Introduction au domaine de recherche

Processus réfléchis dans le quart de plan. Asymptotique des mesures invariantes et des fonctions de Green.

SANDRO FRANCESCHI

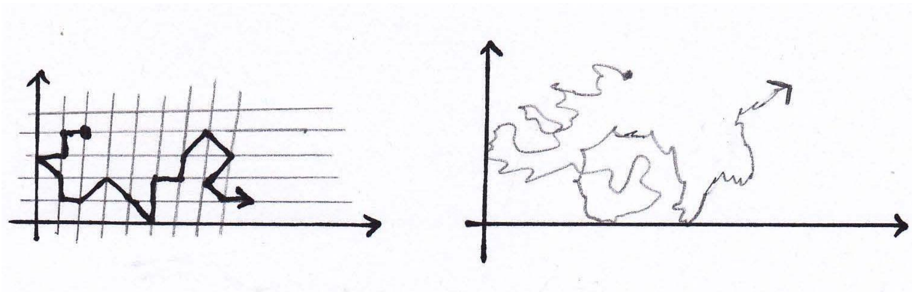
Sous la direction d'IRINA KOURKOVA

3 octobre 2013

Table des matières

Introduction

Présentation du problème. Nous allons étudier des marches aléatoires et des mouvements browniens dans le quart de plan réfléchi au bord.



Que ce soit pour les marches aléatoires (discret) ou pour le mouvement brownien (continu) il y a deux cas possibles. Le cas récurrent où il existe une mesure invariante (ou distribution stationnaire) et le cas transient où l'analogue des mesures invariantes sont les fonctions de Green. Ces fonctions représentent la moyenne du temps passé en un point dans le cas discret ou la densité (ou mesure) du temps d'occupation du processus dans le cas continu. Un objectif est d'étudier l'asymptotique des mesures invariantes et des fonctions de Green.

Historique. Les livres de [Fayolle-Malyshev-Menshikov] et de [Fayolle-Iasnogrodski-Malyshev] étudient les marches aléatoires réfléchies dans le quart de plan et plusieurs articles comme [Varadhan-Williams] ou [Hobson-Rogers] étudient le mouvement brownien réfléchi. Des critères similaires de récurrence ou de transience y sont notamment démontrés. Plusieurs articles ont aussi étudié les problèmes d'asymptotique. Des résultats sur l'asymptotique des fonctions de Green sont obtenus dans [Kurkova-Malyshev] (1998) et [Kurkova-Raschel] (2011). Pour le cas continu récurrent c'est l'article de [Dai-Miyazawa] (2011) qui retiendra le plus notre attention. Il développe des méthodes similaires aux articles précédents pour parvenir à un résultat sur l'asymptotique de la distribution stationnaire.

Objectif et perspectives. Dans ce mémoire nous tacherons d'étudier en parallèle le cas discret et le cas continu qui sont souvent étudiés séparément alors que les méthodes utilisées sont similaires. L'asymptotique du cas continu transient n'a semble-t-il jamais été traité. Nous énonçons ici une formule clé qui pourrait permettre par des méthodes analytiques d'établir des résultats sur l'asymptotique des fonctions de Green dans le cas continu.

Plan. Dans la section 1 nous introduisons les processus (discets et continus) réfléchis dans le quart de planet nous donnons des critères de récurrence. Nous étudions ensuite les mesures invariantes, les fonctions de Green et leurs fonctions génératrices ou transformées de Laplace qui seront utiles par la suite. La section 2 se consacre à l'asymptotique. Après avoir énoncé quelques résultats actuels on étudie la structure commune de leurs preuves.

1 Processus réfléchis dans le quart de plan, mesure invariante et fonction de Green

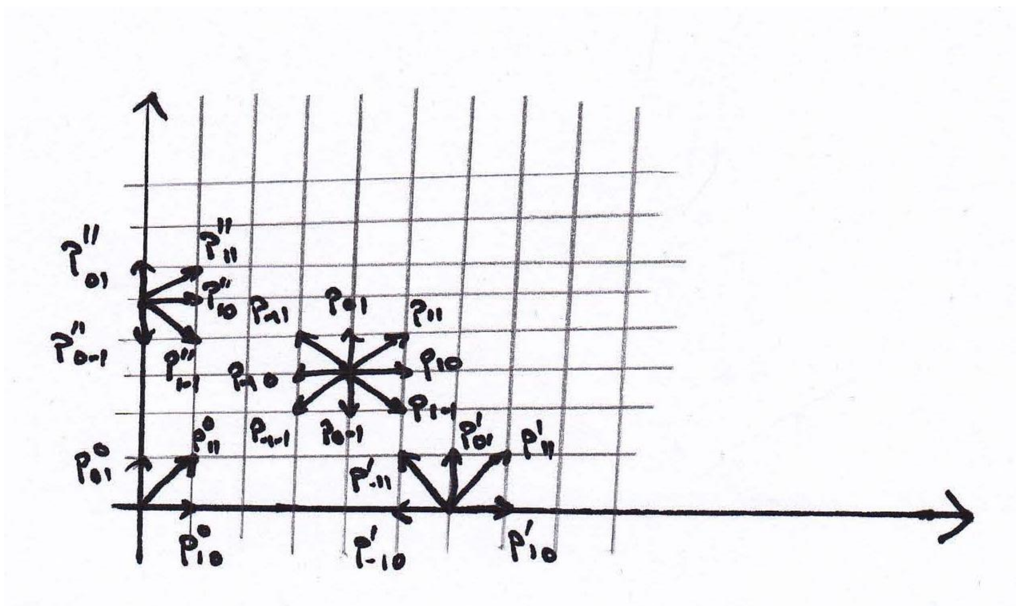
1.1 Marche aléatoire et mouvement brownien réfléchis dans le quart de plan

