Introduction au domaine de recherche

Spectre du laplacien sur les variétés et expansion dans les groupes

Weikun He

Octobre 2013

Résumé

Nous étudions λ_1, la première valeur propre non nulle de l'opérateur laplacien sur des variétés riemanniennes de volume fini ou sur des graphes de Cayley d'un groupe fini. Nous présentons en particulier un lien entre les deux cas ci-dessus et des phénomènes de trou spectral (minoration du λ_1). Des progrès récents et des problèmes ouverts sont discutés.

Table des matières

1 Définition du λ_1

Le laplacien est un opérateur auto-adjoint positif invariant par toute isométrie. On s'intéresse à la « première » valeur spectrale de cet opérateur.

1.1 Cas des variétés riemanniennes

Soit (X, g) une variété riemannienne. L'**opérateur de Laplace-Beltrami** Δ peut être défini comme l'unique opérateur auto-adjoint de l'espace de Hilbert

$L^2(X,g)$ qui vérifie la formule de Green : pour tout $f \in L^2(X,g)$, lisse et à support compact,

$$\langle \Delta f, f\rangle = \int_M g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f)\,\mathrm{d}\,\mathrm{vol} = \|\operatorname{grad} f\|^2,$$

où vol est la mesure associée à la métrique riemannienne g et grad désigne le gradient. Il suit de cette définition que Δ est positif et invariant par le groupe $\operatorname{Isom}(X,g)$ des isométrie de (X,g).

On note

$$\lambda_1(X) = \inf \operatorname{Spec}(\Delta) \setminus \{0\}\,.$$

Lorsque X est compacte, on sait que le spectre du laplacien est discret. Dans ce cas, λ_1 est bien une valeur propre de Δ.

Lorsque (X,g) est de volume total fini, 0 est une valeur propre simple (correspondant à des fonctions constantes). Dans ce cas, λ_1 est aussi donné par un infimum de quotient de Rayleigh :

$$\lambda_1(X) = \inf_f \frac{\|\operatorname{grad} f\|^2}{\|f\|^2}.$$

Ici l'infimum porte sur l'ensemble des fonctions f non nulles de classe $\mathcal{C}^\infty$ de support compact et de moyenne nulle. Autrement dit, λ_1 est la meilleur constante c qui rend l'inégalité suivante de Poincaré vraie : pour toute fonction f sur X non nulle de classe $\mathcal{C}^\infty$ de support compact et de moyenne nulle, on a

$$\|f\|^2 \leq \frac{1}{c}\|\operatorname{grad} f\|^2.$$

Dans la suite, on s'intéresse surtout à des surfaces hyperboliques et à des 3-variétés hyperboliques. On note $\mathbb{H}^2$ le plan hyperbolique et $\mathbb{H}^3$ l'espace hyperbolique. Un groupe fuchsien (resp. kleinien) est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (resp. de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$). Un 2-orbifold (resp. 3-orbifold) hyperbolique est $\mathbb{H}^2$ (resp. $\mathbb{H}^3$) quotienté par un groupe fuchsien (resp. kleinien). C'est une variété si le groupe est sans torsion.

Avec le modèle du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2 = \{z = x+iy \mid y > 0\}$, le laplacien s'exprime par

$$\Delta = -y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2).$$

De manière similaire, dans le modèle du demi-espace de Poincaré $\mathbb{H}^3 = \big\{(x_1,x_2,y) \in \mathbb{R}^3 \mid y > 0\big\}$,

$$\Delta = -y^2(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_y^2) + y\partial_y.$$

Comme le laplacien est invariant par tout isométrie, il descend en un opérateur sur un quotient (e.g. 2-orbifold ou 3-orbifold hyperbolique). on vérifie facilement que cet opérateur est le laplacien sur ce quotient.

