celui qui précède, à savoir que la formule donne un véritable développement asymptotique, on se rend compte que c'est le comportement de F en 1 qui nous donne l'équivalent de $p(n)$. Puis que le comportement en -1 donne le second terme est ainsi de suite...

Formule exacte sur des entiers : La formule précédente présente la particularité d'être exacte. De plus, $p(n)$ est entier. Ainsi cette formule permet de calculer de façon rapide le nombre de partitions de grands nombres. Le lecteur intéressé se référera à [Rad73] aux pages 275 et suivantes, dans lesquelles on prouve que pour $N = [2\sqrt{n}/3]$ on peut arrondir au plus proche entier et obtenir le bon résultat.

Il existe également une technique encore plus rapide pour calculer ce nombre de partitions, en utilisant les congruences de $p(n)$. Par exemple, on connaît les congruences de certains $p(n)$ modulo 11^c pour c entier, et ainsi on peut tronquer le calcul bien plus tôt et prendre le multiple de 11^c le plus proche, ce qui améliore considérablement le nombre de termes nécessaires ! On pourra par exemple se référer à [Wat95] pour une explication plus détaillée de la méthode. Des exemples de congruence du nombre de partitions sont donnés sur le site internet [Weice].

4.2 Fonctions elliptiques

4.2.1 Généralités sur les fonctions périodiques

Fonction doublement périodique

Définition 4.2.1. On appelle fonction périodique de période $\omega \in \mathbb{C}^*$ toute fonction complexe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z + \omega) = f(z).$$

Cela implique en particulier :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, f(z + n\omega) = f(z).$$

Définition 4.2.2. Une fonction complexe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est dite fonction doublement périodique s'il existe deux périodes $\omega_1 \in \mathbb{C}^*$ et $\omega_2 \in \mathbb{C}^*$ de quotient non réel tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall n, m \in \mathbb{N}, f(z + n\omega_1 + m\omega_2) = f(z).$$

Remarque : On demande au quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ de ne pas être réel afin d'éviter des cas de dégénérescence. Par exemple, si le quotient est rationnel égal à a/b avec $(a, b) = 1$, on peut voir que $\omega = \omega_1/a = \omega_2/b$ est période de la fonction. S'il est irrationnel on peut montrer qu'il possède des périodes arbitrairement petites. Dès lors, on peut voir que pour une fonction holomorphe, cela entraîne que la fonction est constante. En fait montrons plus généralement qu'une fonction f avec des périodes arbitrairement petites est constante sur chaque ouvert connexe où elle est analytique. En effet en chaque point où f est analytique on a :

$$f'(z) = \lim_{z_n \rightarrow 0} \frac{f(z + z_n) - f(z)}{z_n},$$

où les z_n sont une suite de nombres complexes non nuls tendant vers 0. Si f a des périodes arbitrairement petites alors on peut prendre pour ces z_n une suite de périodes tendant vers 0. Ceci implique que $f'(z) = 0$ et ce en tout point d'analyticité de f . Donc f doit être constante sur chaque ouvert connexe où elle est analytique.

Définition 4.2.3. Soit f fonction doublement périodique de périodes ω_1 et ω_2 dont le quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ n'est pas réel. La paire (ω_1, ω_2) est dite paire fondamentale si toute période de f est de la forme $n\omega_1 + m\omega_2$ où m et n sont des entiers.

Définition 4.2.4. Si (ω_1, ω_2) est une paire fondamentale de f , on appellera parallélogramme fondamental le parallélogramme engendré par les vecteurs ω_1 et ω_2 et passant par 0 :

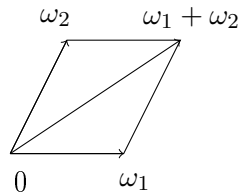


Figure 2.1

On obtient ainsi un pavage du plan en un réseau, noté $\Omega(\omega_1, \omega_2) = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$:

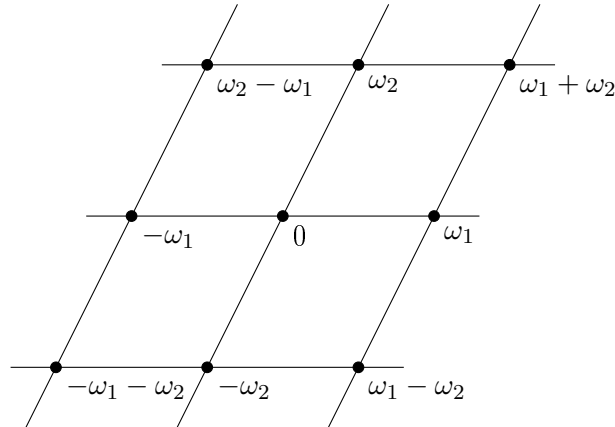


Figure 2.2

Définition 4.2.5. Deux paires (ω_1, ω_2) et (ω'_1, ω'_2) , chacune de quotient non réel, sont dites équivalentes si et seulement si elles engendrent le même réseau : $\Omega(\omega_1, \omega_2) = \Omega(\omega'_1, \omega'_2)$.

Théorème 4.2.6. Deux paires (ω_1, ω_2) et (ω'_1, ω'_2) sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice 2×2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients entiers et de déterminant $ab - cd = \pm 1$ telle que :

$$\begin{pmatrix} \omega'_2 \\ \omega'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} \omega'_2 &= a\omega_2 + b\omega_1 \\ \omega'_1 &= c\omega_2 + d\omega_1. \end{aligned}$$

Démonstration. On commence par le sens direct. La paire (ω_1, ω_2) est fondamentale pour le réseau qu'elle engendre. Donc il existe $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{aligned} \omega'_2 &= a\omega_2 + b\omega_1 \\ \omega'_1 &= c\omega_2 + d\omega_1. \end{aligned}$$

On inverse le système et on trouve que

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{-b\omega_1 + d\omega_2}{ad - cb} \\ \omega_1 &= \frac{a\omega_1 - c\omega_2}{ad - cb}. \end{aligned}$$

Comme la paire (ω'_1, ω'_2) est équivalente à (ω_1, ω_2) , elle est fondamentale sur le même réseau engendré. Les coefficients sont donc nécessairement entiers, et ainsi $ad - cb = \pm 1$

Réciproquement on suppose qu'on a la relation indiquée. Ainsi $\Omega(\omega'_1, \omega'_2)$ est contenu dans $\Omega(\omega_1, \omega_2)$ On inverse le système, on utilise la condition sur $ab - cd$ et on obtient l'autre inclusion, donc les deux réseaux engendrés sont les mêmes, et les deux paires sont alors équivalentes. \square

Théorème 4.2.7. *Si (ω_1, ω_2) est une paire fondamentale de périodes, alors dans le triangle de sommets $0, \omega_1, \omega_2$ il n'y a aucune autre période. Réciproquement, si une paire de périodes vérifie cette propriété alors elle est fondamentale.*

Démonstration. On considère le parallélogramme de vecteurs $0, \omega_1, \omega_2$ et $\omega_1 + \omega_2$.

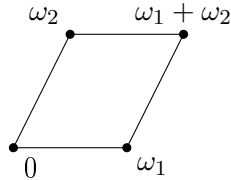


Figure 2.3

Un point à l'intérieur de ce parallélogramme a un affixe de la forme :

$$z = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2,$$

où $0 \leq \alpha \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq 1$. Parmi tous ces points les seules périodes sont, par définition d'une paire fondamentale, $0, \omega_1, \omega_2$ et $\omega_1 + \omega_2$. Donc le triangle de sommets $0, \omega_1, \omega_2$ ne contient aucune autre période.

Réciproquement, supposons que le triangle de sommets $0, \omega_1, \omega_2$ ne contient aucune autre période que les sommets et soit ω une période quelconque. Il nous faut montrer que $\omega = n\omega_1 + m\omega_2$ pour $m, n \in \mathbb{Z}$. Comme le quotient $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ n'est pas réel les nombres ω_1 et ω_2 sont linéairement indépendants. On peut donc écrire $\omega = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$ avec $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Si on note $[t]$ la partie entière de t on écrit :

$$t_1 = [t_1] + r_1, t_2 = [t_2] + r_2, \text{ où } 0 \leq r_1 < 1 \text{ et } 0 \leq r_2 < 1.$$

Dès lors :

$$\omega - [t_1]\omega_1 - [t_2]\omega_2 = r_1\omega_1 + r_2\omega_2.$$

Si r_1 ou r_2 était non nul, alors $r_1\omega_1 + r_2\omega_2$ serait une période contenue dans le parallélogramme de sommets $0, \omega_1, \omega_2$ et $\omega_1 + \omega_2$. Mais si une période w se trouve dans ce parallélogramme, alors l'un des deux complexes w et $\omega_1 + \omega_2 - w$ se trouve soit dans le triangle de sommets $0, \omega_1, \omega_2$ soit sur la diagonale joignant ω_1 à ω_2 (voir figure 2.4) ce qui contredit l'hypothèse. Donc $r_1 = r_2 = 0$ et ceci complète la preuve.

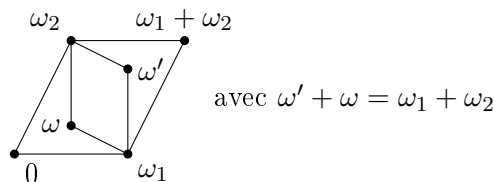


Figure 2.4

□

Fonctions elliptiques

Définition 4.2.8. Une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est dite elliptique si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- f est doublement périodique.
- f est méromorphe sur \mathbb{C} .

Proposition 4.2.9. Une fonction f elliptique non constante possède une paire fondamentale de périodes.

Démonstration. La fonction f étant elliptique elle possède au moins deux périodes de quotient non réel. Parmi toutes les périodes (non nulles), on peut en trouver au moins une dont la distance à l'origine est minimale. Dans le cas contraire, en effet, f aurait des périodes arbitrairement petites donc serait constante sur l'ensemble ouvert connexe des points où elle est analytique, donc constante sur \mathbb{C} . On note alors ω une de ces périodes de module minimal. Parmi les périodes de module $|\omega|$ on prend celle de plus petit argument (qui existe pour la même raison) et on la note ω_1 .

S'il y a d'autres périodes de module $|\omega|$ autre que ω_1 et $-\omega_1$, on prend de nouveau celle de plus petit argument immédiatement au dessus de ω_1 et on la note ω_2 .

Dans le cas contraire, on regarde le plus petit cercle suivant contenant des périodes qui ne sont pas multiples de ω_1 . Parmi les périodes ayant un tel module, on note ω_2 celle de plus petit argument.

Dans tous les cas, on a alors, par construction, qu'il n'y a pas d'autres périodes dans le triangle de sommets $0, \omega_1, \omega_2$, exception faite de ces mêmes vecteurs. Donc d'après le théorème 2.2, la paire (ω, ω_2) est fondamentale. \square

Proposition 4.2.10. Si f est une fonction elliptique sans pôles dans un parallélogramme fondamental alors f est constante.

Démonstration. Si f n'a pas de pôles alors, comme f est continue, f est bornée sur ce parallélogramme. Par périodicité, f est bornée sur \mathbb{C} et donc est constante par le théorème de Liouville. \square

Corollaire 4.2.11. Si une fonction elliptique ne s'annule pas sur un parallélogramme fondamental, alors elle est constante.

Démonstration. C'est le théorème précédent appliqué à $\frac{1}{f}$. \square

Corollaire 4.2.12. L'intégrale d'une fonction elliptique le long d'un parallélogramme fondamental vaut zéro.

Démonstration. L'intégrale le long de deux bords parallèles s'annule par périodicité. \square

Corollaire 4.2.13. La somme des résidus en les pôles contenus dans un parallélogramme d'une fonction elliptique est nulle.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème des résidus et le corollaire 4.2.12. \square

Remarque : en particulier, ceci implique qu'une fonction elliptique qui n'est pas constante a au moins deux pôles simples ou un pôle double.

Corollaire 4.2.14. *Le nombre de zéros d'une fonction elliptique non nulle dans un parallélogramme fondamental est égal au nombre de pôles, chacun compté avec multiplicité.*

Démonstration. L'intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

prise le long du bord C d'une cellule compte la différence entre le nombre de zéros et de pôles pour la fonction dans la cellule. Mais f'/f est elliptique donc cette intégrale vaut zéro d'après le corollaire 4.2.12. \square

Définition 4.2.15. *On appelle ordre d'une fonction elliptique non nulle son nombre de zéros dans un parallélogramme fondamental. Par le théorème précédent l'ordre donne aussi le nombre de pôles de la fonction.*

4.2.2 Fonction \wp de Weierstrass

Le but de cette partie est d'introduire la fonction du réseau Δ , appelée discriminant, qui vérifie certaines propriétés intéressantes pour la suite de l'exposé. Nous montrons ici d'où elle provient et pourquoi il est naturel de la considérer.