1.1.1 Marche aléatoire réfléchie

On étudie une marche aléatoire dans $\mathbb{Z}_+^2$ spatialement homogène avec des sauts de longueur au plus 1. On note p_{ij} (respectivement p'_{ij}, p''_{ij}, p^0_{ij}) les probabilités de transition en partant de l'ensemble ${\mathbb{Z}_+^*}^2$ (respectivement $\mathbb{Z}_+^* \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{Z}_+^*$, $(0,0)$). On a donc

$$\begin{cases} \mathbb{P}[Z(n+1) = (x+i, y+j) | Z(n) = (x,y)] = p_{ij} \text{ si}(x,y) \in {\mathbb{Z}_+^*}^2 \\ \mathbb{P}[Z(n+1) = (x+i, y+j) | Z(n) = (x,y)] = p'_{ij} \text{ si}(x,y) \in \mathbb{Z}_+^* \times \{0\} \\ \mathbb{P}[Z(n+1) = (x+i, y+j) | Z(n) = (x,y)] = p''_{ij} \text{ si}(x,y) \in \{0\} \times \mathbb{Z}_+^* \\ \mathbb{P}[Z(n+1) = (x+i, y+j) | Z(n) = (x,y)] = p^0_{ij} \text{ si}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

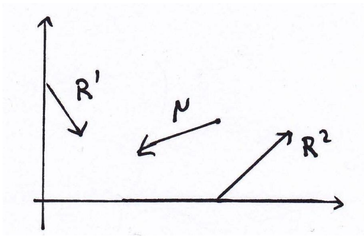
Les sauts sont d'au plus 1 c'est à dire que p_{ij}, p'_{ij}, p''_{ij}, p^0_{ij} sont nuls pour $|i| > 1$ ou $|j| > 1$.



1.1.2 Mouvement brownien réfléchi

Soient

$$\left\{\begin{array}{l}(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \text{ un mouvement brownien plan issu de 0 de variance } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \\ \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ une dérive} \\ R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ une matrice de « rebond » composé de deux colonnes } R_1 \text{ et } R_2 \end{array}\right.$$



Définition 1. *On peut définir brièvement Z un mouvement brownien avec dérive réfléchi au bord du quart de plan $\mathbb{R}^2_+$ associé à (Σ, μ, R) comme*

$$Z_t = Z_0 + W_t + \mu t + RL_t \ \in \mathbb{R}^2_+$$

où L^i_t est un processus continu et croissant qui s'accroit uniquement lorsque $Z_i(.) = 0$ c'est à dire que le processus touche le bord. On a $\int_{\{t:Z^i_t>0\}} \mathrm{d}L^i_t = 0$. Sous certaines conditions un tel processus existe et est unique.

On a donc

$$\left\{\begin{array}{l} Z^1_t = x + W^1_t + \mu_1 t + r_{11}L^1_t + r_{12}L^2_t \\ Z^2_t = y + W^2_t + \mu_2 t + r_{21}L^1_t + r_{22}L^2_t \end{array}\right.$$

On pourra se référer à [Varadhan-Williams] pour l'étude de ce processus.

Remarque. $(L_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est (presque) le temps local passé au bord. Cette définition est un peu l'anologue de la formule de Tanaka pour un mouvement brownien avec dérive en dimension deux à cela près que le « rebond » n'est pas orthogonal à cause de la matrice R.

Remarque. On peut montrer que la quantité de temps que le processus passe dans le coin est nulle (au sens de la mesure de lebesgue). Si l'angle entre les deux axes était plus petit qu'un angle droit on pourrait avoir, selon les angles des vecteurs de rebond, des cas ou le processus atteint le coin presque surement et y reste.

1.2 Critères de récurrence et de transience

1.2.1 Cas discret

On définit les vecteurs de saut moyens (E, E', E'') qui sont l'équivalent de la dérive μ et des vecteurs de rebond R^1 et R^2 dans le cas continu.

$$\begin{cases} E = (E_x, E_y) = \big(\sum_{i,j} i p_{i,j}, \sum_{i,j} j p_{i,j} \big) \\ E' = (E'_x, E'_y) = \big(\sum_{i,j} i p'_{i,j}, \sum_{i,j} j p'_{i,j} \big) \\ E'' = (E''_x, E''_y) = \big(\sum_{i,j} i p''_{i,j}, \sum_{i,j} j p''_{i,j} \big) \end{cases} \tag{1}$$

