IDR: Universalité des beta ensembles

Menglin Wang

Sous la direction de Michel Ledoux

Table des matières

1 Introduction

L'étude théorique des matrices aléatoires s'est développée profondément après son application par le physicien John Wigner en mécanique quantique dans les années cinquantes.

La motivation originelle de Wigner était d'expliquer la répartition des niveaux d'énergie dans les noyaux atomiques qui sont liés à des spectres d'opérateurs hermitiens. L'idée de Wigner a consisté à s'inspirer de la physique statistique de Boltzman Gibbs, ce qui conduit à rendre ces opérateurs aléatoires, en utilisant par exemple des lois gaussiennes. La distribution des écarts entre les valeurs propres des matrices hermitiennes aléatoires obtenues de la sorte(GUE) coïncide assez bien avec le phénomène observé.

Depuis lors, beaucoup de résultats sur les propriétés statistiques des valeurs propres ont été connus pour les ensembles gaussiens classiques(GOE/GUE/GSE). On espère que ces statistiques restent valides pour les modèles plus généraux, même les modèles n'ayant pas de représentation maticielle derrière. C'est ce que Pourgade, Erdös et Yau font dans l'article [1] pour les β ensembles.

2 Espaces modèles des matrices aléatoires

Les modèles originaux utilisés dans la physique sont les Gaussien ensembles classiques, identifiés par Dyson par les groupes sur lesquels qu'ils sont invariants : GOE/GUE/GSE. Ils consiste respectivement des matrices $X = (X_{i,j})_{N\times N}$ dans les espaces des matrices réelles symmétriques/complexes hermitiennes/quaternioniques self-duals de taille $N(\mathcal{M}_{symm}/\mathcal{M}_{herm}/\mathcal{M}_{sdual})$ telles que les coefficients sont indépendnts sous condition de symmetrie et que $X_{i,j}$ suit une loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ si $i < j$ et $\mathcal{N}(0, 1)$ si $i = j$. De manière équivalente, les matrices dans ces trois ensembles peuvent être vus comme variables aléatoires à valeurs dans les espaces euclidiens $\mathcal{M}_{symm}/\mathcal{M}_{herm}/\mathcal{M}_{sdual}$ suivant la loi exponentielle $\exp(-\frac{\beta}{2}\mathtt{Tr}(X^2/2))\frac{dX}{Z}$ avec $\beta = 1, 2, 4$ et Z une constante de normalisation.

Ces modèles peuvent être généralisés vers deux familles de matrices aléatoires selon les deux interpritations ci-dessus. D'une part, en remplaçant la loi gaussienne par une loi plus générale pour les coefficients, on obtient les matrices de Wigner. D'autre part, en remplaçant le potentiel $X^2/2$ dans la densité par un potentiel $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ plus général, on obtient les matrices invariantes. Notons que l'intersection de ces deux familles est exactement les ensembles gaussiens classiques.

Le nom des matrices invariantes vient du fait que $\mathrm{Tr}V(X)$ et dX sont invariants par conjugaison par le groupe orthogonal/unitaire/simplectique pour X dans GOE/GUE/GSE respectivement. Cette propriété d'invariance permet de décrire alors la loi jointe des valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$ de $X = (X_{i,j})_{N\times N}$ comme ayant pour densité

$$\Pi_{i<j}|\lambda_i - \lambda_j|^\beta \Pi_{i=1}^N e^{-\frac{\beta}{2}(\lambda_i)}\frac{d\lambda}{Z} \tag{$*$}$$

sur le simplexe $\{\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N\}$, où $\beta = 1, 2, 4$ correspondent au cas où X est dans GOE, GUE ou GSE respectivement.

Pour $\beta \neq 1, 2, 4$, on peut toujours considérer cette densité et étudier les propriétés des 'particules' $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$ sous cette mesure $(*)$.

Pour V et β général, il n'existe plus des représentations matricielles simples. Néanmoins, il existe dans certains cas des modèles de matrices pour les V et β particulières. Par exemple, si $V = \frac{x^2}{2}$, on a la représentation par les matrices tridiagonales pout tout β.