1.2 Cas des groupes discrets

Dans cet exposé, les graphes sont non-orientés et peuvent avoir des boucles ou arêtes multiples. Soit $\mathcal{G} = (V,E)$ un graphe fini. On note $l^2(\mathcal{G})$ l'espace vectoriel des fonctions sur l'ensemble des sommets V à valeurs complexes muni du produit hermitien habituel. La formule de Green définit alors un opérateur auto-adjoint positif Δ qu'on appelle **laplacien** : pour tout $f \in l^2(\mathcal{G})$,

$$\langle \Delta f, f \rangle = \sum_{(x,y)\in E} |f(x) - f(y)|^2,$$

où dans la somme, (x, y) parcourt l'ensemble des arêtes avec multiplicité. On peut aussi définir le laplacien comme

$$\Delta f(x) = \sum_{y\sim x} (f(x) - f(y)), \qquad f \in l^2(\mathcal{G}).$$

Dans la somme y parcourt les sommets voisins de x, et la multiplicité du terme en y est égale à la multiplicité de l'arête (x, y).

La dimension de l'espace $l^2(\mathcal{G})$ étant finie, le spectre de Δ est discret. Si le graphe est connexe alors 0 est une valeur propre simple. On range les valeurs propres de Δ dans l'ordre croissant :

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}.$$

C'est ainsi qu'on définit $\lambda_1(\mathcal{G}) = \lambda_1$.

Tout comme le cas des variétés de volume fini, $\lambda_1(\mathcal{G})$ est aussi un infimum de quotient de Rayleigh,

$$\lambda_1(\mathcal{G}) = \inf \frac{\langle \Delta f, f \rangle}{\|f\|^2},$$

avec l'infimum portant sur les fonctions $f \in l^2(\mathcal{G})$ non nulle de moyenne nulle.

On va s'intéresser à des graphes de Cayley ou de Schreier. Rappelons la définition d'un graphe de Schreier. Soit X un ensemble muni d'une action d'un groupe G. Soit S une partie finie symétrique de G, le graphe de Schreier $\mathrm{Sch}(X, S)$ a comme ensemble de sommets X. Pour chaque paire de sommets $(x, y) \in X^2$, x est lié à y avec une multiplicité égale au nombre de $s \in S$ tel que $s.x = y$. C'est donc un graphe $|S|$-régulier (i.e. chaque sommet est incident à $|S|$ arêtes). Un graphe de Cayley est un graphe de Schreier associé à l'action de G sur G lui-même par multiplication à gauche (ou à droite). Un graphe de Cayley-Schreier est un graphe de Schreier associé à l'action de G sur l'ensemble des classes à gauche (ou à droite) d'un sous-groupe H.

2 Signification géométrique du λ_1

On a défini $\lambda_1(X)$ comme la meilleure constante pour que l'inégalité de Poincaré soit vraie sur X. Cette constante reflète la géométrie de X.

2.1 Cas des variétés riemanniennes

Soit (X, g) une variété riemannienne de volume total fini. Notons vol_{n-1} le $(n-1)$-volume associé à la métrique riemannienne. La **constante isopérimétrique de Cheeger** ou **constante de Cheeger** de (X, g) est

$$h(X) = \inf_A \frac{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial A)}{\mathrm{vol}(A)},$$

où A parcourt les ouverts relativement compacts de X à bord $\mathcal{C}^1$ par morceaux tels que $\mathrm{vol}(A) \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{vol}(X)$.

Par exemple, l'existence d'une petite géodésique qui sépare X en deux parts à peu près égales implique une petite $h(X)$ (voir la figure 1).

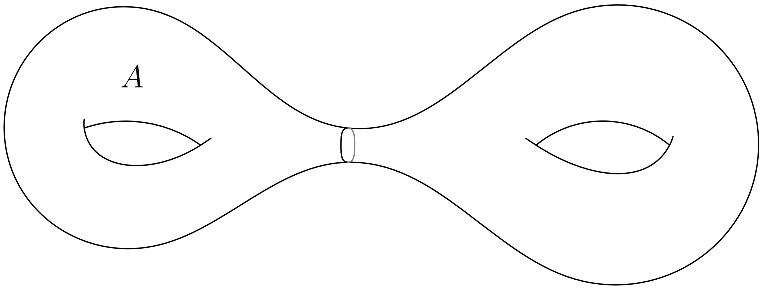

FIGURE 1 – Exemple de surface avec une petite constante de Cheeger

Les deux propositions suivantes montrent que la constante de Cheeger est proche de 0 si λ_1 est proche de 0 et que la réciproque est aussi vraie sous une condition de courbure.