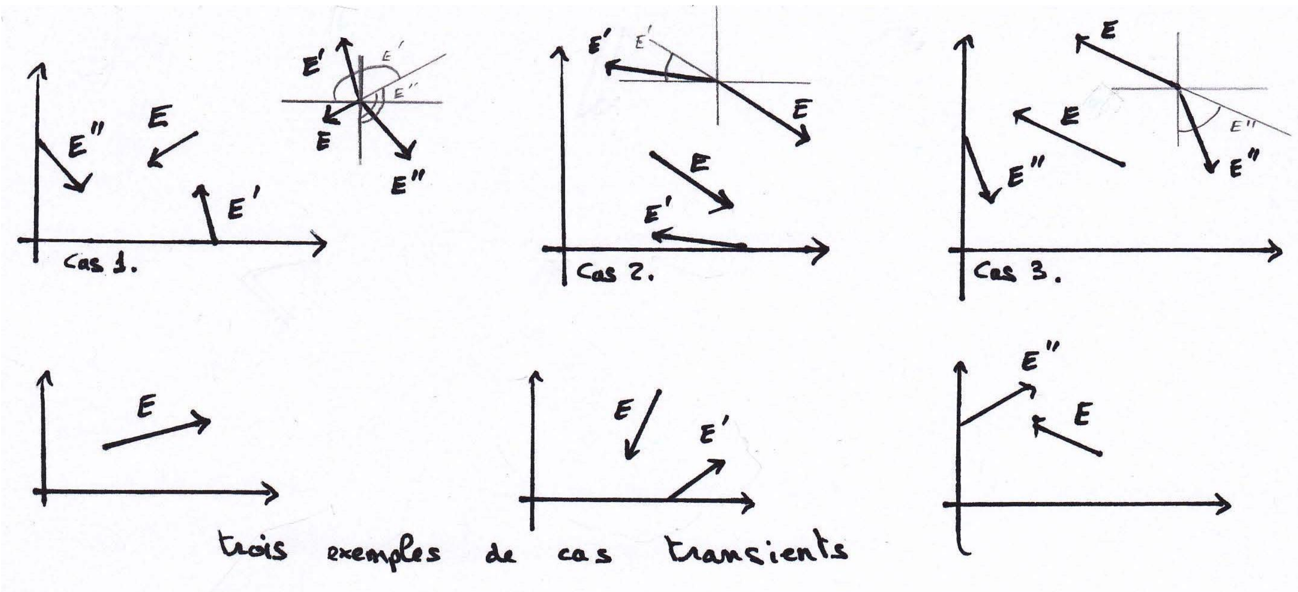
Les sommes sur i, j sont en fait des sommes pour les i, j plus petits que 1.

Proposition 1. *La marche aléatoire réfléchie dans le quart de plan est récurrente positive si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

1. $E_x < 0,\ E_y < 0,\ E_x E'_y - E_y E'_x < 0,\ E_y E''_x - E_x E''_y < 0$
2. $E_x > 0,\ E_y < 0,\ E_x E'_y - E_y E'_x < 0$
3. $E_x < 0,\ E_y > 0,\ E_y E''_x - E_x E''_y < 0$

La preuve de ce résultat est dans le livre de [Fayolle-Malyshev-Menshikov].

Remarque.
- La condition 1. équivaut au fait que (E', E) et (E, E'') soient des bases directes.
- La condition 2. équivaut à ce que (E', E) soit une base directe et la condition 3. à ce que (E'', E) soit une base directe.



1.2.2 Cas continu

Définition 2. *Z est dit récurrent positif si pour tout voisinage de zéro $V \subset \mathbb{R}_+^2$ de mesure de lebesgue positive on a $\mathbb{E}_x[\tau_V] < \infty$ pour tout point de départ $x \in \mathbb{R}_+^2$ où on a noté $\tau_V = \inf\{t \geqslant 0 : Z(t) \in V\}$.*

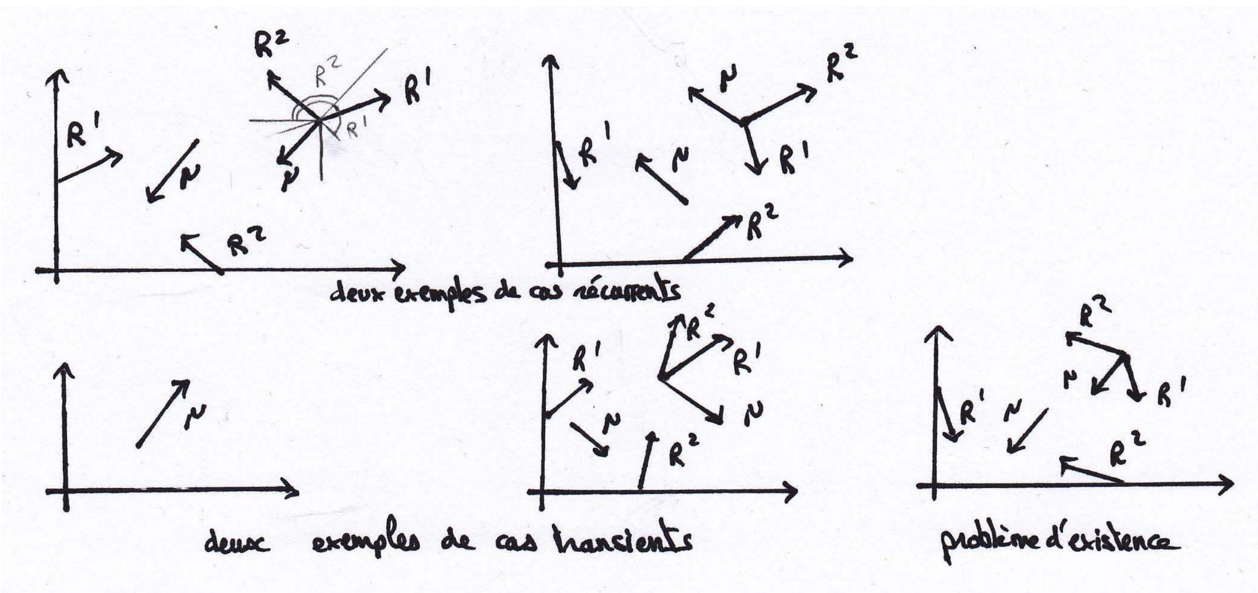
Proposition 2. *L'existence d'un unique processus Z récurrent positif admettant une unique mesure invariante est équivalent au fait que (Σ, μ, R) statisfait les conditions suivantes :*