Théorème 1. *Les matrices de la forme*

$$H_\beta \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N(0,2) & \chi_{(n-1)\beta} & & & \\ \chi_{(n-1)\beta} & N(0,2) & \chi_{(n-2)\beta} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \chi_{2\beta} & & \chi_\beta \\ & & & \chi_\beta & N(0,2) \end{pmatrix}$$

ont comme loi jointe des valeurs propres la fonction suivante

$$f_\beta(\lambda) = c_H^\beta \Pi_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta e^{-\frac{1}{2}\sum_i \lambda_i^2},$$

où $c_H^\beta = (2\pi)^{-n/2} \Pi_{j=1}^n \frac{\Gamma(1+\frac{\beta}{2})}{\Gamma(1+\frac{\beta}{2}j)}$, *pour* $\beta > 0$.

Dans la suite, notre objet d'étude sera les modèles des β ensembles $\mu_{\beta,V}$ définis comme les mesures

$$\Pi_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta \Pi_{i=1}^N e^{-N\frac{\beta}{2}V(\lambda_i)} \frac{d\lambda}{Z}$$

sur $\{\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N\}$ Nous allons encore appeler les particles $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$ dans la suite des valeurs propres d'un β ensemble et nous nous interesserons à leur comportements asymptotiques quand $N \to \infty$.

3 L'universalité des β ensembles

3.1 Comportement global

Rappelons le théorème central limite.

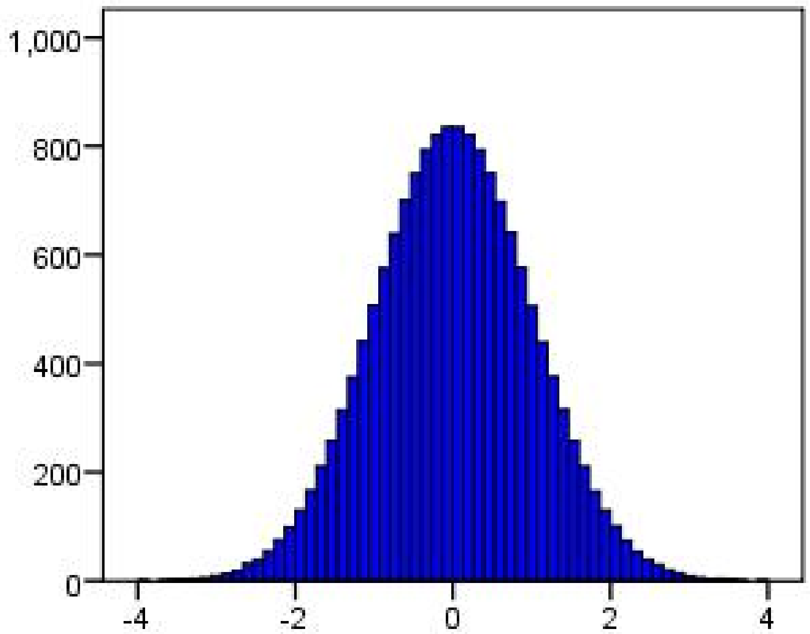
Théorème 2. *Soit* $X_n (n \geq 1)$ *une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité, indépendantes et identiquement distribuées suivant la même loi* μ. *Supposons que l'espérance* m *et l'écart-type* σ *de* μ *existent et soient finis avec* $\sigma \neq 0$. *Alors la suite*