Proposition 1 (Inégalité de Cheeger [14]). *Pour toute variété riemannienne complète de volume fini (X, g), on a*

$$\lambda_1(X) \geq \frac{h(X)^2}{4}.$$

Proposition 2 (Inégalité de Cheeger-Buser [13]). *Soit $\delta > 0$. Soit (X, g) une variété riemannienne complète de volume fini de dimension d. Supposons que la courbure de Ricci de (X, g) est supérieure à $-\delta^2(d-1)g$. Il existe $c = c(d)$ une constante ne dépendant que de la dimension telle que*

$$\lambda_1(X) \leq c(\delta h(X) + h(X)^2).$$

Ici, la courbure de Ricci intervient lorsque qu'on cherche à estimer le volume d'un épaississement d'une courbe. On a ainsi cette condition sur la courbure en plus pour la réciproque de l'inégalité de Cheeger. Heureusement, elle est souvent respectée, e.g. avec $\delta = 1$ pour les variétés hyperboliques ou les produits cartésiens de variétés hyperboliques.

2.2 Cas des groupes discrets

La **constante de Cheeger** ou **constante d'expansion** d'un graphe $\mathcal{G} = (V, E)$ est

$$h(\mathcal{G}) = \inf_{|A| \leq |V|/2} \frac{|E(A, V \setminus A)|}{|A|},$$

où $E(A, V \setminus A)$ désigne le nombre (compté avec multiplicité) d'arêtes reliant un élément de A à un élément de son complémentaire et l'infimum est pris sur les parties A de V vérifiant $|A| \leq |V|/2$.

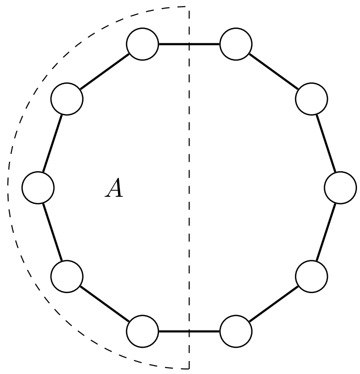

FIGURE 2 – Constante de Cheeger d'un graphe cyclique

Par exemple, soit $\mathcal{G}_n$ est le graphe cyclique d'ordre n, i.e. le graphe de Cayley de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par rapport au système de générateurs $\{-1, 1\}$, alors

$$h(\mathcal{G}_n) = \frac{2}{\lfloor n/2 \rfloor} \sim \frac{4}{n}.$$

Remarquons aussi que [1]

$$\lambda_1(\mathcal{G}_n) = 2\big(1 - \cos\frac{2\pi}{n}\big) \sim \frac{2\pi^2}{n^2}.$$

Les inégalités suivantes sont les analogues discrets des inégalités de Cheeger-Buser.

Proposition 3 (Tanner [23] et Alon et Milman [2])**.** *Pour tout graphe fini $\mathcal{G} = (V, E)$, on a*

$$\lambda_1(\mathcal{G}) \leq 2h(\mathcal{G}).$$

Proposition 4 (Dodziuk [15] et Alon [1])**.** *Pour tout graphe k-régulier fini $\mathcal{G} = (V, E)$, on a*

$$\lambda_1(\mathcal{G}) \geq \frac{h(\mathcal{G})^2}{4k}.$$

Donc, dans ce cas aussi, λ_1 est proche de 0 si et seulement si la constante de Cheeger est proche de 0. On dit que $\mathcal{G}$ est un graphe **expanseur** si $h(\mathcal{G})$ est grand. D'être un expanseur entraîne immédiatement beaucoup de propriétés intéressantes. Par exemple, un expanseur a un petit diamètre et en même temps un grand nombre chromatique. Cette classe de graphe a de grande importance en informatique (voir [18] pour un panorama sur les graphes expanseurs).