Construction

On fixe désormais le réseau $\Omega(\omega_1, \omega_2) = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$.

Nous allons maintenant essayer de construire une fonction elliptique non constante. D'après ce qui précède, il faut que celle-ci ait au moins un pôle double ou bien deux simples. Ceci conduit vers deux possibilités de construction, la première menée par Weierstrass et la seconde par Jacobi. Dans cet exposé nous suivrons les traces de Weierstrass. Nous pouvons supposer que le pôle d'ordre 2 se trouve en zéro et donc, par périodicité, à chaque période ω . Près de chacune de ces périodes, le développement de Laurent doit avoir la forme :

$$\frac{A}{(z - \omega)^2} + \frac{B}{(z - \omega)}.$$

On peut supposer que $B=0$ et $A=1$. Nous sommes donc amenés à considérer des sommes du type :

$$\sum_{\omega} \frac{1}{(z - \omega)^2}.$$

Proposition 4.2.16. *Si α est réel la série :*

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \neq 0}} \frac{1}{\omega^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Démonstration. On note r et R respectivement le minimum et le maximum de la distance à zéro dans le parallélogramme montré dans la figure 2.5 :

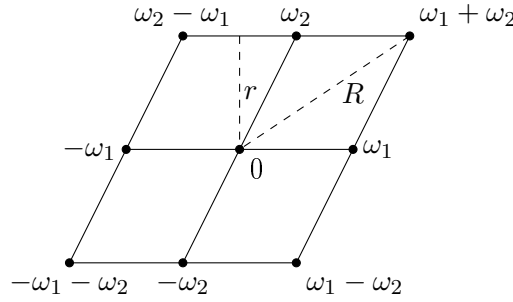


Figure 2.5

Si ω est l'une quelconque des huit périodes non nulles montrée sur ce dessin on a :

$$r \leq |\omega| \leq R \text{ pour huit périodes } \omega.$$

Dans la couche suivante de période entourant ces huit premières on a $2 \times 8 = 16$ nouvelles périodes satisfaisant les inégalités :

$$2r \leq |\omega| \leq 2R \text{ pour seize périodes } \omega.$$

Puis sur la couche suivante on a $3 \times 8 = 24$ périodes satisfaisant :

$$3r \leq |\omega| \leq 3R \text{ pour vingt-quatre périodes } \omega,$$

et ainsi de suite... Ainsi, nous avons les inégalités :

$$\frac{1}{R^\alpha} \leq \frac{1}{|\omega|^\alpha} \leq \frac{1}{r^\alpha} \text{ pour les huit premières périodes } \omega$$

$$\frac{1}{(2R)^\alpha} \leq \frac{1}{|\omega|^\alpha} \leq \frac{1}{(2r)^\alpha} \text{ pour les prochaines seize périodes } \omega$$

et ainsi de suite. Ainsi la somme $S(n) = \sum |\omega|^{-\alpha}$, prise sur les $8(1 + 2 + \dots + n)$ périodes non nulles les plus proches de l'origine, satisfait les inégalités :

$$\frac{8}{R^\alpha} + \frac{2 \cdot 8}{(2R)^\alpha} + \dots + \frac{n \cdot 8}{(n \cdot R)^\alpha} \leq S(n) \leq \frac{8}{r^\alpha} + \frac{2 \cdot 8}{(2r)^\alpha} + \dots + \frac{n \cdot 8}{(n \cdot r)^\alpha}$$

soit encore :

$$\frac{8}{R^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha-1}} \leq S(n) \leq \frac{8}{r^\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

Ceci montre que la somme partielle $S(n)$ est majorée par $8\zeta(\alpha - 1)/r^\alpha = \frac{8}{r^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}} < \infty$ si $\alpha > 2$. Ceci étant vrai pour toute les sommes partielles, on a que la série est bornée et donc converge pour $\alpha > 2$. Dans le cas contraire : $\alpha \leq 2$, l'inégalité de droite nous donne que la série diverge. Ceci termine la preuve. \square

Proposition 4.2.17. Si $\alpha > 2$ et $R > 0$ la série

$$\sum_{|z|>R} \frac{1}{(z - \omega)^\alpha}$$

converge absolument et uniformément sur le disque $|z| \leq R$.

Démonstration. Nous allons montrer qu'il existe une constante M (dépendant de R et de α) telle que, si $\alpha \geq 1$, on ait :

$$\frac{1}{|z - \omega|^\alpha} \leq \frac{M}{|\omega|^\alpha},$$

et ce, pour tout ω avec $|\omega| > R$ et tout $|z| \leq R$. Et alors nous utiliserons la proposition 4.2.16 pour prouver celle-ci.

L'inégalité précédente est équivalente à :

$$\frac{1}{M} \leq \frac{|z - \omega|^\alpha}{|\omega|^\alpha}.$$

Pour trouver un tel M on considère tout les $\omega \in \Omega$ avec $|\omega| > R$. On prend celui de module minimal, par exemple $|\omega| = R + d$ avec $d > 0$. Alors si $|z| \leq R$ et $|\omega| \geq R + d$ on a :

$$\left| \frac{z - \omega}{\omega} \right| = \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right| \geq 1 - \left| \frac{z}{\omega} \right| \geq 1 - \frac{R}{R + d}$$

et donc :

$$\left| \frac{z - \omega}{\omega} \right|^\alpha \geq \left(1 - \frac{R}{R + d} \right)^\alpha = \frac{1}{M},$$

où :

$$M = \left(1 - \frac{R}{R + d} \right)^{-\alpha}.$$

Et M ainsi choisit convient bien. Ceci conclut la preuve. \square

Dès lors on ne peut plus considérer la somme initiale :

$$\sum_{\omega} \frac{1}{(z - \omega)^2}.$$

On va remplacer l'exposant 2 par 3.

Proposition 4.2.18. *Soit f la fonction définie par :*

$$\sum_{\omega} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

Alors f est elliptique de périodes ω_1 et ω_2 avec un pôle d'ordre 3 à chaque période $\omega \in \Omega$.

Démonstration. La proposition 4.2.17 montre que la série obtenue en sommant les périodes de modules $\omega > R$ converge absolument sur le disque $|z| \leq R$. Ainsi f est analytique sur le disque. Les termes restants, qui sont en nombre fini, sont également analytiques sur le disque sauf pour un pôle d'ordre 3 à chaque période du disque. Ceci montre que f est bien méromorphe avec un pôle d'ordre 3 à chaque période $\omega \in \Omega$. Enfin on a bien $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$ en remarquant que ce n'est qu'une réorganisation de la somme et en utilisant la convergence absolue pour sommer dans un ordre quelconque. \square

On utilise le théorème précédent pour créer une fonction elliptique d'ordre 2. On se contente pour cela d'intégrer f terme à terme depuis l'origine (cela conserve le caractère elliptique). Ceci nous conduit, moyennant des multiplications par des constantes, à la fonction suivante.

Définition 4.2.19. La fonction \wp de Weierstrass est définie par la série :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left\{ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}.$$

Théorème 4.2.20. La fonction \wp ainsi définie est elliptique et a pour périodes ω_1 et ω_2 . Elle est analytique sauf pour un pôle double à chaque période. De plus c'est une fonction paire de z .

Démonstration. Chaque terme de la série a pour module :

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z - \omega)^2} \right|.$$

On considère désormais n'importe quel disque compact $|z| \leq R$. Il n'y a qu'un nombre fini de périodes dans ce disque. Si l'on exclut ces termes de la série, on obtient, d'après une étape de la preuve de la proposition 4.2.17,

$$\frac{1}{|z - \omega|^2} \leq \frac{M}{|\omega|^2},$$

où M est une constante ne dépendant que de R . Ceci nous donne la majoration :

$$\left| \frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z - \omega)^2} \right| \leq \frac{MR(2|\omega| + R)}{|\omega|^4} \leq \frac{MR(2 + R/|\omega|)}{|\omega|^3} \leq \frac{3MR}{|\omega|^3}$$

étant donné que $R < |\omega|$ pour ω extérieur au disque $|z| \leq R$. Ceci montre que la série tronquée converge uniformément sur le disque $|z| \leq R$. Elle est donc analytique sur le disque. Les termes restants donnent chacun un pôle de second ordre pour chaque période ω dans le disque. Ainsi, \wp est méromorphe avec un pôle d'ordre deux à chaque période.

On prouve maintenant que \wp est une fonction paire. On remarque que :

$$(-z - \omega)^2 = (z + \omega)^2 = z - (-\omega)^2.$$

Donc $\wp(-z)$ n'est qu'un réarrangement de la somme $\wp(z)$ donc \wp est paire.

Enfin on établit la périodicité de \wp . La dérivée de \wp est donnée par

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z - \omega)^3},$$

et nous avons déjà prouvé que cette fonction est périodique de périodes ω_1 et ω_2 . Ainsi $\wp'(z + \omega) = \wp'(z)$ pour toute période ω . La fonction $\wp(z + \omega) - \wp(z)$ est donc constante et par parité, en évaluant en $z = -\omega/2$ cette constante est nulle. D'où $\wp(z + \omega) = \wp(z)$ pour tout ω et donc \wp a la périodicité demandée. \square

Définition 4.2.21. Pour $n \geq 3$ on définit la série :

$$G_n = \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^n}.$$

On l'appelle terme d'ordre n de la série d'Eisenstein.

Théorème 4.2.22. On note $r = \min(|\omega|, \omega \neq 0)$. Alors pour $0 < |z| < r$ on a :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)G_{2n+2}z^{2n}.$$

Démonstration. Si $0 < |z| < r$ on a $|z/\omega| < 1$ donc on peut développer en série l'expression suivante :

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} = \frac{1}{\omega^2(1-\frac{z}{\omega})^2} = \frac{1}{\omega^2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{z}{\omega}\right)^n \right).$$

Donc :

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\omega^{n+2}} z^n.$$

La somme définissant \wp convergeant absolument, on obtient en sommant sur tous les ω :

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \sum_{\omega \neq 0} \frac{n+1}{\omega^{n+2}} z^n = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)G_{n+2}z^n.$$

Comme \wp est paire les coefficients G_n pour n impair sont nuls et donc on a la formule voulue pour le développement de \wp . \square

Théorème 4.2.23. La fonction \wp de Weierstrass vérifie l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6.$$

Démonstration. L'idée principale de cette preuve est de se ramener par combinaisons linéaires à des fonctions elliptiques sans pôle et donc constantes d'après la proposition 4.2.10. Plus précisément on va éliminer la singularité en zéro de \wp .

Près de $z = 0$ on a :

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots$$

Donc \wp' est une fonction elliptique d'ordre 3. Son carré est d'ordre 6 comme le montre ce qui suit :

$$[\wp'(z)]^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \dots$$

Dans les deux expressions précédentes on note $+\dots$ une somme de termes en puissance de z qui s'annule quand $z = 0$.

On a par ailleurs :

$$4\wp^3(z) = \frac{4}{z^6} + \frac{36G_4}{z^2} + 60G_6 + \dots$$

Donc :

$$\wp'(z) - 4\wp^3(z) = -\frac{60G_4}{z^2} - 140G_6 + \dots$$

Soit encore, avec le développement de \wp :

$$\wp'(z) - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(z) = -140G_6 + \dots$$

Le deuxième terme est une fonction elliptique sans pôle en 0 et sans pôle dans le parallélogramme fondamental, donc il doit être constant, égal à $-140G_6$. Ceci prouve l'équation. \square

Fonctions g_2 et g_3

Définition 4.2.24. On appelle $g_2 = 60G_4$ et $g_3 = 140G_6$ les invariants. On a donc :

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

Remarque : Il peut sembler surprenant que ces deux invariants déterminent complètement la fonction de Weierstrass. Mais en fait cela provient du fait, qui ne sera pas détaillé ici, que chacun des coefficients $(2n+1)G_{2n+2}z^{2n}$ du développement de Laurent de \wp peut s'exprimer en fonction de ces deux invariants. Le lecteur intéressé pourra faire lui-même la preuve en dérivant l'équation fonctionnelle de \wp et en identifiant terme à terme pour obtenir une relation de récurrence.