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{X_k - m}{\sigma}$$

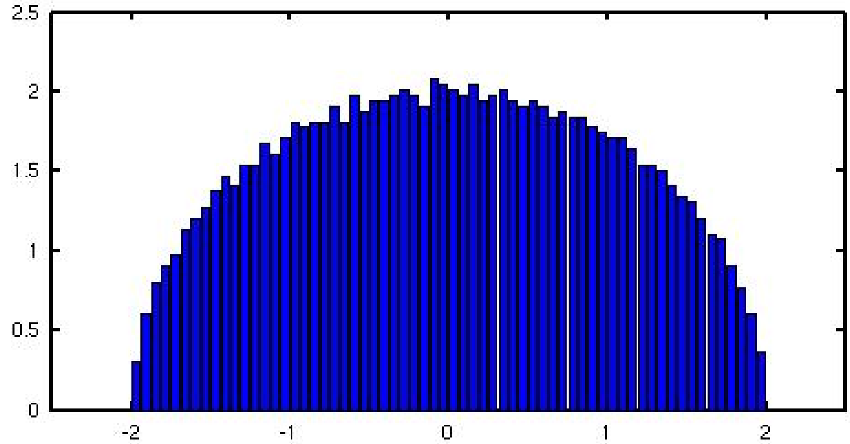
converge en loi vers une variable aléatoire Z *de loi normale centrée réduite* $\mathcal{N}(0,1)$ *lorsque* n *tend vers l'infini.*

Pour les matrices de Wigner, et particulièrement les matrices aléatoires dans GOE/GUE/GSE, on a une version matricielle de la théorème central limite.

Théorème 3. *Soit* $M_N (N \geq 1)$ *une suite de matrices aléatoires de taille* $N \times N$ *à coefficients complexes. On suppose que les matrices* $\sqrt{N} M_N$ *sont presque sûrement auto-adjointes. On fait l'hypothèse que les coefficients de* $\sqrt{N} M_N$ *sont*



Loi Normale



Loi semi-circulaire de Wigner

independants (modulo le caractère auto-adjoint), centrés et de variance 1, avec tous leurs moments finis et bornés uniformément en ordre et en N. Alors en moyenne la distribution empirique des valeurs propres (on parle aussi de mesure spectrale)

$$\mu_N := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{\lambda_k}$$

converge faiblement vers la loi semi-circulaire σ_{sc} de densité

$$\sigma_{\mathrm{sc}}(dx) = \rho_{\mathrm{sc}}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\mathbb{1}_{|x|\leq 2}dx.$$

Pour les β-ensembles généraux, on a aussi la convergence de la mesure spectrale, et la densité d'équilibre ρ va dependre de V.

Théorème 4. *Soit $\mu_N := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{\lambda_k}$ où les variables aléatoires $\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$ sont distribuées sous la loi du β ensemble $\mu_{\beta,V}^{(N)}$ avec le potentiel V strictement convexe : $\inf_{x\in\mathbb{R}} V"(x) > 0$. Alors, la famille des mesures aléatoires μ_N satisfait un principe de grande deviation avec velocity N^2 et une bonne fonction de ratio $\mathcal{I}_V$, où*

$$\mathcal{I}_V(\nu) = \int V(t)d\nu(t) + \int\int \log|s-t|d\nu(s)d\nu(t),$$

avec ν dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. C'est à dire :
(a)$\mathcal{I}_V : \mathcal{M}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ possède de ensemble de niveau compact $\{v : \mathcal{I}_V(v) \leq M\}$ pour tout $M \in \mathbb{R}_+$
(b)Pour tous les ensembles ouverts $O \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^2}\log\mu_{\beta,V}^{(N)}(\mu_N \in O) \geq -\inf_{O}\mathcal{I}_V,$$

(c)Pour tous les ensembles fermés $F \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N^2}\log\mu_{\beta,V}^{(N)}(\mu_N \in F) \leq -\inf_{F}\mathcal{I}_V,$$

Pour le fonctionnelle $\mathcal{I}_V$, on a

Lemme 1. *$\mathcal{I}_V$ attend son minimum en unique $\sigma = \rho(x)dx$, où ρ est une fonction continue avec les propriétés suivants :*
(a) Le support de ρ est un seul interval $[A,B]$.
(b) Pour tout $t \in [A,B]$, $\rho(x)dx = \frac{1}{\pi}r(x)\sqrt{(x-A)(B-x)}\mathbb{1}_{[A,B]}dx$, où r peut être prolongé en une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ satisfaisant

$$r(z) = \frac{1}{2\pi}\int_A^B \frac{V'(z)-V'(x)}{z-x}\frac{dx}{\sqrt{(x-A)(B-x)}}.$$