3 Principe de Burger-Brooks

Le principe de Burger-Brooks dit de manière heuristique que si une variété « ressemble » à un graphe, alors le λ_1 de la variété est proche de 0 si et seulement celui du graphe l'est aussi.

1. Une fonction propre est $x \mapsto e^{2\pi i x/n}$.

Plus précisément, la situation est la suivante. Soit (X, g) une variété riemannienne de volume fini. Soient $p_i \colon X_i \to X$ des revêtements riemanniens finis et galoisiens. Notons $G_i = \mathrm{Gal}(p_i)$ les groupes de revêtements. Rappelons que ce sont des quotients finis du groupe fondamental $\pi_1(X)$ de X. Supposons que $\pi_1(X)$ est de type fini et que $S \subset \pi_1(X)$ est une partie génératrice symétrique finie.

L'idée est de comparer la variété X_i avec le graphe de Cayley-Schreier $\mathcal{G}_i = \mathrm{Sch}(G_i, S)$. On espère que l'assertion suivante est vraie

$$\exists c > 0, \forall i,\ \lambda_1(\mathcal{G}_i) \geq c \quad \text{si et seulement si} \quad \exists \tilde{c} > 0, \forall i,\ \lambda_1(X_i) \geq \tilde{c}. \tag{1}$$

Burger [12] et Brooks [11] ont démontré (1) lorsque la base X est compacte. Dans ce cas, on a en fait une dépendance linéaire entre $\lambda_1(\mathcal{G}_i)$ et $\lambda_1(X_i)$ ([9]). Si X n'est pas compacte mais une surface hyperbolique d'aire finie, (1) est encore vraie ([16]). Il est probable que la méthode utilisée dans ([16]) montre également (1) dans le cas où X est une 3-variété hyperbolique de volume fini.

Disons quelques mots sur la démonstration. D'abord, on peut choisir la partie génératrice S. En fait, la première moitié de la phrase (1) est équivalente à ce que $\pi_1(X)$ possède la propriété (τ) [2] par rapport à la famille des sous-groupes distingués $(\pi_1(X_i))_i$ et cela ne dépend pas du choix de S. On peut donc choisir une partie génératrice « géométrique ». On prend $F \subset \tilde{X}$ un domaine de Dirichlet. L'ensemble $S = \{\gamma \in \pi_1(X) \mid F \cap \gamma F \neq \varnothing\}$ est alors une partie génératrice. Le pavage de $\tilde{X}$ par F descend en un pavage sur chaque revêtement X_i. Le graphe $\mathrm{Sch}(G_i, S)$ est exactement le squelette du pavage de X_i : deux pavés ont une intersection non vide si et seulement si leurs sommets correspondants dans le graphe sont reliés par une arête. Pour toute fonction sur X_i, on fait sa moyenne sur chaque pavé pour obtenir une fonction sur $\mathcal{G}_i$. Et réciproquement, pour toute fonction sur $\mathcal{G}_i$ on peut la lisser pour obtenir une fonction sur X_i. Et on peut espérer que les quotients de Rayleigh sont de même ordre.

4 Minoration du λ_1

On voudrait montrer que le λ_1 de certaines variétés ou de certains groupes n'est pas très petit. Par exemple on cherche souvent une borne uniforme pour une famille de variétés ou de groupes.

4.1 Cas des variétés riemanniennes

On s'intéresse dans un premier temps aux surfaces hyperboliques. D'abord on remarque que λ_1 d'une surface hyperbolique peut être aussi petit que l'on veut. En fait, à l'aide de l'inégalité de Cheeger-Buser, il n'est pas difficile de déduit du principe de Burger-Brooks (ou tout simplement de l'inégalité de Cheeger-Buser, voir figure 3) que, pour une surface compacte X fixée, il existe une infinité de revêtements cycliques $X' \to X$ de X vérifiant $\lambda_1(X') \ll \frac{1}{\mathrm{vol}(X')}$.