$$r_{11} > 0, \quad r_{22} > 0, \quad r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} > 0 \tag{2}$$

$$r_{22}\mu_1 - r_{12}\mu_2 < 0, \quad r_{11}\mu_2 - r_{21}\mu_1 < 0. \tag{3}$$

On pourra lire [Hobson-Rogers] et [Williams] et [Harrison-Hasenbein] pour plus de précisions et des démonstrations. L'article [Dai-Miyazawa2] donne des interprétations géométriques des deux conditions, utiles pour les études asymptotiques de la mesure invariante ou des fonctions de Green.

Remarque.
- La condition (2) équivaut au fait que R soit une $\mathcal{P}$-matrice (tous les mineurs sont positifs) ou encore que (R^1, R^2) soit une base directe. Cette condition sert à ce que le coin ne soit pas « trop » attractif.
- La condition (3) équivaut à $R^{-1}\mu < 0$ ou encore au fait que (R^2, μ) et (μ, R^1) sont des bases directes. Cette condition sert à ce que, si le processus arrive sur un bord avec la direction de la dérive, il rebondisse « vers l'autre bord » afin de ne pas partir vers l'infini le long du bord qu'il vient de toucher.
- Les conditions du cas discret et du cas continu se ressemblent. C'est à cause des conditions pour que le coin ne soit pas « trop » attractif qu'elles ne sont pas similaires. Pour que le processus soit récurrent positif on ne peut pas avoir par exemple dans le cas continu $\mu_1 < 0$, $\mu_2 < 0$, $r_{22}\mu_1 - r_{12}\mu_2 < 0$, $r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} < 0$ ce qui serait possible dans le cas discret (cas 1).



1.3 Mesure invariante et fonctions de Green

1.3.1 Propriété des distributions stationnaires

Soit Z un mouvement brownien avec dérive réfléchi au bord du quart de plan $\mathbb{R}_+^2$ associé à (Σ, μ, R). On suppose que les conditions (2) et (3) sont vérifiées et que donc le processus est récurrent et admet une unique distribution stationnaire (ou mesure invariante) π.

$$Z_t = Z_0 + W_t + \mu t + RL_t \ \in \mathbb{R}_+^2$$

Soit L le générateur de $(W_t + \mu t)$. On a

$$Lf(z) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \sigma_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(z) + \sum_{i=1}^{2} \mu_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z).$$

Soient

$$D_i f(x) = \langle R^i | \nabla f \rangle.$$

Le générateur de Z à l'intérieur de $\mathbb{R}_+^2$ est L. Si on « ralentit » le processus (voir [Varadhan]), D_1 et D_2 sont les générateurs sur les frontières.
Soit π la mesure invariante de Z à l'intérieur de $\mathbb{R}_+^2$. On définit ν_1 et ν_2 les mesures sur les frontières, telles que

$$\nu_i(A) = \mathbb{E}_\pi[\int_0^1 1_{\{Z(u)\in A\}} \mathrm{d}L_u^i].$$

Par définition d'une mesure invariante on a pour tout t :

$$\mathbb{E}_\pi[f(Z(t))] = \int_{\mathbb{R}_+^2} f(z)\pi(\mathrm{d}z)$$

et par définition des ν_i, en intervertissant les intégrales et les sommes puis par densité, approximation et passage à la limite, on a :

$$\mathbb{E}_\pi[\int_0^t f(Z(u))\mathrm{d}L_u^i] = t\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x)\nu_i(\mathrm{d}x)$$

On constate que ν_1 et ν_2 sont en quelque sorte des mesures « invariantes » sur les frontières.

Proposition 3. *On a* $\forall f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}_+^2)$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} Lf(z)\pi(\mathrm{d}z) + \sum_{i=1,2}\int_{\mathbb{R}_+^2} D_i f(z)\nu_i(\mathrm{d}z) = 0. \tag{4}$$

Cette relation caractérise la distribution stationnaire.