Définition 4.2.25. On note e_1, e_2, e_3 les valeurs de \wp aux demi-périodes, c'est-à-dire :

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right).$$

Le prochain théorème montre que ces nombres sont les racines du polyôme $4\wp^3 - g_2\wp - g_3$.

Théorème 4.2.26. On a :

$$4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3).$$

De plus les trois racines e_1, e_2, e_3 sont distinctes deux à deux.

Par conséquent, $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Démonstration. Étant donné que \wp est paire, sa dérivée \wp' est impaire.

On va d'abord montrer un premier résultat : les valeurs aux demi-périodes d'une fonction elliptique impaire sont soit des zéros soit des pôles. En effet, par périodicité on a $\wp'(-\frac{1}{2}\omega) = \wp'(\omega - \frac{1}{2}\omega) = \wp'(\frac{1}{2}\omega)$. Mais comme \wp' est impaire on a aussi : $\wp'(-\frac{1}{2}\omega) = -\wp'(\frac{1}{2}\omega)$. Donc $\wp'(-\frac{1}{2}\omega)$ est nul si fini. Dans le cas contraire c'est un pôle.

Dans le cas qui nous intéresse ici, on sait que la fonction \wp' n'a pas de pôles aux demi-périodes, ce sont donc des zéros de cette fonction. Mais \wp' est d'ordre 3 (cf, par exemple, la preuve de l'équation différentielle satisfaite par \wp , théorème 4.2.23) donc, d'après le corollaire 4.2.14 chacun de ces zéros doit être simple. Ce même théorème montre que \wp' ne peut avoir d'autres zéros dans un parallélogramme fondamental. Ainsi l'équation différentielle du théorème 4.2.23 montre la factorisation recherchée.

Il nous reste à montrer que e_1, e_2, e_3 sont distinctes deux à deux. La fonction elliptique $\wp(z) - e_1$ s'annule à $z = \frac{1}{2}\omega_1$. Et c'est un zéro double comme $\wp'(\frac{1}{2}\omega_1) = 0$. De même, $\wp(z) - e_1$ a un zéro double en $z = \frac{1}{2}\omega_2$. Si on avait $e_1 = e_2$ alors la fonction elliptique $\wp(z) - e_1$ aurait un zéro double en $z = \frac{1}{2}\omega_1$ et en $z = \frac{1}{2}\omega_2$. Elle serait donc d'ordre au moins 4. Or elle est d'ordre 3 ce qui est absurde. Donc $e_1 \neq e_2$ et de même on a que $e_2 \neq e_3$ et $e_1 \neq e_3$.

Enfin, on rappelle que si une équation polynômiale a des racines distinctes deux à deux, alors son discriminant ne s'annule pas. Or le discriminant de l'équation polynômiale d'ordre 3 :

$$4x^3 - g_2x - g_3$$

est précisément $g_2^3 - 27g_3^2$. Quand $x = \wp(z)$, les racines de ce polynôme sont distinctes. Ainsi $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, ce qui termine la preuve. \square

4.2.3 Fonction Δ

Généralités

Le nombre $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ est appelé le discriminant. Dans la suite, nous considérerons les invariants g_2 et g_3 ainsi que Δ comme des fonctions du réseau, c'est-à-dire des fonctions de ω_1 et ω_2 . Nous écrivons :

$$g_2 = g_2(\omega_1, \omega_2), \quad g_3 = g_3(\omega_1, \omega_2), \quad \Delta = \Delta(\omega_1, \omega_2).$$

Par définition de la série d'Eisenstein, on voit que les fonctions g_2 et g_3 sont homogènes de degré respectifs -4 et -6 , c'est-à-dire que nous avons :

$$g_2(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-4}g_2(\omega_1, \omega_2),$$

$$g_3(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-6}g_3(\omega_1, \omega_2),$$

et ce pour tout $\lambda \neq 0$. Dès lors, il s'ensuit que Δ est homogène de degré -12 :

$$\Delta(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-12}\Delta(\omega_1, \omega_2).$$

On prend $\lambda = 1/\omega_1$ et on note dans toute la suite $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. On a :

$$g_2(1, \tau) = (\omega_1)^4 g_2(\omega_1, \omega_2), \quad g_3(1, \tau) = (\omega_1)^6 g_3(\omega_1, \omega_2), \quad \Delta(1, \tau) = (\omega_1)^{12} \Delta(\omega_1, \omega_2).$$

On peut donc considérer ces trois fonctions comme des fonctions de la variable complexe τ . Quitte à changer ω_1 en $-\omega_1$ on peut s'arranger pour que le quotient τ ait une partie imaginaire positive. On va donc étudier ces fonctions dans le demi-plan supérieur H , appelé demi-plan de Poincaré (cf. définition 4.3.1). Pour $\tau \in H$ on appelle $g_2(\tau)$, $g_3(\tau)$ et $\Delta(\tau)$ les fonctions $g_2(1, \tau)$, $g_3(1, \tau)$ et $\Delta(1, \tau)$. On a alors :

$$g_2(\tau) = 60 \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{\infty} \frac{1}{(m + n\tau)^4},$$

$$g_3(\tau) = 140 \sum_{\substack{m, n = -\infty \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{\infty} \frac{1}{(m + n\tau)^6},$$

et :

$$\Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau).$$

De plus, le théorème 4.2.26 vu dans la partie précédente montre que Δ ne s'annule pas sur tout H .

Développements de Fourier

Cette partie est notoirement calculatoire et d'intérêt limité en première lecture. L'objectif de cette partie est d'obtenir le développement de Fourier de Δ .

Proposition 4.2.27. Si $\tau \in H$ et $n > 0$, on a les développements de Fourier :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4} = \frac{8\pi^4}{3} \sum_{r=1}^{\infty} r^3 e^{2i\pi r n \tau}$$

et :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^6} = -\frac{8\pi^6}{15} \sum_{r=1}^{\infty} r^5 e^{2i\pi r n \tau}.$$

Démonstration. On commence par rappeler la décomposition de la fonction cotangente :

$$\pi \cot \pi \tau = \frac{1}{\tau} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau+m} - \frac{1}{m} \right).$$

On pose $x = e^{2i\pi\tau}$. Si $\tau \in H$ alors $|x| < 1$, donc :

$$\begin{aligned} \pi \cot \pi \tau &= \pi \frac{\cos \pi \tau}{\sin \pi \tau} = \pi i \frac{e^{2i\pi\tau} + 1}{e^{2i\pi\tau} - 1} = \pi i \frac{x+1}{x-1} = -\pi i \left(\frac{x}{1-x} + \frac{1}{1-x} \right) \\ &= -\pi i \left(\sum_{r=1}^{\infty} x^r + \sum_{r=0}^{\infty} x^r \right) = -\pi i \left(1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} x^r \right). \end{aligned}$$

On égale les deux expressions et on trouve :

$$\frac{1}{\tau} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \left(\frac{1}{\tau+m} - \frac{1}{m} \right) = -\pi i \left(1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} x^r \right).$$

On dérive alors terme à terme plusieurs fois et on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\tau^2} - \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(\tau+m)^2} &= -(2\pi i)^2 \sum_{r=1}^{\infty} r e^{2i\pi r \tau}, \\ -3! \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+m)^4} &= -(2\pi i)^4 \sum_{r=1}^{\infty} r^3 e^{2i\pi r \tau}, \end{aligned}$$

et :

$$-5! \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\tau+m)^6} = -(2\pi i)^6 \sum_{r=1}^{\infty} r^5 e^{2i\pi r \tau}.$$

On remplace τ par $n\tau$ et on obtient la proposition. □

Proposition 4.2.28. Si $\tau \in H$ on a les développements de Fourier :

$$g_2(\tau) = \frac{4\pi^4}{3} \left(1 + 240 \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_3(k) e^{2\pi i k \tau} \right),$$

et :

$$g_3(\tau) = \frac{8\pi^6}{27} \left(1 - 504 \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_5(k) e^{2\pi i k \tau} \right),$$

avec $\sigma_\alpha(k) = \sum_{d|k} d^\alpha$.

Démonstration. On rappelle que pour $s > 1$ on définit la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ et que l'on a les deux valeurs suivantes : $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ et $\zeta(3) = \frac{\pi^6}{945}$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} g_2(\tau) &= 60 \sum_{\substack{m,n=-\infty \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4} \\ &= 60 \left\{ \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0(n=0)}}^{\infty} \frac{1}{m^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{(m+n\tau)^4} + \frac{1}{(m-n\tau)^4} \right) \right\} \\ &= 60 \left\{ 2\zeta(4) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m+n\tau)^4} \right\} \\ &= 60 \left\{ \frac{2\pi^4}{90} + \frac{16\pi^4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} r^3 x^{nr} \right\} \end{aligned}$$

avec $x = e^{2i\pi\tau}$. Dans la dernière double somme on assemble les termes pour lesquels nr est constant et l'on obtient le résultat souhaité pour $g_2(\tau)$. On prouve le résultat de la même façon pour $g_3(\tau)$. \square

Théorème 4.2.29. *Si $\tau \in H$ on a le développement de Fourier :*

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n \tau}$$

avec les coefficients $\tau(n)$ qui sont entiers et $\tau(1) = 1$.

Démonstration. On pose :

$$x = e^{2i\pi\tau}, A = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) x^n, B = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) x^n.$$

Alors :

$$\Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau) = \frac{64\pi^{12}}{27} [(1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2].$$

A et B sont à coefficients entiers, et :

$$\begin{aligned} (1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2 &= 1 + 720A + 3(240)^2 A^2 + (240)^3 A^3 - 1 \\ &\quad + 1008B - (504)^2 B^2 \\ &= 12^2(5A + 7B) + 12^3(100A - 147B^2 + 8000A^3). \end{aligned}$$

Mais :

$$5A + 7B = \sum_{n=1}^{\infty} (5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n)) x^n$$

et :

$$\begin{aligned} 5d^3 + 7d^5 &= d^3(5 + 7d^2) \equiv d^3(d^2 - 1) \equiv 0[3] \\ &\equiv d^3(1 - d^2) \equiv 0[4] \end{aligned}$$

donc :

$$5d^3 + 7d^5 \equiv 0[12].$$

Ainsi 12^3 est un facteur de chaque coefficient du développement de $(1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2$ et on a donc :

$$\Delta(\tau) = \frac{64\pi^{12}}{27} \left(12^3 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n \tau} \right) = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n \tau},$$

avec les $\tau(n)$ qui sont entiers. Le coefficient de x est $12^2(5 + 7)$ ainsi $\tau(1) = 1$. □

4.3 Fonctions modulaires

Nous allons ici nous intéresser à une classe de fonctions bien particulières : les fonctions modulaires. Il s'agit de fonctions ayant un comportement assez rigide vis-à-vis de certaines transformations du demi-plan supérieur. L'étude de ces fonctions nous permettra, dans le chapitre suivant, d'obtenir une équation fondamentale pour une fonction qui l'est non moins, la fonction η de Dedekind.

4.3.1 Demi-plan de Poincaré et Γ

Définitions

Les fonctions modulaires que nous étudierons dans la section suivante seront définies sur le demi-plan supérieur.

Définition 4.3.1. On note H et on appelle *demi-plan de Poincaré* le demi-plan $\{\tau : \text{Im}(\tau) > 0\}$.

Nous allons alors pouvoir définir le groupe modulaire, que l'on notera Γ . Pour cela, on définit plus généralement le cadre des *transformations de Möbius* :

Définition 4.3.2. On appelle *transformation de Möbius* toute application $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de la forme

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

avec $ad - bc \neq 0$.

Remarque : La condition $ad - bc \neq 0$ assure que l'application n'est pas constante. En fait, dans ce cas, elle réalise même une bijection de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dans lui-même.

On peut alors définir le groupe modulaire :

Définition 4.3.3. Le groupe modulaire Γ est le sous-groupe du groupe des transformations de Möbius défini par

$$\Gamma = \left\{ \tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}.$$

Remarque : Si l'on représente une transformation de Möbius par la matrice de taille 2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients complexes, alors le sous-groupe Γ est constitué des telles matrices, à coefficients entiers, de déterminant 1, à condition d'identifier une matrice et son opposée (car elles représentent la même transformation ; et réciproquement, deux matrices représentant la même transformation sont opposées). En d'autres termes, on a $\Gamma \simeq PSL_2(\mathbb{Z})$.