Mais si on considère des groupes fuchsiens qui ont des natures arithmétiques, leurs λ_1 sont alors bornés inférieurement. Par exemple, le célèbre théorème 3/16 de Selberg est le suivant. On note $\Gamma(n) \subseteq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ le sous-groupe

2. On dit qu'un groupe G possède la propriété (τ) par rapport à une famille de sous-groupes distingués (N_i) si, pour la topologie de Fell, la représentation triviale est un point isolé dans l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de G dont le noyau contient un des N_i.

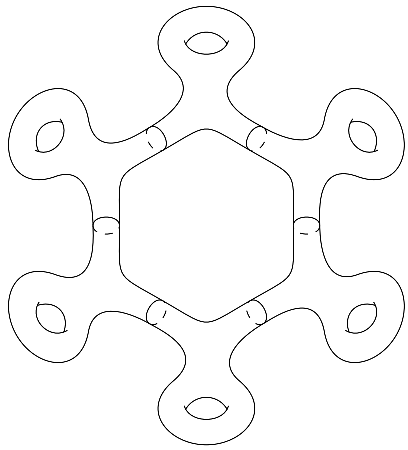

FIGURE 3 – Un revêtement cyclique de degré 6 d'une surface de genre 2

de congruence de niveau n, c'est-à-dire le noyau de la réduction modulo n : $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Les $\Gamma(n)$ sont des groupes fuchsiens de covolume fini.

Théorème 5 (Selberg [22]). *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\lambda_1(\Gamma(n)\backslash\mathbb{H}^2) \geq \frac{3}{16}. \tag{2}$$

Conjecture 6 (Selberg). *La borne optimale dans* (2) *devrait être* $1/4$.

La démonstration de Selberg fait appel à la théorie spectral d'une surface hyperbolique (voir [19, 3]). Il calcule le produit scalaire de deux séries de Poincaré. D'un côté on obtient la fonction zêta de Selberg-Kloosterman, et de l'autre on obtient une fonction méromorphe dont la convergence dépend du λ_1. Le problème est alors réduit à une estimation des sommes de Kloosterman, ce qui est donné par la borne de Weil.

En utilisant des méthodes similaires, Sarnak a montré un résultat similaire pour une famille de 3-variétés hyperboliques. Soit $K_D = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ l'extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$, avec $D \geq 1$ sans facteur carré. On note $\mathcal{O}_D$ l'anneau des entiers de K_D. Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_D) < \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est alors un groupe kleinien de covolume fini.

Théorème 7 (Sarnak [21]). *Pour tout $D \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré, on a*

$$\lambda_1(\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_D)\backslash\mathbb{H}^3) \geq \frac{3}{4}.$$

Il est remarquable que Sarnak a utilisé cette borne pour déduire un comportement asymptotique du nombre de classes d'équivalence de formes quadratiques binaires primitives à coefficients dans $\mathcal{O}_D$ de discriminant donné.

Sarnak a suggéré dans [21] qu'on peut faire la même chose pour un corps de nombres quelconque. Soient K un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers. On peut plonger $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_K)$ comme un réseau dans

$$\prod_{v\in\mathcal{P}_{K,\infty}} \mathrm{SL}(2,K_v) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^{r_1} \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^{r_2}$$

où $\mathcal{P}_{K,\infty}$ désigne l'ensemble des places archimédiennes de K et r_1 est le nombre de plongements de K dans $\mathbb{R}$ et $2r_2$ le nombre de plongements non réels de K dans $\mathbb{C}$.

Problème. Est-ce qu'on peut donner une borne inférieure uniforme pour

$$\lambda_1(\mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_K)\backslash(\mathbb{H}^2)^{r_1} \times (\mathbb{H}^3)^{r_2})?$$

Et si on remplace $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_K)$ par ses sous-groupes de congruence ?