Corollaire 1. *Sous $\mu_{\beta,V}^{(N)}$, μ_N converge presque sûrement vers $\rho(x)dx$.*

3.2 Comportement local

Pour les beta ensembles gaussiens, on a les propriétés locales suivantes. Dans le bulk, on a une estimation d'espacement $\lambda_{i+1}-\lambda_i$ à échelle $\frac{1}{N}$. Et au bord, on a la convergence de $N^{2/3}(\lambda_N - 2)$ vers une loi de Tracy-Widom liée à la fonction d'Airy et à une équation de Painlevé de type II. Nous renvoyons à [7].

Ces propriétés locales ont été démontré comme universelle pour beaucoup de matrices de Wigner et matrices invariantes. Dans l'article [1], Bourgade-Erdös-Yau ont montré l'universalité pour les valeurs propres dans le bulk pour les beta ensembles généraux par comparaison avec le modèle gaussien.

Théorème 5. *Soient $\beta > 0$ et V une fonction réelle analytique quelconque telle que $\inf_{x\in\mathbb{R}} V"(x) > 0$, considérons le β ensemble $\mu = \mu_{\beta,V}$. Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse à support compact. Soit $E \in (A, B)$ un point dans l'intérieur du support de ρ, et pareillement $E' \in (-2, 2)$ dans l'intérieur du support de ρ_{sc}. Definissons L et L' par*

$$\frac{L}{N} = \int_A^E \rho(x)dx, \quad \frac{L'}{N} = \int_{-2}^{E'} \rho_{sc}(x)dx.$$

Fixons un paramètre $K = N^k$, où $0 < k \leq \frac{1}{2}$ est une constante quelconque. Soient I et I' deux intervalles d'entiers, $I = [L+1, L+K]$, $I' = [L'+1, L'+K]$, de longeur K. Alors

$$\lim_{N\to\infty} |\mathbb{E}_\mu \frac{1}{K} \sum_{i\in I} G(N\rho(E)[\lambda_i - \lambda_i + 1]) - \mathbb{E}_{\text{Gauss}} \frac{1}{K} \sum_{i\in I'} G(N\rho_{sc}(E')[\lambda_i - \lambda_i + 1])| = 0.$$

c'est à dire que l'écart des particles approximativement normalisé de la mesure $\mu_{\beta,V}$ au niveau E dans le bulk de la densité limite coïncide asymptotiquement avec celui dans le cas Gaussien, et de plus il est indépendant de la valeur de E dans le bulk. En particulier, la distribution des écarts est universelle.

4 Ingrédient important : l'estimation de rigidité des valeurs propres des β ensembles

4.1 Enoncé du théorème

Soient $\beta > 0$ et V une fonction réelle analytique telle que $\inf_{x\in\mathbb{R}} V"(x) > 0$, considérons le β ensemble $\mu = \mu_{\beta,V}$. Soit $\rho(x)dx$ la mesure d'équilibre pour le potentiel V. On définit la position classique $\gamma_k = \gamma_k^{(N)}$ de la valeur propre par la formule

$$\int_{-\infty}^{\gamma_k} \rho(x)\ dx = \frac{k}{N}.$$

Alors la convergence de la mesure empirique spectrale nous dit que les valeurs propres λ_k doivent rester proches de leur positions classiques γ_k : $\lambda_k = \gamma_k + o(1)$ pour tout $1 \leq k \leq N$ où $o(1)$ est un terme d'erreur qui tends ves 0 quand $N \to \infty$.

Pour les valeurs propres dans le bulk, i.e. les valeurs propres λ_k, $k \in [\![\alpha N, (1-\alpha)N]\!]$, $\alpha \in (0, 1)$, on va donner une estimation de rigidité pour le terme d'erreur qui est cruciale pour montrer l'universalité. Explicitement, on va montrer que les valeurs propres doivent rester proches de leur positions classiques à une échelle N^{-1} au sens suivant.