Dans la suite, pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on notera l'action de l'élément de Γ représenté par A sur le point τ du plan complexe par :

$$A\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Générateurs de Γ

Le résultat principal sur la structure du groupe modulaire Γ est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.3.4. *Le groupe modulaire Γ est engendré par les deux éléments*

$$T : \tau \mapsto \tau + 1$$

et

$$S : \tau \mapsto \frac{-1}{\tau}.$$

Remarque : Avec l'approche matricielle, ce théorème énonce que tout $A \in \Gamma$ s'écrit

$$A = T^{n_1} S T^{n_2} S \dots S T^{n_k},$$

où $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (on a $S^2 = 1$). En effet, ces matrices représentent bien les applications T et S définies ci-dessus. Cette écriture n'est pas unique : en effet, $T = S T^{-1} S T^{-1} S$.

Démonstration. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Quitte à considérer $-A$, on peut supposer $c \geq 0$. Pour montrer le théorème, nous allons raisonner par récurrence.

Si $c = 0$, alors, comme $ad - bc = 1$, on a $a = d = \pm 1$, donc $A = T^{\pm b}$: A est une puissance de T donc la propriété est vraie.

Si $c = 1$, on a alors $b = ad - 1$, donc un simple produit matriciel montre que $A = T^a S T^d$.

Supposons la propriété vraie pour tout entier strictement inférieur à c . Effectuons la division euclidienne de d par c : on a $d = cq + r$ avec $0 < r < c$. Alors un petit calcul montre que

$$A T^{-q} S = \begin{pmatrix} -aq + b & -a \\ r & -c \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse de récurrence, comme $r < c$, cette dernière matrice est produit de T et de S . Donc A l'est aussi, ce qui termine la preuve. \square

Domaines fondamentaux

Nous allons ici nous intéresser à certains sous-ensembles de H , appelés *domaines fondamentaux*.

Définition 4.3.5. *Soit G un sous-groupe du groupe modulaire Γ . On dit que $\tau, \tau' \in H$ sont équivalents sous G s'il existe $A \in G$ tel que $\tau' = A\tau$.*

Remarque : C'est bien sûr une relation d'équivalence puisque G est un groupe.

Définition 4.3.6. *Soit G un sous-groupe du groupe modulaire Γ . On dit que l'ouvert R_G de H est un domaine fondamental de G si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i) *Deux points distincts de R_G ne sont jamais équivalents sous G .*
- (ii) *Pour $\tau \in H$, il existe τ' dans l'adhérence de R_G tel que τ et τ' soient équivalents sous G .*

Nous admettrons le théorème suivant, prouvé dans [Apo90] :

Théorème 4.3.7. *L'ensemble $R_\Gamma = \{\tau \in H : |\tau| > 1, |Re(\tau)| < \frac{1}{2}\}$ est un domaine fondamental pour Γ .*

De plus, les générateurs de Γ , S et T , agissent sur cette région fondamentale comme le montre la figure suivante.

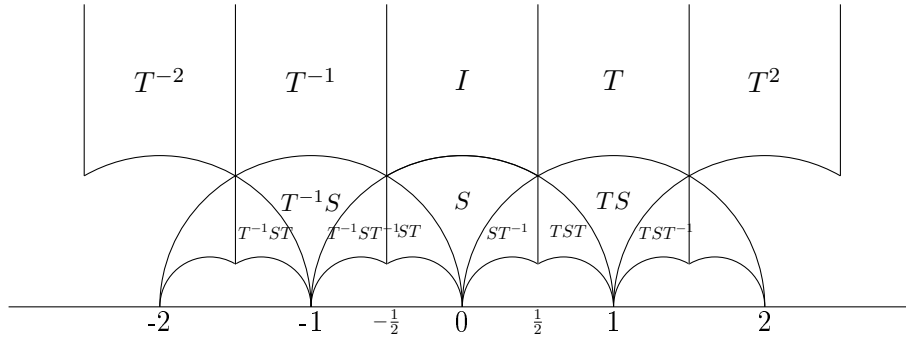


Figure 3.1

4.3.2 Fonctions modulaires

Définition 4.3.8. *On dit qu'une fonction $f : H \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est modulaire si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

- (i) *f est méromorphe sur H .*
- (ii) *$f(A\tau) = f(\tau)$ pour tout $A \in \Gamma$.*
- (iii) *Le développement en série de Fourier de f est de la forme*

$$f(\tau) = \sum_{n=-m}^{\infty} a(n)e^{2i\pi n\tau}.$$

Remarque : Explicitons ces trois conditions. La condition (i) exprime simplement que f est analytique sur H en dehors de ses pôles. La condition (ii) donne l'invariance de f sous l'action de Γ . Quant à la condition (iii), elle décrit le comportement de f en le point $i\infty$: en effet, le comportement de f en $i\infty$ est donné par sa série de Laurent en $x = e^{2i\pi\tau} = 0$. De ce fait, la condition (iii) exprime simplement qu'en $i\infty$, la fonction f a au plus un pôle (un pôle si $m \geq 0$, une singularité éliminable si $m < 0$).

Le principal résultat sur les fonctions modulaires est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.3.9. *Si f est modulaire et non identiquement nulle, alors dans l'adhérence de la région fondamentale R_Γ le nombre de zéros de f est égal au nombre de ses pôles.*

Remarque : Ce théorème nécessite pour être valable que l'on introduise des conventions adaptées (et naturelles) sur ce que l'on considère comme l'adhérence de la région fondamentale R_Γ et sur certaines singularités aux "extrémités" du domaine.

On considèrera que l'adhérence de R_Γ est l'union de quatre bords s'intersectant aux quatre points $\rho, i, \rho + 1$ et $i\infty$, où l'on note $\rho = e^{2\pi i/3}$. On a donc deux paires de bords équivalents, comme le montre la figure ci-après, à savoir ((1),(4)) et ((2),(3)).

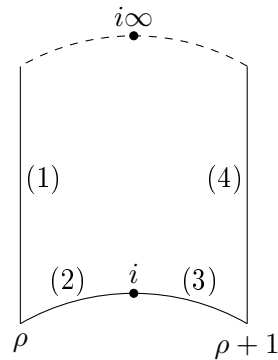


Figure 3.2

Si f a un zéro ou un pôle sur un bord, elle en a aussi un sur le bord qui lui est équivalent. On considèrera que seul le point du bord (1) ou (2) appartient à l'adhérence de R_Γ .

Enfin il nous faut détailler l'ordre du pôle aux trois points ρ , i et $i\infty$. En $i\infty$ l'ordre du pôle ou zéro sera celui obtenu en $x = 0$, où $x = e^{2i\pi\tau}$. Enfin en ρ il faudra compter un pôle ou un zéro avec multiplicité $1/3$, et avec multiplicité $1/2$ en i . En effet en comptant l'ordre en ces points, on le compte trop souvent comme le montre la figure 3.3.

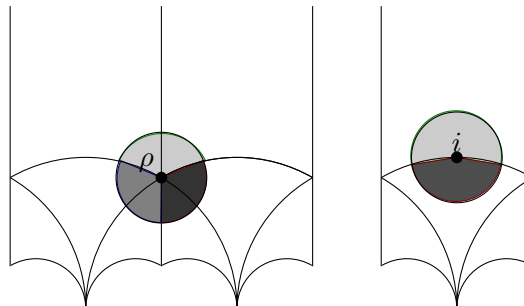


Figure 3.3

Ces dessins représentent les différentes régions fondamentales. Les parties blanches correspondent aux contributions au nombre total de pôles et zéros que l'on souhaiterait considérer dans notre théorème. Mais en fait on a aussi les parties des autres couleurs que l'on va compter. Il faut donc diviser par 3 pour ρ et par 2 pour i comme le montrent ces deux figures.

Démonstration. Supposons tout d'abord que f n'a aucun zéro ni pôle sur le bord de R_Γ . On coupe R_Γ par une droite horizontale, $Im(\tau) = M$, où $M > 0$ est pris assez grand pour que tous les pôles et zéros de f soient dans la région tronquée que nous appellerons R . (Un tel M existe bien en utilisant les propriétés des fonctions modulaires. En effet, si f avait un nombre infini de pôles dans R_Γ on aurait un point d'accumulation à $i\infty$ ce qui contredit la condition (iii) de la définition 4.3.8. Par ailleurs comme f n'est pas identiquement nulle elle n'a qu'un nombre fini de zéros.) On note ∂R le bord de cette région tronquée.

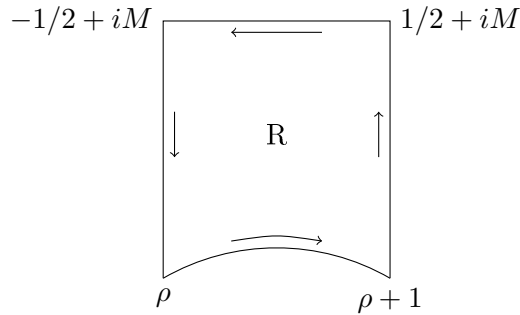


Figure 3.4

Dans toute la suite de la preuve, on notera N le nombre de zéros de f et P son nombre de pôles dans R (chacun compté avec multiplicité). Le théorème de l'argument nous donne que :

$$N - P = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \frac{1}{2i\pi} \left(\int_{(1)} + \int_{(2)} + \int_{(3)} + \int_{(4)} + \int_{(5)} \right),$$

où l'on a divisé l'intégrale en cinq parties indiquées sur la figure suivante :

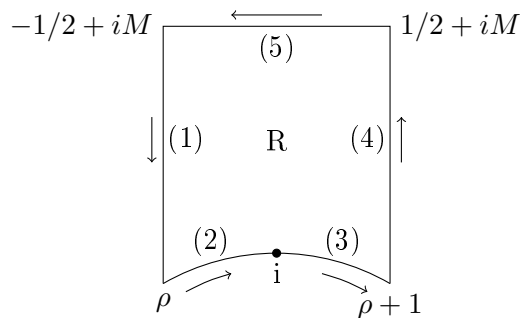


Figure 3.5

Les intégrales le long de (1) et de (4) se compensent par périodicité. Les intégrales (2) et (3) se compensent également mutuellement. En effet on passe de (2) à (3) en changeant de direction grâce à la transformation $u = S(\tau) = -1/\tau$, soit encore $\tau = S^{-1}u = S(u) = -1/u$. Et l'intégrande reste inchangé. L'invariance sous Γ donne $f[S(u)] = f(u)$ qui implique $f'[S(u)]S'(u) = f'(u)$ et ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau &= \frac{f'[S(u)]}{f[S(u)]} S'(u) du \text{ en appliquant le changement de variable} \\ &= \frac{f'(u)}{f(u)} du \text{ par invariance sous } \Gamma. \end{aligned}$$

Ainsi il ne nous reste que :

$$N - P = \frac{1}{2i\pi} \int_{(5)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau.$$

On transforme cette intégrale en posant $x = e^{2i\pi\tau}$. Comme τ varie sur le segment $u + iM$ avec $-1/2 \neq u \neq 1/2$ on a

$$x = e^{2i\pi(u+iM)} = e^{-2\pi M} e^{2i\pi u},$$

donc x varie le long d'un cercle K de rayon $e^{-2\pi M}$ tournant autour de zéro dans le sens indirect. Les points au dessus du segment sont transportés à l'intérieur de K , donc f n'a aucun zéro ou pôle dans K , sauf éventuellement en $x = 0$. Le développement de Fourier de la fonction modulaire f est :

$$f(\tau) = \frac{a_{-m}}{x^m} + \dots = F(x).$$

Soit :

$$f'(\tau) = F'(x) \frac{dx}{d\tau} \text{ (i.e.) } \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = \frac{F'(x)}{F(x)} dx.$$

On en déduit, à cause du sens d'intégration, que :

$$N - P = \frac{1}{2i\pi} \int_{(5)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = -\frac{1}{2i\pi} \oint_K \frac{F'(x)}{F(x)} dx = P_F - N_F,$$

où l'on a noté P_F et N_F respectivement le nombre de pôles et de zéros de F dans K . On a déjà vu que le seul point intéressant à considérer est $z = 0$.

Si F a un pôle d'ordre m en $z = 0$, alors $P_F - N_F = -m$ donc

$$N = P + m,$$

c'est-à-dire, si l'on se souvient de nos notations, que le nombre de zéros de f dans R est égal au nombre de pôles de f dans R augmenté de l'ordre du pôle en l'infini. Ceci nous donne bien que f prend la valeur zéro aussi souvent que la valeur ∞ .

Si F a un zéro d'ordre m en $z = 0$. Alors $P_F - N_F = m$ donc :

$$N + m = P.$$

Ceci nous donne encore effectivement que f prend la valeur zéro aussi souvent que la valeur ∞ .