4.2 Cas des groupes discrets

Par le théorème de Selberg et la correspondance de Burger-Brooks (cas des surfaces hyperboliques d'aire finie), on sait qu'on a expansion uniforme (minoration uniforme de λ_1) dans les groupes $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \Gamma(n)\backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$:

Théorème 8. *Soit S une partie génératrice symétrique finie de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\lambda_1(\mathrm{Sch}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), S)) > c.$$

Depuis 2008, une série de travaux a conduit à (une généralisation de) ce résultat par des méthodes totalement différentes. Tout a commencé par le théorème suivant. Rappelons que la systole d'un graphe est la longueur minimale d'un cycle simple.

Théorème 9 (Bourgain-Gamburd [5])**.** *Pour tout nombre premier p, soit S_p une partie génératrice symétrique finie de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$. *Supposons que la systole du graphe* $\mathrm{Cay}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p), S_p)$ *vérifie*

$$\inf_p \frac{\mathrm{syst}(\mathrm{Cay}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p), S_p))}{\log p} > 0.$$

Alors on a

$$\inf_p \lambda_1(\mathrm{Cay}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p), S_p)) > 0.$$

Problème. Est-ce que le théorème est aussi valable pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$ où q est une puissance d'un nombre premier ?

On déduit facilement de ce théorème le théorème 8 pour n parcourant seulement l'ensemble des nombres premiers. La preuve de Bourgain-Gamburd utilise beaucoup de combinatoire additive. L'idée essentielle est la suivante : λ_1 est grand si et seulement si la marche aléatoire s'équidistribue très vite. Si ce n'est pas le cas, alors (par un lemme de Balog-Szemerédi-Gowers) la marche aléatoire est coincée dans un sous-groupe approximatif [3]. Donc on a gagné si on montre que la marche n'est concentrée sur aucun sous-groupe approximatif. Et pour cela, on utilise une classification des sous-groupes approximatifs de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ due à Helfgott [17].

Un peu plus tard, Bourgain-Gamburd-Sarnak [6] ont obtenu le théorème 8 pour n parcourant les entiers sans facteur carré. Ensuite, une classification des

3. Une partie A est un sous-groupe K-approximatif si A est symétrique, contient l'élément neutre et vérifie $AA = \{ab \mid a, b \in A\} \subseteq AX$ pour certain X de cardinal $|X| \leq K$.

sous-groupes approximatifs dans un groupe fini simple de type Lie a été obtenue par Breuillard-Green-Tao [10] et indépendamment par Pyber-Szabó [20], généralisant le résultat de Helfgott [17]. Puis Varjú [24] a montré l'expansion dans $\mathrm{SL}(d, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$, q sans facteur carré. Et enfin, en 2010, Bourgain-Varjú [7] ont démontré le théorème 8 en utilisant la machinerie de Bourgain-Gamburd. En fait, leur résultat est plus fort.

Théorème 10 (Bourgain-Varjú [7])**.** *Soit S une partie symétrique finie de $\mathrm{SL}(d, \mathbb{Z})$ engendrant G un sous-groupe Zariski dense. Notons $G(n)$ l'image de G par la réduction modulo n. Il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\lambda_1(\mathrm{Sch}(G(n), S)) > c.$$

De plus, il existe n_0 tel que si $n \wedge n_0 = 1$ alors $G(n) = \mathrm{SL}(d, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Le nouvel ingrédient principal dans leur démonstration est un résultat profond de Bourgain-Furman-Lindenstrauss-Mozes [4] en dynamique homogène traitant la vitesse de l'équidistribution d'un système dynamique sur un tore.

Mentionnons enfin un résultat très récent concernant les graphes de Cayley aléatoires.

Théorème 11 (Breuillard-Green-Guralnick-Tao [8])**.** *Soit G un groupe fini simple de type Lie. Soient $a, b \in G$ choisis aléatoirement uniformément parmi les éléments de G. Alors, avec probabilité au moins $1 - C|G|^{-\delta}$, on a*

$$\lambda_1(\mathrm{Cay}(G, \{a, b\})) > c.$$

Ici, $c, C, \delta > 0$ sont des constantes ne dépendant que du rang de G.