Théorème 6. *Pour tous $\alpha > 0$ et $\epsilon > 0$, il existe des constantes $\delta, c_1, c_2 > 0$ telles que pour tous $N \geq 1$ et $k \in [\![\alpha N, (1-\alpha)N]\!]$*

$$\mathbb{P}_{\mu^{(N)}}(|\lambda_k - \gamma_k| > N^{-1+\epsilon}) \leq c_1 exp(-c_2 N^{\delta}).$$

4.2 Preuve du théorème

La preuve est faite par induction. On établi d'abord la distance à échelle $N^{-\frac{1}{2}}$.

4.2.1 Resultat classique : échelle $N^{-\frac{1}{2}}$

Proposition 1. *Pour tous $\alpha > 0$ et $\epsilon > 0$, il existe des constantes $\delta, c_1, c_2 > 0$ telles que pour tous $N \geq 1$ et $k \in [\![\alpha N, (1-\alpha)N]\!]$,*

$$\mathbb{P}_{\mu^{(N)}}(|\lambda_k - \gamma_k| > N^{-\frac{1}{2}+\epsilon}) \leq c_1 exp(-c_2 N^{\delta}).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire

$$|\gamma_k - \lambda_k| \leq |\lambda_k - \mathbb{E}(\lambda_k)| + |\gamma_k^{(N)} - \gamma_k| + |\gamma_k^{(N)} - \mathbb{E}(\lambda_k)|, \qquad (**)$$

il suffit de montrer la même estimation pour les trois termes à droite respectivement.

(A)Concentration : entre λ_k et $\mathbb{E}(\lambda_k)$

Pour tout $v \in \mathbb{R}^N$, on a

$$v^*(\nabla^2 \beta \mathcal{H})v = \frac{\beta}{N} \sum_{i<j} \frac{(v_i - v_j)^2}{(\lambda_i - \lambda_j)^2} + \frac{\beta}{2} \sum_i V"(\lambda_i) v_i^2 \geq \bar{\omega} |v|^2.$$

D'après le critère de convexité de Bakry-Émery, $\mu^{(N)}$ satisfait l'inégalité logarithmique de Sobolev avec la constante $1/(\bar{\omega}N)$, i.e. pour toute fonction lisse f dans $L^2(d\mu)$,

$$\int f^2 log \frac{f^2}{\int f^2 d\mu} d\mu \leq \frac{2}{\bar{\omega}N} \int |\nabla f|^2 d\mu.$$

Ensuite l'argument de Herbst implique que la concentration est valide à une échelle $N^{-\frac{1}{2}}$, i.e . il existe une constante $\tilde{c} > 0$ telle que, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$,

$$\mathbb{P}_{\mu}(|\lambda_k - \mathbb{E}_{\mu}(\lambda_k)| > x) \leq 2e^{-\tilde{c}Nx^2}.$$

(B)Précision : entre $\gamma_k^{(N)}$ et γ_k

On introduit quelques notations.

- $m_N(z) = \mathbb{E}_{\mu}(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{z-\lambda_k}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} \rho_1^{(N)}(t) dt$ pour z avec $Im(z) > 0$, $m(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-t} \rho(t) dt$. On sait que dans tout région $\{Im(z) > \epsilon\}, \epsilon > 0, |m_N - m| \to 0$.
- $s(z) = -2r(z)\sqrt{(A-z)(B-z)}$, où la racine carrée est définie par
$$f(z) = \sqrt{(A-z)(B-z)} \sim z \quad \text{as } z \to \infty.$$
- b_N est une fonction analytique definie par
$$b_N(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{V'(z) - V'(t)}{z-t} (\rho_1^{(N)} - \rho)(t) dt;$$

— et $c_N(z) = \frac{1}{N^2}k_N(z) + \frac{1}{N}(\frac{2}{\beta} - 1)m'_N(z)$, où

$$k_N(z) = \mathrm{var}_\mu(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{z-\lambda_k}) = \mathbb{E}_\mu((\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{z-\lambda_k})^2) - (\mathbb{E}_\mu(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{z-\lambda_k})^2$$

Par des calculs élémentaires, on peut contrôler la fluctuation de la transformée de Stieltjes.