On a donc démontré le théorème dans le cas où f n'a aucun zéro ni pôle sur le bord de R_Γ .

Supposons désormais que f a un zéro ou un pôle sur le bord de R_Γ mais pas en l'un des trois points ρ , $\rho + 1$ et i . Il suffit alors de changer le contour d'intégration pour inclure le pôle ou le zéro dans l'intérieur de R_Γ afin de le compter une seule fois. On utilise le contour de la figure suivante. Les intégrales sur les bords équivalents s'annulent comme précédemment et on ne compte les nouveaux pôles et zéros qu'une seule fois par notre choix de convention. On peut donc mener la preuve comme auparavant.

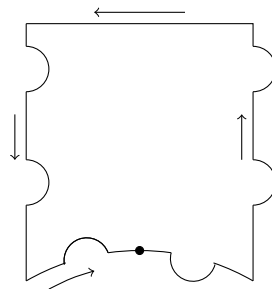


Figure 3.6

Enfin, si f a un zéro ou un pôle sur le bord de R_Γ , en l'un des points ρ ou i , on modifie encore le contour d'intégration comme ci-dessous :

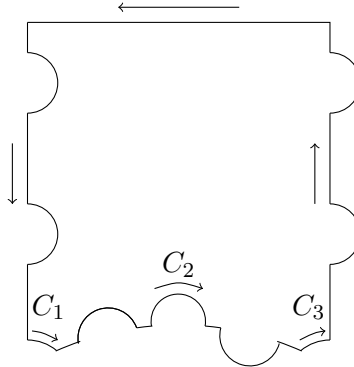


Figure 3.7

En raisonnant comme précédemment on trouve :

$$\begin{aligned} N - P &= \frac{1}{2i\pi} \left\{ \left(\int_{C_1} + \int_{C_3} \right) + \int_{C_2} + \int_{1/2+iM}^{-1/2+iM} \right\} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left\{ \left(\int_{C_1} + \int_{C_3} \right) + \int_{C_2} \right\} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau + m, \end{aligned}$$

où m est l'ordre du pôle de F en $x = 0$, i.e. de f en $\tau = i\infty$.

Près du point ρ on écrit :

$$f(\tau) = (\tau - \rho)^k g(\tau), \text{ où } g(\rho) \neq 0.$$

L'exposant k est positif si f a un zéro en ρ et négatif s'il s'agit d'un pôle. Sur C_1 on paramètre l'arc de cercle en posant $\tau - \rho = re^{i\theta}$ où r est fixé et $\alpha \leq \theta \leq \pi/2$ avec α qui dépend du r choisi. (Voir figure précédente pour comprendre qui est où.)

On a donc :

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)} = \frac{k}{\tau - \rho} + \frac{g'(\tau)}{g(\tau)}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\pi/2}^{\alpha} \left(\frac{k}{re^{i\theta}} + \frac{g'(\rho + re^{i\theta})}{g(\rho + re^{i\theta})} \right) re^{i\theta} i d\theta \\ &= \frac{-k\alpha'}{2\pi} + \frac{r}{2\pi} \int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{g'(\rho + re^{i\theta})}{g(\rho + re^{i\theta})} e^{i\theta} d\theta, \text{ où } \alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha. \end{aligned}$$

Quand $r \rightarrow 0$ le terme de gauche tend vers 0 car l'intégrande est borné au voisinage de zéro. Par ailleurs, quand $r \rightarrow 0$, on a $\alpha' \rightarrow \pi/3$ comme le montre le dessin suivant :

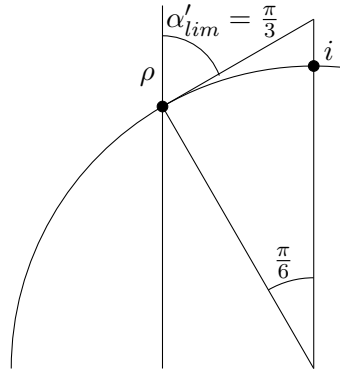


Figure 3.8

Et ainsi :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = -\frac{k}{6}.$$

Par un raisonnement similaire, pour ne pas dire identique, on obtient :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_3} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = -\frac{k}{6}.$$

On procède de même en i . On écrit :

$$f(\tau) = (\tau - i)^l h(\tau), \text{ où } h(i) \neq 0.$$

On trouve alors, par le même raisonnement :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_2} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = -\frac{l}{2}.$$

On obtient donc la formule suivante :

$$N - P = m - \frac{k}{3} - \frac{l}{2}.$$

On fait alors une disjonction de cas selon les natures des singularités en l'infini, i , et ρ comme menée précédemment et on voit que le résultat annoncé est le bon. On traite ici un exemple de la disjonction de cas :

Si f a un pôle en $x = 0$ et des zéros en i et ρ , alors m , k et l sont positifs et on a :

$$N + \frac{k}{3} + \frac{l}{2} = P + m.$$

Le membre de gauche compte le nombre total de zéros de f dans l'adhérence de R_Γ . On rappelle que les remarques faites avant la preuve expliquaient que l'ordre des pôles ou zéros en ρ devraient être divisés par trois et ceux en i par deux ce qui est bien en accord avec cette formule. Le membre de droite compte le nombre de pôles donc on a bien ce que l'on veut. \square

On peut en déduire deux corollaires immédiats :

Corollaire 4.3.10. *Si f est une fonction modulaire non constante, alors dans l'adhérence de R_Γ , f prend toutes les valeurs complexes possibles, et chacune autant de fois.*

Démonstration. Pour $c \in \mathbb{C}$, le théorème précédent appliqué à $f - c$ (qui reste bien sûr modulaire) montre que f prend autant de fois la valeur c qu'elle a de pôles dans l'adhérence de R_Γ . \square

Corollaire 4.3.11. *Si f est une fonction modulaire bornée, alors f est constante.*

Démonstration. Si f est bornée, elle ne prend pas toutes les valeurs de \mathbb{C} . Par le corollaire précédent, elle est donc constante. \square

4.4 Fonction η de Dedekind

Il est maintenant grand temps d'appliquer les résultats sur les formes modulaires et le groupe Γ des chapitres précédents. Cette théorie va nous permettre d'obtenir l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction F (théorème 4.4.11), et que nous avons admise dans la première partie. Pour cela, nous allons utiliser la fonction η de Dedekind, et son équation fonctionnelle (théorème 4.4.10), qui jouent un rôle fondamental dans de nombreuses applications des fonctions elliptiques modulaires à la théorie des nombres.

4.4.1 Présentation

Définition

On définit la fonction η de Dedekind sur le demi-plan $H = \{\tau : \text{Im}(\tau) > 0\}$ par :

$$\eta(\tau) = e^{i\pi\tau/12} \prod_{n \geq 1} (1 - e^{2i\pi n\tau}).$$

Pour $\tau \in H$, on a $|e^{2i\pi\tau}| < 1$, donc le produit est bien défini, converge absolument, et ne s'annule pas sur H .

Remarquons dès maintenant le lien entre cette fonction η et la fonction F . Par la proposition 4.1.1, on a la relation :

$$F(e^{2i\pi\tau}) = e^{i\pi\tau/12} / \eta(\tau).$$

Dès lors, notre but sera de déterminer une équation fonctionnelle vérifiée par η pour en déduire celle vérifiée par F .

Action sur Γ

L'équation fonctionnelle que nous cherchons pour η va nous permettre d'exprimer, pour $A \in \Gamma$, $\eta(A\tau)$ en fonction de $\eta(\tau)$. Rappelons que le groupe Γ a deux générateurs : la translation $T : \tau \mapsto \tau + 1$, ainsi que l'inversion $S : \tau \mapsto \frac{-1}{\tau}$. Nous allons donc commencer par déterminer comment varie η sous l'action de ces deux générateurs.

Proposition 4.4.1. *On a :*

$$\eta(T\tau) = \eta(\tau + 1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire que :

$$\begin{aligned} \eta(\tau + 1) &= e^{i\pi(\tau+1)/12} \prod_{n \geq 1} (1 - e^{2i\pi n(\tau+1)}) \\ &= e^{i\pi/12} e^{i\pi\tau/12} \prod_{n \geq 1} (1 - e^{2i\pi n\tau}) = e^{i\pi/12} \eta(\tau). \end{aligned}$$

□

Remarque : Cette relation montre qu'en particulier, η^{24} est périodique de période 1.

Proposition 4.4.2. *On a :*

$$\eta(S\tau) = \eta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau).$$

Démonstration. Nous allons tout d'abord montrer $\eta\left(\frac{-1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$ pour $\tau = iy$ où $y > 0$. Comme les fonctions considérées sont holomorphes si l'on montre que leur différence est nulle sur toute une droite on pourra conclure par le principe des zéros isolés.

Si $\tau = iy$ la formule voulue devient $\eta(i/y) = y^{1/2}\eta(iy)$ qui est équivalente à :

$$\ln \eta(i/y) - \ln \eta(iy) = \frac{1}{2} \ln y.$$

Par ailleurs on a aussi :

$$\begin{aligned} \ln \eta(iy) &= -\frac{\pi y}{12} + \ln \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-2\pi n y}) \\ &= -\frac{\pi y}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-2\pi n y}) \\ &= -\frac{\pi y}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi m n y}}{m} \\ &= -\frac{\pi y}{12} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{e^{-2\pi m y}}{1 - e^{-2\pi m y}} \text{ par Fubini car les termes sont positifs} \\ &= -\frac{\pi y}{12} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{1 - e^{-2\pi m y}}. \end{aligned}$$

Dès lors il nous faut prouver :

$$(1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{1 - e^{-2\pi m y}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{1 - e^{-2\pi m/y}} - \frac{\pi}{12} \left(y - \frac{1}{y} \right) = -\frac{1}{2} \ln y.$$

Nous allons montrer ce résultat par un calcul de résidu. L'idée est de trouver une fonction dont la somme des résidus donne le terme de gauche de l'équation précédente et dont l'intégrale sur un contour bien choisi donne le terme de droite. Si vous avez beaucoup de chance ou une intuition impressionnante vous trouverez peut-être ces deux éléments. Dans le cas contraire nous allons vous la donner. On fixe y et n et on pose :

$$F_n(z) = -\frac{1}{8z} \cot(\pi i N z) \cot\left(\frac{\pi N z}{y}\right),$$

où l'on note $N = n + 1/2$. La suite du calcul va montrer pourquoi on peut penser à cette fonction, mais il faut être à l'aise et habitué aux calculs de résidu. Le contour C que nous choisirons sera le parallélogramme joignant les affixes $y, i, -y, -i$ dans cet ordre.

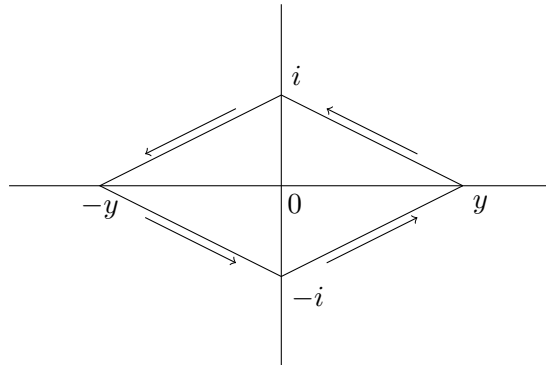


Figure 4.1

À l'intérieur de C , F_n a des pôles simples et $z = ik/N$ et $z = ky/N$ pour $k = \pm 1, \pm 2 \dots \pm n$ avec les propriétés habituelles de la fonction cotangente. Mais aussi un pôle triple en zéro (chacun des trois facteurs du produit s'annule)

(i) **Résidu en zéro**

On le calcule simplement en faisant un développement limité en $z = 0$. On rappelle le développement de cotangente (que le lecteur avisé retrouvera aisément) : $\frac{1}{x} - x/3$. On a donc :

$$F_n(z) = \frac{1}{8z} \left(\frac{1}{\pi i N z} - \frac{\pi i N z}{3} + o(z) \right) \left(\frac{y}{\pi N z} - \frac{\pi N z}{3y} + o(z) \right).$$

En développant on obtient sans difficulté le coefficient de $1/z$, c'est-à-dire le résidu en zéro qui vaut donc : $\frac{i}{24} \left(y - \frac{1}{y} \right)$.