Remarque : C'est l'analogue de $\pi(P-I)=0$ pour les chaînes de Markov, $\pi Q = 0$ pour les chaînes de Markov à temps continu ou encore $\int \mathcal{G} f d\mu = 0$ pour les processus de Markov où $\mathcal{G}$ est le générateur.

1.3.2 Fonction génératrice et transformée de Laplace

Dans le cas **récurrent** on étudie la **mesure invariante** (ou distribution stationnaire) qui mesure d'après les théorèmes ergordiques la proportion moyenne de temps que la marche aléatoire passe en un point (ou que le processus continu passe dans un ensemble de points). Par la suite on cherchera à étudier dans le cas récurrent l'asymptotique des mesures invariantes (c'est à dire par exemple $\lim_{i,j\to\infty}\pi_{ij}$ dans le cas discret ou encore $\lim_{z\to\infty} p(z)$ si p est la densité de π dans le cas continu). Pour cela on a besoin d'introduire dans le cas discret la fonction génératrice $\pi(u)$ de la mesure invariante. Son analogue $\phi(\theta)$ dans le cas continu est la transformée de Laplace de la distribution stationnaire. On pourra consulter [Fayolle-Iasnogrodski-Malyshev] pour le cas discret et [Dai-Miyazawa] pour le cas continu.

Dans le cas **transient** une telle mesure n'existe plus. En effet, le processus passe en moyenne une proportion nulle de temps en chaque point car il ne passe qu'un nombre fini de fois par chaque point (ou ensemble de points borné). Au lieu de s'intéresser à la proportion on va alors étudier les **fonctions de Green** qui sont les moyennes du nombre de fois que le processus passe en un point (ou ensemble de points). Comme pour le cas récurrent on s'intéresse aux fonctions de Green et à leurs fonctions génératrices $G(u)$ ou leurs transformées de Laplace $\psi(\theta)$ qui nous permettront d'étudier leurs asymptotiques. On pourra consulter [Kurkova-Malyshev] et [Kurkova-Raschel] pour le cas discret ou encore [Arous-Gradinaru] pour le cas continu.

Mesure invariante. On définit la fonction génératrice dans le cas discret

$$\pi(u)=\mathbb{E}_\pi[u^Z]=\sum_{z\in{\mathbb{Z}_+^*}^2}\pi_z u^z$$

et la transformée de Laplace dans le cas continu

$$\phi(\theta)=\mathbb{E}_\pi[\exp(\langle\theta|Z\rangle)]=\iint_{\mathbb{R}_+^2}\exp(\langle\theta|z\rangle)\pi(\mathrm{d}z)$$

où on note $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ et $\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2$ et $u^Z=u_1^{Z^1}u_2^{Z^2}$, $e^{(\langle\theta|Z\rangle)}=e^{(\theta_1 Z^1+\theta_2 Z^2)}$.

On définit aussi l'analogue de ces fonctions sur les frontières :

$$\pi_1(u)=\mathbb{E}_\pi[u^{Z_1}\mathbf{1}_{Z\in\mathbb{Z}^*\times\{0\}}]=\sum_{z\in\mathbb{Z}^*\times\{0\}}\pi_z u^z \text{ et } \pi_2(u)=\mathbb{E}_\pi[u^{Z_2}\mathbf{1}_{Z\in\{0\}\times\mathbb{Z}^*}]=\sum_{z\in\{0\}\times\mathbb{Z}^*}\pi_z u^z$$

$$\phi_2(\theta_1)=\mathbb{E}_\pi[\int_0^1 e^{\theta_1 Z_t^1}\mathrm{d}L_t^2]=\int_{\mathbb{R}_+^2}e^{\theta_1 z}\nu_2(\mathrm{d}z) \text{ et } \phi_1(\theta_2)=\mathbb{E}_\pi[\int_0^1 e^{\theta_2 Z_t^2}\mathrm{d}L_t^1]=\int_{\mathbb{R}_+^2}e^{\theta_2 z}\nu_1(\mathrm{d}z)$$

Fonctions de Green.

Définition 3. *Dans le cas discret la fonction de Green* $g_z^{z_0}$ *où* z *et* $z_0 \in \mathbb{Z}_+^2$ *est défini par*

$$g_z^{z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{z_0 z}^n = \mathbb{E}_{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{Z_n = z\}}$$

où $p_{z_0 z}^n = \mathbb{P}[Z_n = z | Z(0) = z_0] = \mathbb{E}_{z_0}[\mathbf{1}_{Z_n \in A}]$ *est la fonction de transition de* Z*.*

La fonction de Green $g_z^{z_0}$ est donc la moyenne du nombre de visites (ou du temps passé) en z en partant de z_0. On note $G(u)$ sa fonction génératrice à l'intérieur.