Lemme 2. *Soit $\delta \geq 0$. Pour $z = E + i\eta$ avec $A + \delta < E < B - \delta$, supposons que*

$$\frac{1}{N^2}k_N(z) \to 0$$

lorsque $N \to \infty$ uniformément en $\eta \geq N^{-1+a}$ pour un $0 < a < 1$. Alors il existe des constantes $c, \epsilon > 0$ telles que pour tous $N^{-1+a} \leq \eta \leq \epsilon$, $A + \delta < E < B - \delta$,

$$|m_N(z) - m(z)| \leq c(\frac{1}{N\eta} + \frac{1}{N^2}k_N(z)).$$

Le lemme suivant nous donne un type d'inverse de la transformée de Stieltjes et nous permet de passer du contrôle ci-dessus de la transformée de Stieltjes au contrôle de la distance entre les quantiles.

Lemme 3. *Soient $\delta < \frac{B-A}{2}$, $E \in [\![A+\delta, B-\delta]\!]$, et $0 < \eta < \delta/2$. Definissons une fonction $f = f_{E,\eta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1$ for $x \in (-\infty, E-\eta]\!]$, $f(x) = 0$ pour $x \in [\![E+\eta, \infty)$, et de plus $|f'(x)| \leq c\eta^{-1}$ et $|f''(x)| \leq c\eta^{-2}$, pour un constant c. Soit $\tilde{\rho}$ une mesure signée quelconque, et soit $S(z) = \int (z-x)^{-1}\tilde{\rho}(x)dx$ son transformée de Stieltjes. Supposons que, pour tout $x \in [\![A+\delta/2, B-\delta/2]\!]$,*

$$|S(x+iy)| \leq \frac{U}{Ny} \quad \text{pour} \quad \eta < y < 1 \quad \text{et}$$

$$|ImS(x+iy)| \leq \frac{U}{Ny} \quad \text{pour} \quad 0 < y < \eta$$

Supposons en plus que $\int_{\mathbb{R}} \tilde{\rho}(\lambda)d\lambda = 0$ et qu'il exsite une constante réelle $\mathcal{T}$ telle que

$$\int_{[-\mathcal{T},\mathcal{T}]^c} |\lambda\tilde{\rho}(\lambda)|d\lambda \leq \frac{U}{N}.$$

Alors pour une constante $C > 0$, independante de N et $E \in [\![A+\delta, B-\delta]\!]$, on a

$$|\int f_E(\lambda)\tilde{\rho}(\lambda)d\lambda| \leq \frac{CU|\log\eta|}{N}.$$

En combinant les deux lemmes ci-dessus, on a

Proposition 2. *Pour tout $\alpha > 0$ et pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$|\gamma_k^{(N)} - \gamma_k| = O(N^{-1/2+\epsilon})$$

uniformément en $k \in [\![\alpha N, (1-\alpha)N]\!]$, où $\gamma_k^{(N)}$ et γ_k sont définies par

$$\int_{-\infty}^{\gamma_k^{(N)}} \rho_1^{(N)}(x)dx = \frac{k}{N} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\gamma_k} \rho(x)dx = \frac{k}{N}$$

(C)Fluctuation : entre $\mathbb{E}(\lambda_k)$ et $\gamma_k^{(N)}$

La distance entre $\mathbb{E}(\lambda_k)$ et $\gamma_k^{(N)}$ est de même échelle avec la distance entre λ_k et $\mathbb{E}(\lambda_k)$ comme $\gamma_k^{(N)}$ est la k-ième valeur propre en moyenne.