(ii) **Résidu en $z=ik/N$**

Comme on a un pôle simple on calcule le résidu en faisant :

$$\lim_{z \rightarrow ik/N} F_n(z)(z - ik/N) = \frac{-N}{8ik} \cot \pi ik/y \lim_{z \rightarrow ik/N} (z - ik/N) \cot \pi i N z.$$

On pose $h = z - ik/N$. Le développement limité précédent de cotangente nous permet de voir que quand h tend vers zéro on a :

$$\lim_{z \rightarrow ik/N} (z - ik/N) \cot \pi i N z = h \cdot \frac{1}{h \pi i N} = \frac{1}{\pi i N}.$$

Donc finalement le résidu de F_n en $z = ik/N$ est :

$$\frac{1}{8\pi k} \cot \frac{\pi ik}{y}.$$

De plus, comme c'est une fonction paire en k on a :

$$\sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \text{Res}_{z=ky/N} F_n(z) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{8\pi k} \cot \frac{\pi ik}{y}.$$

Or :

$$\cot i\theta = \frac{\cos i\theta}{\sin i\theta} = i \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{e^{-\theta} - e^{\theta}} = -i \frac{e^{2\theta} + 1}{e^{2\theta} - 1} = \frac{1}{i} \left(1 - \frac{2}{1 - e^{2\theta}} \right).$$

En appliquant ce résultat pour $\theta = \pi k/y$ on obtient

$$\sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \text{Res}_{z=ik/N} F_n(z) = \frac{1}{4\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{1 - e^{2\pi k/y}}.$$

(iii) **Résidu en $z=ky/N$**

On montre exactement de la même façon que :

$$\sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \text{Res}_{z=ky/N} F_n(z) = \frac{i}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{1 - e^{2\pi ky}}.$$

Ainsi, la somme de tous les résidus de F_n à l'intérieur de C est :

$$\frac{1}{2i\pi} \left(- \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{1 - e^{2\pi ky}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{1 - e^{2\pi k/y}} - \frac{\pi}{12} \left(y - \frac{1}{y} \right) \right),$$

expression dont la limite quand $n \rightarrow \infty$ fait apparaître le terme de gauche de (1). Ainsi, pour finir la preuve il suffit de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C F_n(z) dz = -\frac{1}{2} \ln y.$$

On va maintenant montrer que zF_n tend vers une constante sur le bord du losange sauf en ses sommets. Il suffit pour cela de montrer que :

$$-\cot \pi i N z \cot \frac{\pi N z}{y} \rightarrow 1 \text{ ou } -1.$$

On calcule pour se faire, pour $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cot(a + ib) &= \frac{e^{2i(a+ib)} + 1}{e^{2i(a+ib)} - 1} \\ &= \frac{e^{2ia} e^{-2b} + 1}{e^{2ia} e^{-2b} - 1}. \end{aligned}$$

En écrivant encore que sur le bord entre 1 et y on a $z = ty + (1-t)i$, et en substituant dans l'équation précédente les expressions dans les cotangentes, on montre directement que $zF_n(z)$ a pour limite $1/8$ sur le bord entre 1 et y , et sur celui entre -1 et $-y$; contre $-1/8$ pour les autres bords. Enfin, on montre de la même façon que $F_n(z)$ est bornée sur C par une constante indépendante de n .

Ainsi par convergence dominée on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C F_n(z) dz &= \int_C \lim_{n \rightarrow \infty} zF_n(z) \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{8} \left[- \int_{-i}^y + \int_y^i - \int_i^{-y} + \int_{-y}^{-i} \right] \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{4} \left[- \int_{-i}^y + \int_y^i \right] \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{4} \left[-(\ln y + \frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i}{2} - \ln y) \right] = -\frac{1}{2} \ln y. \end{aligned}$$

La fonction posée vérifie bien tout ce que l'on voulait. Ceci prouve (1) et conclut la preuve. \square

4.4.2 Équation fonctionnelle de η

Forme modulaire de poids 1/2

Dans cette section, nous allons établir la forme de l'équation fonctionnelle de la fonction η de Dedekind. Pour cela, la stratégie est simple : nous allons nous appuyer sur une équation modulaire vérifiée par Δ (proposition 4.4.3), combinée à une relation simple entre Δ et η .

Proposition 4.4.3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. On a, pour tout τ ,

$$\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12} \Delta(\tau).$$

Remarque : On dit alors que Δ est une *forme modulaire* de poids 12.

Démonstration. La démonstration est basée sur le fait que Δ est homogène de degré -12 , i.e. si $\tau = \omega_2/\omega_1$, on a

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = \omega_1^{-12} \Delta(\tau).$$

De plus, Δ étant une fonction du réseau, si (ω_1, ω_2) et (ω'_1, ω'_2) sont deux paires de périodes équivalentes, alors $\Delta(\omega_1, \omega_2) = \Delta(\omega'_1, \omega'_2)$.

Il suffit alors de prendre $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \tau$, $\omega'_1 = c\tau + d$ et $\omega'_2 = a\tau + b$ pour avoir directement

$$\Delta(\tau) = \Delta(\omega_1, \omega_2) = \Delta(\omega'_1, \omega'_2) = \Delta(c\tau + d, a\tau + b) = (c\tau + d)^{-12} \Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right).$$

□

Les fonctions η et Δ sont de plus reliées par l'égalité suivante :

Théorème 4.4.4. Pour $\tau \in H$, on a

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \eta^{24}(\tau).$$

Remarque : Ce théorème permet d'apprécier l'importance de la fonction η , reliée de manière simple à la fonction fondamentale Δ .

Démonstration. C'est à ce stade que nous allons utiliser toute la théorie des fonctions modulaires développée précédemment. L'idée de la preuve est en effet essentiellement fondée sur le fait qu'une fonction modulaire ne s'annulant pas est constante (théorème 4.3.2). Soit donc $f(\tau) = \Delta(\tau)/\eta^{24}(\tau)$. Rappelons que l'on a les quatre égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta(\tau + 1) &= \Delta(\tau), \\ \Delta\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \tau^{12} \Delta(\tau), \\ \eta(\tau + 1) &= e^{i\pi/12} \eta(\tau), \\ \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau). \end{aligned}$$

Cela donne immédiatement :

$$f(\tau + 1) = f(\tau)$$

et :

$$f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = f(\tau),$$

c'est-à-dire que f est invariante sous l'action du groupe modulaire Γ . On est donc bien parti pour que f soit une fonction modulaire comme nous le souhaiterions. De plus, f est analytique et ne s'annule pas sur H : en effet, Δ et η ne s'annulent pas sur H , et Δ y est analytique. Il faut étudier son comportement à l'infini :

On a tout d'abord, pour $x = e^{2i\pi\tau}$:

$$\eta^{24}(\tau) = x \prod (1 - x^n)^{24} = x(1 + I_1(x)),$$

où $I_1(x)$ est une série en x s'annulant en $x = 0$. De plus, on a, par le théorème 4.2.29, le développement de Δ suivant :

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}x(1 + I_2(x)).$$

Il reste donc finalement, en faisant le quotient :

$$f(\tau) = (2\pi)^{12}(1 + I(x)),$$

c'est-à-dire que f est analytique et non nulle en $i\infty$. De plus on a $I(0) = 0$.

La fonction f est donc bien une fonction modulaire. Comme elle ne s'annule pas, il s'ensuit qu'elle est constante ; et le développement précédent montre que cette constante vaut $(2\pi)^{12}$. Cela montre l'égalité que l'on avait annoncée :

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}\eta^{24}(\tau).$$

□

Cette relation permet de déduire la forme de l'équation fonctionnelle de η . En effet, nous avons l'équation de Δ :

$$\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12}\Delta(\tau),$$

soit encore :

$$(2\pi)^{12}\eta^{24}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12}(2\pi)^{12}\eta^{24}(\tau).$$

Prendre les racines vingt-quatrième permet d'obtenir la forme générale de l'équation fonctionnelle de η de Dedekind :

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \epsilon(a, b, c, d)(c\tau + d)^{1/2}\eta(\tau),$$

où $\epsilon(a, b, c, d)$ est une racine vingt-quatrième de l'unité, non explicite pour le moment.

Sommes de Dedekind

Nous avons ainsi obtenu la forme de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction η . Cependant, pour qu'elle soit utilisable, il nous faut en savoir plus sur cette racine de l'unité ϵ . Pour cela, nous allons devoir introduire un nouvel outil : les sommes de Dedekind. Ce paragraphe est un intermède présentant les premières propriétés arithmétiques de ces sommes.

Définition 4.4.5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $h \in \mathbb{Z}$, premiers entre eux. On définit la somme de Dedekind $s(h, k)$ par :

$$s(h, k) = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k} \left(\frac{hr}{k} - \left[\frac{hr}{k} \right] - \frac{1}{2} \right).$$

Remarque : On peut exprimer cette somme grâce à la fonction $x \mapsto ((x))$ définie par

$$((x)) = \begin{cases} x - [x] - \frac{1}{2} & \text{si } x \text{ n'est pas entier.} \\ 0 & \text{si } x \text{ est entier.} \end{cases}$$

Cette fonction est clairement périodique de période 1, et impaire. De ce fait, si $(h, k) = 1$, alors hr décrit tous les restes modulo k quand r les décrit ; donc on a

$$\sum_{r \bmod k} \left(\left(\frac{hr}{k} \right) \right) = 0.$$

En particulier, en prenant les entiers de 1 à k comme représentants des classes modulo k , on a :

$$\sum_{r \bmod k} \left(\left(\frac{r}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{hr}{r} \right) \right) = \sum_{r=1}^{k-1} \left(\frac{r}{k} - \frac{1}{2} \right) \left(\left(\frac{hr}{k} \right) \right) = \sum_{r=1}^{k-1} \left(\frac{r}{k} \right) \left(\left(\frac{hr}{k} \right) \right) = s(h, k),$$

c'est-à-dire que :

$$s(h, k) = \sum_{r \bmod k} \left(\left(\frac{r}{k} \right) \right) \left(\left(\frac{hr}{r} \right) \right).$$

Cette écriture permet une approche plus naturelle des propriétés arithmétiques des sommes de Dedekind dans la mesure où elle fait intervenir la fonction $((\cdot))$, périodique et impaire.

Parmi les propriétés qui nous seront utiles par la suite, remarquons tout d'abord que :

$$s(-h, k) = -s(h, k),$$

qui découle directement de l'imparité de $((\cdot))$, et pour tout entier m

$$s(km + h, k) = s(h, k),$$

qui découle directement de la périodicité.

Pour terminer ce premier contact avec les sommes de Dedekind, il nous reste à présenter la loi de réciprocité de Dedekind, qui permet d'exprimer $s(h, k)$ en fonction de $s(k, h)$. On a ainsi l'égalité suivante :

Proposition 4.4.6. (Loi de réciprocité de Dedekind)

Pour $h > 0$, $k > 0$, et $(h, k) = 1$, on a

$$12hk(s(h, k) + s(k, h)) = h^2 + k^2 - 3hk + 1.$$

Démonstration. La démonstration est longue et calculatoire. Nous allons commencer par un petit calcul anodin. Calculons $\sum_{r=1}^k ((hr/k))^2$ de deux manières différentes. Tout d'abord, on a :

$$\sum_{r=1}^k \left(\left(\frac{hr}{k} \right) \right)^2 = \sum_{r \bmod k} \left(\left(\frac{hr}{k} \right) \right)^2 = \sum_{r \bmod k} \left(\left(\frac{r}{k} \right) \right)^2 = \sum_{r=1}^{k-1} \left(\frac{r}{k} - \frac{1}{2} \right)^2.$$

(On a pris les entiers de 1 à k comme représentants des classes modulo k , et fait disparaître le h car hr décrit toutes les classes modulo k avec r).