Remerciement. Je remercie mon directeur de thèse Emmanuel Breuillard pour m'avoir présenté dans ce domaine de recherche et m'avoir communiqué des problèmes intéressants.

Références

[1] N. Alon : Eigenvalues and expanders. *Combinatorica*, 6(2):83–96, 1986. Theory of computing (Singer Island, Fla., 1984).

[2] N. Alon et V. D. Milman : λ_1, isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators. *J. Combin. Theory Ser. B*, 38(1):73–88, 1985.

[3] Nicolas Bergeron : *Le spectre des surfaces hyperboliques.* Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis, 2011.

[4] Jean Bourgain, Alex Furman, Elon Lindenstrauss et Shahar Mozes : Stationary measures and equidistribution for orbits of nonabelian semigroups on the torus. *J. Amer. Math. Soc.*, 24(1):231–280, 2011.

[5] Jean Bourgain et Alex Gamburd : Uniform expansion bounds for Cayley graphs of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. *Ann. of Math. (2)*, 167(2):625–642, 2008.

[6] Jean Bourgain, Alex Gamburd et Peter Sarnak : Affine linear sieve, expanders, and sum-product. *Invent. Math.*, 179(3):559–644, 2010.

[7] Jean Bourgain et Péter P. Varjú : Expansion in $SL_d(\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})$, q arbitrary. *Invent. Math.*, 188(1):151–173, 2012.

[8] E. Breuillard, B. Green, R. Guralnick et T. Tao : Expansion in finite simple groups of Lie type. *ArXiv e-prints*, septembre 2013.

[9] Emmanuel Breuillard : Pcmi lecture notes. Graduate Summer School, PCMI 2012.

[10] Emmanuel Breuillard, Ben Green et Terence Tao : Approximate subgroups of linear groups. *Geom. Funct. Anal.*, 21(4):774–819, 2011.

[11] Robert Brooks : The spectral geometry of a tower of coverings. *J. Differential Geom.*, 23(1):97–107, 1986.

[12] Marc Burger : *Petites valeurs propres du Laplacien et Topologie de Fell.* Thèse de doctorat, Lausanne, 1986.

[13] Peter Buser : A note on the isoperimetric constant. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 15(2):213–230, 1982.

[14] Jeff Cheeger : A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. **In** *Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969)*, pages 195–199. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.

[15] Jozef Dodziuk : Difference equations, isoperimetric inequality and transience of certain random walks. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 284(2):787–794, 1984.

[16] Jordan S. Ellenberg, Chris Hall et Emmanuel Kowalski : Expander graphs, gonality, and variation of Galois representations. *Duke Math. J.*, 161(7):1233–1275, 2012.

[17] H. A. Helfgott : Growth and generation in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. *Ann. of Math. (2)*, 167(2):601–623, 2008.

[18] Shlomo Hoory, Nathan Linial et Avi Wigderson : Expander graphs and their applications. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 43(4):439–561 (electronic), 2006.

[19] Henryk Iwaniec : *Introduction to the spectral theory of automorphic forms.* Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana. [Library of the Revista Matemática Iberoamericana]. Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 1995.

[20] L. Pyber et E. Szabó : Growth in finite simple groups of Lie type. *ArXiv e-prints*, janvier 2010.

[21] Peter. Sarnak : The arithmetic and geometry of some hyperbolic three-manifolds. *Acta Math.*, 151(3-4):253–295, 1983.

[22] Atle Selberg : On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. **In** *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VIII*, pages 1–15. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965.

[23] R. Michael Tanner : Explicit concentrators from generalized N-gons. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 5(3):287–293, 1984.

[24] Péter P. Varjú : Expansion in $SL_d(\mathcal{O}_K/I)$, I square-free. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 14(1):273–305, 2012.