4.2.2 Resultat amélioré : de l'échelle N^{-1+a} à l'échelle $N^{-1+3a/4}$

Le but de cette paragraphe est de montrer la proposition suivante : si l'on a la précision à échelle N^{-1+a}, alors on peut l'améliorer à échelle $N^{-1+3a/4}$.

Proposition 3. *Suppossons que pour un certain $a \in (0,1)$ on a la précision à échelle N^{-1+a} : pour tout $\alpha, \epsilon > 0$, il existe des constantes $\delta, c_1, c_2 > 0$ telles que, pour tous $N \geq 1$ et $k \in [\![\alpha N, (1-\alpha)N]\!]$,*

$$\mathbb{P}_\mu(|\lambda_k - \gamma_k| > N^{-1+a+\epsilon}) \leq c_1 exp(-c_2 N^\delta).$$

Alors on a la précision à échelle $N^{-1+3a/4}$: pour tout $\alpha, \epsilon > 0$, il existe des constantes $\delta, c_1, c_2 > 0$ telles que, pour tous $N \geq 1$ et $k \in [\![\alpha N, (1-\alpha)N]\!]$,

$$\mathbb{P}_\mu(|\lambda_k - \gamma_k| > N^{-1+3a/4+\epsilon}) \leq c_1 exp(-c_2 N^\delta).$$

La démonstration se fait encore en trois parties par l'inégalité triangulaire (**).

(A')Concentration : entre λ_k et $\mathbb{E}(\lambda_k)$

On utilise la transformée localement contrainte pour améliorer la convexité locale de la mesure μ dans la direction où les différences des locations des particles sont concernées. Fixons constantes $\alpha, \epsilon > 0$. Soit θ une fonction continue et non-negative avec $\theta = 0$ sur $[\![-1, 1]\!]$ et $\theta'' \geq 1$ pour $|x| > 1$. On peut prendre par exemple $\theta(x) = (x-1)^2 \mathbb{1}_{x>1} + (x+1)^2 \mathbb{1}_{x<-1}$ dans la suite. Soient $k \in [\![\alpha N, (1-\alpha)N]\!]$ et M un entier tel que $1 \leq M \leq \alpha N$, on note $I^{(k,M)} = [\![k-M, k+M]\!]$ et $i_M = |I^{(k,M)}| = 2M+1$. De plus, soit

$$\phi^{(k,M)} = \beta \sum_{i<j, i,j \in I^{(k,M)}} \theta\left(\frac{N^{1-\epsilon}(\lambda_i - \lambda_j)}{i_M}\right).$$

on definit la mesure de probabilité

$$d\omega^{(k,M)} = \frac{1}{Z} e^{-\phi^{(k,M)}} d\mu,$$

où $Z = Z_{\omega^{(k,M)}}$. On appelle la mesure $\omega^{(k,M)}$ la transformée locallement contrainte de μ autour de k de largeur M.

Lemme 4. *Considérons la mesure de probabilité*

$$\omega^{(k,M)} = \frac{1}{Z} e^{-\phi^{(k,M)}} d\mu = \frac{1}{\tilde{Z}} e^{-N(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2)} d\lambda,$$

où on note

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{N}\phi^{(k,M)} - \frac{\beta}{N} \sum_{i<j, i,j \in I^{(k,M)}} \log|\lambda_i - \lambda_j|,$$

$$\mathcal{H}_2 = -\frac{\beta}{N} \sum_{i<j, i,j \in J^{(k,M)}} \log|\lambda_i - \lambda_j| + \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N V(\lambda_i)$$

où $J^{(k,M)}$ est l'ensemble des paires de points $i < j$ dans $[\![1, N]\!]$ telles que i ou j n'est pas dans $I^{(k,M)}$, et $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1(\lambda_{k-M}, \ldots, \lambda_{k+M})$. Alors $\nabla^2 \mathcal{H}_2 \geq 0$ et pour $v = (v_i)_{i \in I^{(k,M)}}$, on a

$$v^\star (\nabla^2 \mathcal{H}_1) v \geq \frac{\beta}{2} \frac{N^{1-2\epsilon}}{i_M} \sum_{i,j \in I^{(k,M)}} (v_i - v_j)^2.$$

Avec la convexité plus fine, on a une inégalité logarithmique de Sobolev plus fine.