D'autre part, on peut évaluer la même somme en développant le terme général et en rassemblant les termes se ressemblant, puis en faisant apparaître la somme de Dedekind $s(h, k)$:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^k \left(\left(\frac{hr}{k} \right) \right)^2 &= \sum_{r=1}^{k-1} \left(\frac{hr}{k} - \left[\frac{hr}{k} \right] - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \sum_{r=1}^{k-1} \left(\frac{h^2 r^2}{k^2} + \left[\frac{hr}{k} \right]^2 + \frac{1}{4} + \left[\frac{hr}{k} \right] - \frac{hr}{k} - 2 \frac{hr}{k} \left[\frac{hr}{k} \right] \right) \\ &= 2h \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{k} \left(\frac{hr}{k} - \left[\frac{hr}{k} \right] - \frac{1}{2} \right) + \sum_{r=1}^{k-1} \left[\frac{hr}{k} \right] \left(\left[\frac{hr}{k} \right] + 1 \right) \\ &\quad - \frac{h^2}{k^2} \sum_{r=1}^{k-1} r^2 + \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{k-1} 1. \end{aligned}$$

Égaler les deux expressions obtenues pour la même somme donne alors :

$$2hs(h, k) + \sum_{r=1}^{k-1} \left[\frac{hr}{k} \right] \left(\left[\frac{hr}{k} \right] + 1 \right) = \frac{h^2 + 1}{k^2} \sum_{r=1}^{k-1} r^2 - \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k-1} r.$$

Ce que nous venons de faire ne semble pas faciliter les choses à première vue, mais c'est en fait une telle expression qui va nous permettre de faire apparaître le $s(k, h)$ cherché. Pour ce faire, il faudrait "renverser" les fractions, c'est-à-dire faire passer les h au dénominateur et les k au numérateur. L'avantage de l'expression que nous venons d'obtenir est que, outre dans la somme $s(h, k)$, la fraction hr/k n'est présente que sous forme de partie entière. Au lieu de sommer sur r , nous allons donc sommer sur les différentes valeurs possibles de cette partie entière. C'est ce mécanisme qui va permettre d'obtenir une somme dont le terme général sera en k/h et non en h/k .

On fait donc le changement d'indice :

$$\nu = \left[\frac{hr}{h} \right] + 1.$$

Comme $1 \leq r \leq k-1$, ν prend les valeurs de 1 jusqu'à h . Pour exprimer la somme, il reste donc à compter pour combien de valeurs de r l'indice ν prend une valeur donnée. Soit $N(\nu)$ ce nombre. On a $\nu = \left[\frac{hr}{h} \right] + 1$ si, et seulement si $\nu - 1 < \frac{hr}{k} < \nu$, c'est-à-dire $\frac{k(\nu-1)}{h} < r < \frac{k\nu}{h}$

(il n'y a pas de cas d'égalité car $r < k$ et $(h, k) = 1$).

Pour $1 \leq \nu \leq h - 1$, il s'ensuit que r peut varier de $\left[\frac{k(\nu-1)}{h}\right] + 1$ à $\left[\frac{k\nu}{h}\right]$, et donc on a

$$N(\nu) = \left[\frac{k\nu}{h}\right] - \left[\frac{k(\nu-1)}{h}\right].$$

Lorsque $\nu = h$, c'est légèrement différent puisque la borne supérieure de l'inégalité est un entier (c'est k), donc égal à sa partie entière ; mais la valeur $r = k$ est exclue, donc r a une possibilité de moins que dans les autres cas :

$$N(h) = k - 1 - \left[\frac{k(h-1)}{h}\right].$$

On peut donc maintenant calculer la somme avec ce nouveau changement d'indice. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{k-1} \left[\frac{hr}{k}\right] \left(\left[\frac{hr}{k}\right] + 1\right) &= \sum_{\nu=1}^h (\nu-1)\nu N(\nu) \\ &= \sum_{\nu=1}^h (\nu-1)\nu \left(\left[\frac{k\nu}{h}\right] - \left[\frac{k(\nu-1)}{h}\right]\right) - h(h-1) \\ &= \sum_{\nu=1}^{h-1} \left[\frac{k\nu}{h}\right] ((\nu-1)\nu - \nu(\nu+1)) + kh(h-1) - h(h-1) \\ &= -2 \sum_{\nu=1}^{h-1} \nu \left[\frac{k\nu}{h}\right] + h(h-1)(k-1). \end{aligned}$$

Il reste à écrire que, par définition de $s(k, h)$, on a :

$$-2 \sum_{\nu=1}^{h-1} \nu \left[\frac{k\nu}{h}\right] = 2hs(k, h) - 2\frac{k}{h} \sum_{\nu=1}^{h-1} \nu^2 + \sum_{\nu=1}^{h-1} \nu,$$

ce qui, injecté dans l'égalité précédente, donne :

$$\sum_{r=1}^{k-1} \left[\frac{hr}{k}\right] \left(\left[\frac{hr}{k}\right] + 1\right) = 2hs(k, h) - 2\frac{k}{h} \sum_{\nu=1}^{h-1} \nu^2 + \sum_{\nu=1}^{h-1} \nu + h(h-1)(k-1).$$

On reporte enfin ceci dans la première égalité reliant cette somme à $s(h, k)$:

$$2hs(h, k) + 2hs(k, h) - 2\frac{k}{h} \sum_{\nu=1}^{h-1} \nu^2 + \sum_{\nu=1}^{h-1} \nu + h(h-1)(k-1) = \frac{h^2+1}{k^2} \sum_{r=1}^{k-1} r^2 - \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k-1} r,$$

c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} 2hs(h, k) + 2hs(k, h) &= 2\frac{k}{h} \frac{h(h-1)(2h-1)}{6} - \frac{h(h-1)}{2} \\ &\quad + \frac{h^2+1}{k^2} \frac{k(k-1)(2k-1)}{6} - \frac{1}{k} \frac{k(k-1)}{2} - h(h-1)(k-1). \end{aligned}$$

Il suffit alors de multiplier par $6k$ et d'effectuer les simplifications nécessaires pour obtenir la loi de réciprocité de Dedekind :

$$12hk(s(h, k) + s(k, h)) = h^2 + k^2 - 3hk + 1.$$

□

Racine 24-ième de l'unité

Avec cette brève présentation des sommes de Dedekind, nous avons à présent tous les outils nécessaires pour déterminer de façon précise l'équation fonctionnelle vérifiée par η . Il nous manquait simplement la valeur de ϵ , cette racine 24-ième de l'unité intervenant dans l'équation.

Définition 4.4.7. On définit, pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ avec $c > 0$, le nombre

$$\epsilon(A) = \exp \left\{ i\pi \left(\frac{a+d}{12c} - s(d,c) \right) \right\},$$

où $s(d,c)$ est la somme de Dedekind introduite au paragraphe précédent.

Commençons par quelques propositions décrivant le comportement de ϵ sous l'action des deux générateurs du groupe modulaire Γ , $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lemme 4.4.8. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, avec $c > 0$. Alors, pour tout entier m , on a

$$\epsilon(AT^m) = e^{im\pi/12} \epsilon(A).$$

Démonstration. On a $AT^m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & am+b \\ c & cm+d \end{pmatrix}$, donc on a

$$\epsilon(AT^m) = \exp \left\{ i\pi \left(\frac{a+cm+d}{12c} - s(cm+d,c) \right) \right\}.$$

Or, $s(cm+d,c) = s(d,c)$ (c'est l'une des propriétés des sommes de Dedekind vues au paragraphe précédent). Il reste alors à factoriser par $e^{im\pi/12}$ pour obtenir

$$\epsilon(AT^m) = e^{im\pi/12} \epsilon(A).$$

□

Lemme 4.4.9. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, avec $c > 0$. On a alors

$$\epsilon(AS) = \begin{cases} e^{-i\pi/4} \epsilon(A) & \text{si } d > 0. \\ e^{i\pi/4} \epsilon(A) & \text{si } d < 0. \end{cases}$$

Démonstration. On a $AS = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$.

Nous allons maintenant utiliser la loi de réciprocité de Dedekind pour exprimer $\epsilon(AS)$ en fonction de $\epsilon(A)$. Cependant, rappelons que cette loi impose que les deux arguments h et k de la somme de Dedekind soient positifs. De ce fait, il faut différencier les cas.

Si $d > 0$, on a donc

$$\epsilon(AS) = \exp \left\{ i\pi \left(\frac{b-c}{12d} - s(-c,d) \right) \right\} = \exp \left\{ i\pi \left(\frac{b-c}{12d} + s(c,d) \right) \right\}.$$

Or, $s(c, d) + s(d, c) = \frac{c}{12d} + \frac{d}{12c} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12cd}$ (loi de réciprocité), donc, cela combiné au fait que $ad - bc = 1$ montre que

$$\frac{b-c}{12d} + s(c, d) = \frac{a+d}{12c} - s(d, c) - \frac{1}{4}.$$

Cela donne directement, lorsque $d > 0$:

$$\epsilon(AS) = \exp \left\{ i\pi \left(\frac{a+d}{12c} - s(d, c) - \frac{1}{4} \right) \right\} = e^{-i\pi/4} \epsilon(A).$$

Lorsque $d < 0$, maintenant, on ne peut plus utiliser ainsi la loi de réciprocité. L'astuce consiste à représenter la matrice AS par $\begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}$: en effet, rappelons qu'une matrice et son opposée sont égales dans le groupe Γ ; de ce fait, les deux représentations sont équivalentes. Donc si $-d > 0$, la loi de réciprocité et la relation $ad - bc = 1$, donnent que

$$\frac{-b+c}{-12d} - s(c, -d) = \frac{a+d}{12c} - s(d, c) + \frac{1}{4}.$$

On a alors enfin, lorsque $d < 0$:

$$\begin{aligned} \epsilon(AS) &= \exp \left\{ i\pi \left(\frac{-b+c}{-12d} - s(c, -d) \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ i\pi \left(\frac{a+d}{12c} - s(d, c) + \frac{1}{4} \right) \right\} = e^{i\pi/4} \epsilon(A). \end{aligned}$$

□

Grâce à ces deux propositions, nous pouvons enfin en déduire l'équation fonctionnelle vérifiée par η :

Théorème 4.4.10. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, avec $c > 0$. Alors, pour tout $\tau \in H$, on a

$$\eta \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) = \epsilon(A) (-i(c\tau + d))^{1/2} \eta(\tau)$$

avec

$$\epsilon(A) = \exp \left\{ i\pi \left(\frac{a+d}{12c} - s(d, c) \right) \right\}.$$

Démonstration. Maintenant que nous savons comment se comporte ϵ sous l'action des générateurs du groupe modulaire, l'idée de la preuve de l'équation fonctionnelle va être très simple.

Tout $A \in \Gamma$ peut se décomposer $A = T^{n_1} S T^{n_2} \dots T^{n_k}$. Nous allons procéder par récurrence : on va supposer que l'équation est vraie pour $A \in \Gamma$ avec $c > 0$, et montrer qu'elle l'est alors pour AS et pour AT^m . Mais il va falloir faire un peu attention. En effet, l'équation n'a de sens que pour $c \neq 0$. Il va donc falloir s'assurer que les étapes successives de la récurrence ne font pas intervenir de matrice avec un $c = 0$, pour pouvoir appliquer l'hypothèse de récurrence

sans crainte. C'est-à-dire que pour que tout se passe bien, il faut qu'aucune des matrices $T^{n_1}, T^{n_1}S, T^{n_1}ST^{n_2}, \dots, T^{n_1}ST^{n_2} \dots T^{n_k}$ (on prend k minimal dans la décomposition) n'ait son coefficient en bas à gauche nul. Si c'était le cas, alors une telle matrice s'écrirait comme puissance de T , et alors A pourrait se factoriser en $A = T^m B$ avec $m \neq 0$ (toujours pour une décomposition minimale, pour éviter de pouvoir écrire $A = T^m T^{-m} A$).

Commençons donc par le cas "simple", c'est-à-dire le cas où A ne peut pas s'écrire $A = T^m B$ avec $m \neq 0$. Dans ce cas, la récurrence va parfaitement fonctionner, car aucune des étapes ne fera intervenir de matrice ayant un $c = 0$ pour laquelle l'équation et donc l'hypothèse de récurrence n'auraient pas de sens. Dans ce cas, l'initialisation est assurée par la proposition 4.4.2, puisque toute décomposition de A commence par un S .

Pour l'hérédité, on suppose donc que l'équation est vraie pour un certain $A \in \Gamma$, avec $c > 0$: i.e. pour tout $\tau \in H$,

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \epsilon(A) (-i(c\tau + d))^{1/2} \eta(\tau).$$

Appliquons cela à $T^m \tau$: on obtient

$$\eta(AT^m \tau) = \epsilon(A) (-i(cT^m \tau + d))^{1/2} \eta(T^m \tau),$$

c'est-à-dire, avec la proposition 4.4.1,

$$\eta(AT^m \tau) = \epsilon(A) (-i(c\tau + mc + d))^{1/2} e^{im\pi/12} \eta(\tau).$$

Par le lemme 4.4.8, on obtient

$$\eta(AT^m \tau) = \epsilon(AT^m) (-i(c\tau + mc + d))^{1/2} \eta(\tau),$$

ce qui est exactement l'équation fonctionnelle pour $T^m \tau$.

Appliquons maintenant l'équation pour A et $S\tau$. On a

$$\eta(AS\tau) = \epsilon(A) (-i(cS\tau + d))^{1/2} \eta(S\tau) = \epsilon(A) (-i(cS\tau + d))^{1/2} (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau),$$

grâce à la proposition 4.4.2.