$$G^{z_0}(u) = \sum_{z \in {\mathbb{Z}_+^*}^2} g_z^{z_0} u^z$$

On note $G_1^{z_0}$ et $G_2^{z_0}$ l'analogue de ces fonctions sur le bord :

$$G_1^{z_0}(u_2) = \sum_{z \in \{0\} \times \mathbb{Z}^*} g_z^{z_0} u^z \quad \text{et} \quad G_2^{z_0}(u_1) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^* \times \{0\}} g_z^{z_0} u^z$$

et on a :

$$G^{z_0}(u) + G_1^{z_0}(u_2) + G_2^{z_0}(u_1) + g_{00}^{z_0} = \mathbb{E}_{z_0} \sum_{n=0}^{\infty} u^{Z_n}$$

Définition 4. *Dans le cas continu la fonction de Green* $g_A^{z_0}$ *où* $z_0 \in \mathbb{R}_+^2$ *et* $A \subset \mathbb{R}_+^2$ *est définie par*

$$g_A^{z_0} = \int_0^{\infty} P(t, z_0, A) \mathrm{d}t = \mathbb{E}_{z_0} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{Z_t \in A\}}$$

où $P(t, z_0, A) = \mathbb{P}[Z(t) \in A | Z(0) = z_0] = \mathbb{E}_{z_0}[\mathbf{1}_{Z(t) \in A}]$ *est la fonction de transition de* Z*.*

La fonction de Green $g_A^{z_0}$ est donc la moyenne du temps passé en A en partant de z_0. On remarque que $g_{\mathrm{d}z}^{z_0}$ est une mesure et on note $\psi^{z_0}(\theta)$ la transformée de Laplace des mesures de Green. En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\psi^{z_0}(\theta) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\langle \theta | z \rangle \; g_{\mathrm{d}z}^{z_0} = \iint_{\mathbb{R}_+^2} \exp\langle \theta | z \rangle \; \int_0^{\infty} P(t, z_0, \mathrm{d}z) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} \Big(\iint_{\mathbb{R}_+^2} \exp\langle \theta | z \rangle P(t, z_0, \mathrm{d}z) \Big) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} \mathbb{E}_{z_0}[\exp\langle \theta | Z(t) \rangle] \mathrm{d}t = \mathbb{E}_{z_0}\Big[\int_0^{\infty} \exp\langle \theta | Z(t) \rangle \mathrm{d}t\Big]
\end{aligned}$$

On note ψ_1 et ψ_2 l'analogue de ces fonctions mais en intégrant sur le bord par rapport à $\mathrm{d}L_t^i$:

$$\psi_2^{z_0}(\theta_1) = \mathbb{E}_{z_0}\Big[\int_0^{\infty} e^{\theta_1 Z_t^1} \mathrm{d}L_t^2\Big] \quad \text{et} \quad \psi_1^{z_0}(\theta_2) = \mathbb{E}_{z_0}\Big[\int_0^{\infty} e^{\theta_2 Z_t^2} \mathrm{d}L_t^1\Big]$$

2 Asymptotique et éléments de preuve

2.1 Résultats actuels

Plusieurs résultats existent sur l'asymptotique des mesures invariantes et des fonctions de Green dans le cas continu ou discret. Par exemple l'article de [Kurkova-Malyshev] obtient des résultats pour les fonctions de Green dans le cas discret. Ces résultats font intervenir notamment la notion de frontière de Martin. L'article de [Dai-Miyazawa] (2011) qui est une des principales références pour ce mémoire établit un résultat sur l'asymptotique de la distribution stationnaire pour le mouvement brownien réfléchi (voir ci dessous le théorème 1). Il semble possible d'obtenir de nouveaux résultats pour l'asymptotique des fonctions de Green dans le cas continu en s'inspirant notamment des méthodes utilisées dans les deux articles cités ci-dessus et en les améliorant.

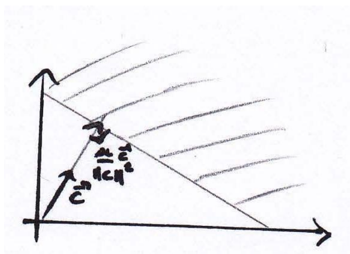
Théorème 1. *Soit Z un mouvement brownien avec dérive réfléchi au bord du quart de plan $\mathbb{R}_+^2$ associé à (Σ, μ, R). On suppose que les conditions (2) et (3) sont vérifiées et donc que le processus est récurrent et admet une unique distribution stationnaire (ou mesure invariante) π. Soit $Z(\infty)$ un vecteur aléatoire de loi π. Soit $c \in \mathbb{R}^2$. On cherche une fonction $f_c(x)$ qui satitsfasse*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}[\langle c|Z(\infty)\rangle > x]}{f_c(x)} = b$$

pour une certaine constante $b > 0$. On a alors

$$f_c(x) = x^{\kappa_c} e^{-\alpha_c x}$$

Les constantes α_c et κ_c peuvent être calculées explicitement en fonction de (Σ, μ, R) et κ_c ne peut prendre que les valeurs suivantes : $-3/2$, $-1/2$, 0 ou 1.



On dit que $bf_c(x)$ est l'asymptotique exacte de $\mathbb{P}[\langle c|Z(\infty)\rangle > x]$. Cela représente la limite de la mesure π de l'ensemble hachuré sur le dessin lorsque x tend vers l'infini.