Il faut à nouveau différencier les cas :

(i) Si $d > 0$, on écrit $cS\tau + d = \frac{d\tau - c}{\tau}$. Il s'ensuit que

$$(-i(cS\tau + d))^{1/2} (-i\tau)^{1/2} = (-i(d\tau - c))^{1/2} \frac{(-i\tau)^{1/2}}{\tau^{1/2}} = e^{-i\pi/4} (-i(d\tau - c))^{1/2}.$$

On obtient alors :

$$\eta(AS\tau) = \epsilon(A) e^{-i\pi/4} (-i(d\tau - c))^{1/2} \eta(\tau) = \epsilon(AS) (-i(d\tau - c))^{1/2} \eta(\tau),$$

ce qui est l'équation fonctionnelle pour AS et $d > 0$.

(ii) Si $d < 0$, il suffit d'écrire que $cS\tau + d = \frac{-d\tau + c}{-\tau}$. Cela donne

$$(-i(cS\tau + d))^{1/2} (-i\tau)^{1/2} = e^{i\pi/4} (-i(-d\tau + c))^{1/2}$$

et donc, de même,

$$\eta(AS\tau) = \epsilon(A)e^{i\pi/4}(-i(-d\tau + c))^{1/2}\eta(\tau) = \epsilon(AS)(-i(-d\tau + c))^{1/2}\eta(\tau),$$

ce qui est l'équation fonctionnelle pour AS et $d < 0$ (rappelons que lorsque le coefficient en bas à gauche est négatif, on ne considère pas la matrice elle-même mais son opposée).

Ainsi, si l'équation fonctionnelle est vraie pour $A \in \Gamma$ avec $c > 0$, elle l'est pour AS et pour AT^m . Ceci clôt la récurrence, i.e. pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, avec $c > 0$, et telle qu'on n'ait pas $A = T^m B$ avec $m \neq 0$, on a

$$\eta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \epsilon(A)(-i(c\tau + d))^{1/2}\eta(\tau).$$

Il reste le cas où A peut s'écrire $A = T^m B$ avec $m \neq 0$. On peut de plus supposer que B ne peut pas s'écrire $B = T^p C$, et donc que l'équation fonctionnelle est vraie pour B . Alors, en appliquant successivement la propriété 4.1 et l'équation fonctionnelle à B , on peut écrire que :

$$\eta(A\tau) = \eta(T^m B\tau) = e^{im\pi/12}\eta(B\tau) = e^{im\pi/12}\epsilon(B)(-i(c\tau + d))^{1/2}\eta(\tau).$$

Il ne reste plus qu'à voir que $\epsilon(T^m B) = e^{im\pi/12}\epsilon(B)$. C'est exactement la même preuve que pour la proposition 4.6. Donc finalement, on a bien l'équation fonctionnelle pour A :

$$\eta(A\tau) = \epsilon(A)(-i(c\tau + d))^{1/2}\eta(\tau).$$

□

4.4.3 Équation fonctionnelle de F

À partir de l'équation fonctionnelle de η , nous allons enfin pouvoir en déduire l'équation fonctionnelle de F que nous avons admise dans la première partie. La force de l'équation que nous allons obtenir est qu'elle relie le comportement de F en une racine de l'unité à son comportement en 0, que l'on connaît bien. Pour ce faire, nous allons appliquer l'équation fonctionnelle de η à un point τ proche de h/k (et cela correspondra au comportement de F en $e^{2i\pi h/k}$), avec un élément A de Γ bien choisi. Bien choisi dans le sens où le conjugué de τ par l'action de A sera non pas un autre nombre rationnel, qui donnerait encore le comportement de F en une autre racine de l'unité, mais un point τ' proche du point $i\infty$ qui, lui, donnera, après la transformation canonique $x = e^{2i\pi\tau}$, le comportement de F près de 0.

Théorème 4.4.11. Soit $F(t) = 1/\prod_{n=1}^{\infty}(1 - t^n)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $h, H \in \mathbb{Z}$ tels que $\text{Re}(z) > 0$, $(h, k) = 1$ et $hH \equiv -1[k]$. Alors, pour

$$x = \exp\left(\frac{2i\pi h}{k} - \frac{2\pi z}{k^2}\right), x' = \exp\left(\frac{2i\pi H}{k} - \frac{2\pi}{z}\right)$$

on a :

$$F(x) = e^{i\pi s(h,k)}\left(\frac{z}{k}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{\pi}{12z} - \frac{\pi z}{12k^2}\right)F(x').$$

Démonstration. On a, pour tout $\tau \in H$, la relation $F(e^{2i\pi\tau}) = e^{i\pi\tau/12}/\eta(\tau)$.

De plus, l'équation fonctionnelle de η s'écrit, lorsque $\tau' = A\tau$ pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$:

$$\frac{1}{\eta(\tau)} = \frac{1}{\eta(\tau')} (-i(c\tau + d))^{1/2} \exp \left\{ i\pi \left(\frac{a+d}{12c} + s(-d, c) \right) \right\}.$$

En combinant ces deux relations, on obtient :

$$F(e^{2i\pi\tau}) = F(e^{2i\pi\tau'}) \exp \left(\frac{\pi i(\tau - \tau')}{12} \right) (-i(c\tau + d))^{1/2} \exp \left\{ i\pi \left(\frac{a+d}{12c} + s(-d, c) \right) \right\}.$$

On choisit alors $a = H$, $c = k$, $d = -h$, et $b = -\frac{hH+1}{k}$ (entier car on a supposé $hH \equiv -1[k]$). On a bien $c > 0$, et $ad - bc = 1$. On prend alors $\tau = \frac{iz+h}{k}$, ce qui donne $\tau' = \frac{iz^{-1}+H}{k}$, et l'équation devient :

$$F \left(\exp \left(\frac{2i\pi h}{k} - \frac{2\pi z}{k} \right) \right) = F \left(\exp \left(\frac{2i\pi H}{k} - \frac{2\pi}{kz} \right) \right) z^{1/2} \exp \left(\frac{\pi}{12kz} - \frac{\pi z}{12k} + \pi i s(h, k) \right).$$

Il ne vous reste plus qu'à remplacer z par z/k pour obtenir l'équation fonctionnelle de F . \square

Bibliographie

- [Apo90] Tom M. Apostol. *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, volume 41 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.
- [BHT04] Nantel Bergeron, Florent Hivert, and Jean-Yves Thibon. The peak algebra and the Hecke-Clifford algebras at $q = 0$. *J. Combin. Theory Ser. A*, 107(1) :1–19, 2004.
- [BL09] Nantel Bergeron and Huilan Li. Algebraic structures on Grothendieck groups of a tower of algebras. *J. Algebra*, 321(8) :2068–2084, 2009.
- [Bou68] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.
- [CC10] David Chudnovsky and Gregory Chudnovsky, editors. *Additive number theory*. Springer, New York, 2010. Festschrift in honor of the sixtieth birthday of Melvyn B. Nathanson.
- [CF94] Louis Crane and Igor B. Frenkel. Four-dimensional topological quantum field theory, Hopf categories, and the canonical bases. *J. Math. Phys.*, 35(10) :5136–5154, 1994. Topology and physics.
- [CFZ02] Frédéric Chapoton, Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky. Polytopal realizations of generalized associahedra. *Canad. Math. Bull.*, 45(4) :537–566, 2002. Dedicated to Robert V. Moody.
- [CLS14] Cesar Ceballos, Jean-Philippe Labbé, and Christian Stump. Subword complexes, cluster complexes, and generalized multi-associahedra. *J. Algebraic Combin.*, 39(1) :17–51, 2014.
- [CP14] Grégory Chatel and Vincent Pilaud. The cambrian and baxter-cambrian hopf algebras. En préparation, 2014.
- [CR90] Charles W. Curtis and Irving Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [DHNT11] Gérard H. E. Duchamp, Florent Hivert, Jean-Christophe Novelli, and Jean-Yves Thibon. Noncommutative symmetric functions VII : free quasi-symmetric functions revisited. *Ann. Comb.*, 15(4) :655–673, 2011.

- [FR07] Sergey Fomin and Nathan Reading. Root systems and generalized associahedra. In *Geometric combinatorics*, volume 13 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 63–131. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [Ful97] William Fulton. *Young tableaux*, volume 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.
- [FZ02] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2) :497–529 (electronic), 2002.
- [FZ03a] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.*, 154(1) :63–121, 2003.
- [FZ03b] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Y -systems and generalized associahedra. *Ann. of Math. (2)*, 158(3) :977–1018, 2003.
- [Gei77] Ladnor Geissinger. Hopf algebras of symmetric functions and class functions. In *Combinatoire et représentation du groupe symétrique (Actes Table Ronde C.N.R.S., Univ. Louis-Pasteur Strasbourg, Strasbourg, 1976)*, pages 168–181. Lecture Notes in Math., Vol. 579. Springer, Berlin, 1977.
- [Hiv07] Florent Hivert. An introduction to combinatorial Hopf algebras—examples and realizations. In *Physics and theoretical computer science*, volume 7 of *NATO Secur. Sci. Ser. D Inf. Commun. Secur.*, pages 253–274. IOS, Amsterdam, 2007.
- [HL07] Christophe Hohlweg and Carsten E. M. C. Lange. Realizations of the associahedron and cyclohedron. *Discrete Comput. Geom.*, 37(4) :517–543, 2007.
- [HNT06] Florent Hivert, Jean-Christophe Novelli, and Jean-Yves Thibon. Yang-Baxter bases of 0-Hecke algebras and representation theory of 0-Ariki-Koike-Shoji algebras. *Adv. Math.*, 205(2) :504–548, 2006.
- [HR00] G. H. Hardy and S. Ramanujan. Asymptotic formulæ in combinatory analysis [Proc. London Math. Soc. (2) 17 (1918), 75–115]. In *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, pages 276–309. AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.
- [HST13] Florent Hivert, Anne Schilling, and Nicolas Thiéry. The biHecke monoid of a finite Coxeter group and its representations. *Algebra Number Theory*, 7(3) :595–671, 2013.
- [Hum90] James E. Humphreys. *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [KM04] Allen Knutson and Ezra Miller. Subword complexes in Coxeter groups. *Adv. Math.*, 184(1) :161–176, 2004.
- [KT97] Daniel Krob and Jean-Yves Thibon. Noncommutative symmetric functions. IV. Quantum linear groups and Hecke algebras at $q = 0$. *J. Algebraic Combin.*, 6(4) :339–376, 1997.
- [LP13] Carsten Lange and Vincent Pilaud. Using spines to revisit a construction of the associahedron. Prépublication, [arXiv:1307.4391](https://arxiv.org/abs/1307.4391), 2013.
- [LR98] Jean-Louis Loday and María O. Ronco. Hopf algebra of the planar binary trees. *Adv. Math.*, 139(2) :293–309, 1998.

- [Mac95] Ian G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, second edition, 1995. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.
- [MR95] Claudi Malvenuto and Christophe Reutenauer. Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra. *J. Algebra*, 177(3) :967–982, 1995.
- [PR95] Stéphane Poirier and Christophe Reutenauer. Algèbres de Hopf de tableaux. *Ann. Sci. Math. Québec*, 19(1) :79–90, 1995.
- [PS13] Vincent Pilaud and Christian Stump. Brick polytopes of spherical subword complexes : a new approach to generalized associahedra. Prépublication, arXiv:1111.3349, 2013.
- [Rad73] Hans Rademacher. *Topics in analytic number theory*. Springer-Verlag, New York, 1973. Edited by E. Grosswald, J. Lehner and M. Newman, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 169.
- [Ser78] Jean-Pierre Serre. *Représentations linéaires des groupes finis*. Hermann, Paris, revised edition, 1978.
- [Ser84] Aleksandr N. Sergeev. Tensor algebra of the identity representation as a module over the Lie superalgebras $Gl(n, m)$ and $Q(n)$. *Mat. Sb. (N.S.)*, 123(165)(3) :422–430, 1984.
- [Sta63] James Dillon Stasheff. Homotopy associativity of H -spaces. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 108 (1963), 275-292; *ibid.*, 108 :293–312, 1963.
- [Wat95] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Reprint of the second (1944) edition.
- [Weice] Eric W. Weisstein. “partition function p congruences”. <http://mathworld.wolfram.com/PartitionFunctionPCongruences.html>, From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
- [Zel81] Andrey V. Zelevinsky. *Representations of finite classical groups*, volume 869 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981. A Hopf algebra approach.