2.2 Structure des preuves

Les preuves des résultats sur l'asymptotique des fonctions de Green ou des mesures invariantes, que ce soit dans le cas discret ou la cas continu, ont des structures similaires. Elles étudient en premier les fonctions génératrices ou les transformées de

Laplace pour en déduire des formules-clés de la forme :

$$\begin{cases} -Q(u)\pi(u) = q_1(u)\pi_1(u_1) + q_2(u)\pi_2(u_2) + q_0(u)\pi_0 & \text{cas récurrent discret} \\ -\gamma(\theta)\phi(\theta) = \gamma_1(\theta)\phi_2(\theta_1) + \gamma_2(\theta)\phi_1(\theta_2) & \text{cas récurrent continu} \\ -Q(u)G^{z_0}(u) = q_2(u)G_1^{z_0}(u_2) + q_1(u)G_2^{z_0}(u_1) + q_0(u)g_0^{z_0} + u^{z_0} & \text{cas transient discret} \\ -\gamma(\theta)\psi^{z_0}(\theta) = \gamma_1(\theta)\psi_1^{z_0}(\theta_2) + \gamma_2(\theta)\psi_2^{z_0}(\theta_1) + \exp\langle\theta|z_0\rangle & \text{cas transient continu} \end{cases} \tag{5}$$

où, les q et les γ sont des polynomes à deux variables explicites. Ces formules sont importantes car **elles relient ce qui se passe sur les frontières et à l'intèrieur du quart de plan**.

Une fois cette formule obtenue il faut étudier ce qu'on appelle le noyau et les ensembles $Q(u) = 0$ ou $\gamma(\theta) = 0$ (ellipses, tores, ...). On en déduit des propriétés sur les domaines de convergence des fonctions génératrices ou des transformées de Laplace. La formule clé permet de les prolonger analytiquement et d'obtenir des informations sur leurs singularités. Des résultats d'analyse complexe et des méthodes de type point col permettent ensuite de relier la transformée de Laplace (ou les fonctions génératrices) à la fonction d'origine qui nous intéresse pour obtenir des résultats sur leur asymptotique. La proposition ci-dessous montre bien d'où vient l'asymptotique $f_c(x) = x^{\kappa_c}e^{-\alpha_c}$ du théorème 1.

Proposition 4. *Soit $\tilde{f}$ la transformée de Laplace de f. Soit g un prolongement analytique de $\tilde{f}$ tel que*

$$g(z) - \frac{c_0}{(\alpha_0 - z)^k}$$

est analytique pour $\Re z < \alpha_1$ avec $\alpha_1 > \alpha_0$. Alors, sous quelques petites conditions sur g, quand $x \to \infty$ on a :

$$f(x) \sim \frac{c_0}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\alpha_0 x}.$$

2.3 Perspectives

L'objectif est maintenant d'étudier l'asymptotique du cas transient continu grâce à la nouvelle formule clé et des méthodes analytiques.

Pour étudier le cas discret il faut prolonger les fonctions génératrices sur une surface de Riemann (un tore si les sauts sont de longueur au plus un) et utiliser des méthodes du type point col.

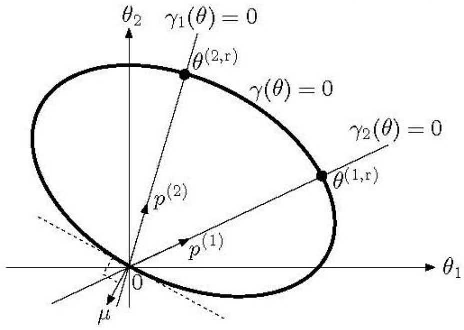
Pour le cas continu une étude un peu plus poussée devrait nous mener à étudier les fonctions sur une surface de Riemann, probablement une sphère dont l'ellipse de [Dai-Miyazawa] (*cf.* annexe A) ne serait qu'un méridien (la partie réelle). Cela pourrait permettre d'améliorer des résultats existant et surtout de traiter le cas des fonctions de Green pour le mouvement brownien réfléchi.

A Exemple de preuve.

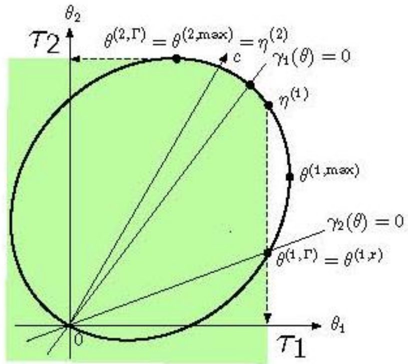
Explicitons brièvement la preuve du théorème 1 dans un cas particulier. On note :

$$\begin{cases} \gamma(\theta) = (\frac{1}{2}\langle\theta|\sigma\theta\rangle + \langle\theta|\mu\rangle) \\ \gamma_1(\theta) = \langle R^1|\theta\rangle = r_{11}\theta_1 + r_{21}\theta_2 \\ \gamma_2(\theta) = \langle R^2|\theta\rangle = r_{12}\theta_1 + r_{22}\theta_2 \end{cases} \tag{6}$$

Voici la représentation géométriques des paramètres (Σ, μ, R) du problème. Les vecteurs $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ sont les vecteurs orthogonaux des vecteur R^2 et R^1.



Supposons que (Σ, μ, R) satisfassent les conditions explicitées sur le dessin suivant.



On peut alors montrer (en utilisant entre autres la formule-clé, *c*f. [Dai-Miyazawa]) que le domaine de convergence de ϕ, $\mathcal{D} =$ intérieur$\{\theta \in \mathbb{R}^2 : \phi(\theta) < \infty\}$ est le domaine grisé sur la figure ci-dessus. On peut aussi montrer que $\phi_2(z)$ est analytique sur l'ensemble $\{\Re z < \tau_1\}$ et que $\phi_1(z)$ est analytique sur l'ensemble $\{\Re z < \tau_2\}$. On définit $\alpha_c = \inf\{\alpha > 0 : \alpha c \in \partial\mathcal{D} \cap \mathbb{R}^2_+\}$. Dans le cas que nous étudions (*c*f. dessin) $\alpha_c c$ appartient à l'ellipse et on a donc $\alpha_c < \frac{\tau_1}{c_1}$ et $\alpha_c < \frac{\tau_2}{c_2}$. Avec la formule clé on a : $\psi_c(z) = \phi(zc) = \mathbb{E}[e^{z\langle c|Z(\infty)\rangle}] = \frac{\gamma_1(zc)\phi_1(c_2 z)+\gamma_2(zc)\phi_2(c_1 z)}{\gamma(zc)}$ pour $\Re z < \alpha_c$. En notant $\gamma(zc) = z\zeta_c(z)$ on a donc :

$$\psi_c(z) = \frac{\gamma_1(c)\phi_1(c_2 z) + \gamma_2(c)\phi_2(c_1 z)}{\zeta_c(z)} \quad \text{pour } \Re z < \alpha_c$$

Comme $\alpha_c c$ appartient à l'ellipse on a $\gamma(\alpha_c c) = 0$ et donc $\zeta_c(\alpha_c) = 0$. Donc $\psi_c(z)$ a un pôle simple en $z = \alpha_c$. D'après la proposition 4 la densité $p_c(x)$ de $\langle c|Z(\infty)\rangle$ vérifie donc $p_c(x) \sim Ce^{-\alpha_c x}$ pour C une certaine constante. Un petit lemme nous permettrait de conclure le résultat du théorème 1 avec $f_c(x) = e^{-\alpha_c x}$. C'est à dire qu'il existe un b tel que $\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}[\langle c|Z(\infty)\rangle > x]}{f_c(x)} = b$.

Références

[Dai-Miyazawa] J. G. DAI AND M. MIYAZAWA - "Reflecting brownian motion in two dimensions : Exacts asymptotics for the stationary distribution", *Stochastic Systems,* **1** (2011), p. 146-208.

[Dai-Miyazawa2] J. G. DAI AND M. MIYAZAWA - "Stationary distribution of a two-dimensional SRBM : geometric views and boundary measures", *Queueing Systems ,* **74** (2013), p. 181-217.

[Kurkova-Raschel] I. KURKOVA AND K. RASCHEL - "Random walks in $(\mathbb{Z}_+)^2$ with non -zero drift absorbed at the axes", *Billetin de la Société Mathématique de France,* **69** (2011), p. 341-387.

[Kurkova-Malyshev] I. KURKOVA AND V. MALYSHEV - "Martin boundary and elliptic curves", *Markov Process and Related Fields,* **4** (1998), p. 203-272.

[Fayolle-Iasnogrodski-Malyshev] G. FAYOLLE, R. IASNOGORODSKI AND V. MALYSHEV - *Random walks in the quarter-plane,* Application of Mathématics (New York), vol. 40, Springer, (1999).

[Fayolle-Malyshev-Menshikov] G. FAYOLLE, V. MALYSHEV AND M. MENSHIKOV - *Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chain,* Cambridge University Press (1995).

[Varadhan-Williams] S . R . S . VARADHAN AND R.J. WILLIAMS - "Brownian Motion in a Wedge with Oblique Reflection", *Communications on Pure and Applied Mathématics* , **38** (1985), p. 405-443.

[Hobson-Rogers] D. G. HOBSON AND L. C. G. ROGERS - "Recurrence and transience of reflecting Brownian motion in the quadrant", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **113** (1993), p. 387-399.

[Williams] R.J. WILLIAMS - "Recurrence classification and invariant measure for reflected Brownian motion in a wedge", *Annals of Probabability* , **13** (1985), p. 758-778.

[Williams2] R.J. WILLIAMS - "Semimartingale reflecting Brownian motions in the orthant", in *Stochastic Networks,* the IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 71 (Springer, New York), **13** (1995).

[Varadhan] S . R . S . VARADHAN - *Advanced Topics in Probability,* New York University (2011).

[Harrison-Hasenbein] J. M. HARRISON AND J. J. HASENBEIN - "Reflected Brownian motion in the quadrant : Tail behavior of the stationary distribution", *Queueing Systems ,* **61** (2009), p. 113-138.

[Arous-Gradinaru] G. B. AROUS AND M. GRADINARU - "Singularités des fonctions de Green hypoelliptiques", *Annales mathématiques Blaise Pascal,* **3** (1996), p. 23-32.