Lemme 5. *Decomposons les coordonnées* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ *d'un point dans* $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m}$ *as* $\lambda = (x, y)$*, où* $x \in \mathcal{R}^m, y \in \mathcal{R}^{N-m}$*. Soit* $\omega = \frac{1}{Z} e^{-N\mathcal{H}}$ *une mesure de probabilité sur* $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m}$ *telle que* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$*, avec* $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1(x)$ *dependant que de la variable* x *et* $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2(x, y)$ *dependant de toutes les coordonnées. Supposons que pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}^N$*,* $\nabla^2 \mathcal{H}_2(\lambda) \geq 0$*. Supposons de plus que* $\mathcal{H}_1$ *est indépendant de* $x_1 + \ldots + x_m$*, i.e.* $\sum_{i=1}^m \partial_i \mathcal{H}_1(x) = 0$ *et que pour tout* $v \in \mathbb{R}^m$*,*

$$v^\star \nabla^2 \mathcal{H}_1(x) v \geq \frac{\xi}{m} \sum_{i,j=1}^m (v_i - v_j)^2$$

avec un nombre positif $\xi > 0$*. Alors pour toute fonction de la forme* $f(\lambda) = F(\sum_{i=1}^m v_i x_i)$*, où* $\sum_{i=1}^m v_i = 0$ *et* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction lisse, on a*

$$\int f^2 \log f^2 d\omega - (\int f^2 d\omega) \log(\int f^2 d\omega) \leq \frac{1}{\xi N} \int |\nabla f|^2 d\omega.$$

Alors pour $\omega^{(k,M)}$ on a une concentration à une échelle prèsque N^{-1}.

Lemme 6. *Pour toute function* $f(\lambda_i, i \in I^{(k,M)}) = \sum_{I^{(k,M)}} v_i \lambda_i$ *avec* $\sum_{I^{(k,M)}} v_i = 0$ *on a*

$$\mathbb{P}_{\omega^{(k,M)}}(|f - \mathbb{E}_{\omega^{(k,M)}}(f)| > x) \leq 2 \exp(-\frac{\beta}{4} \frac{N^{2-2\epsilon}}{i_M |v|^2} x^2).$$

Notre hypothèse d'induction est que l'on a la précision à échelle N^{-1+a} pour un certain $a \in (0, 1)$. Nous allons montrer que si c'est vrai, alors la précision à échelle $N^{-1+3a/4}$ est aussi vrai.

En effet, sous cette hypothèse, on peut montrer que $\omega^{(k,M)}$ et μ ne sont pas loin, et on peut passer du résultat pour $\omega^{(k,M)}$ au résultat pour μ.

Lemme 7. *Suppossons que l'on a la précision à échelle* N^{-1+a} *pour un certain* $a \in (0, 1)$*, alors pour tout* $\alpha, \tilde{\epsilon} > 0$*, il existe des constantes* $\delta, c_1, c_2 > 0$ *telles que, pour tout* $N \geq 1$ *et pour tous* $N^a \leq M \leq \alpha N/2$ *et* $k \in [\![\alpha N, (1 - \alpha)N]\!]$*, et pour* $\omega^{(k,M)}$ *dans la définition associée à* k, M, ϵ*, on a pour tout* $j \in [\![1, N]\!]$*,*

$$|\mathbb{E}_\mu(\lambda_j) - \mathbb{E}_{\omega^{(k,M)}}(\lambda_j)| \leq c_1 e^{-c_2 N^\delta}.$$

Lemme 8. *Suppossons que l'on a la précision à échelle* N^{-1+a} *pour un certain* $a \in (0, 1)$*, alors pour tout* $\alpha, \tilde{\epsilon} > 0$*, il existe des constantes* $\delta, c_1, c_2 > 0$ *telles que, pour tout* $N \geq 1$ *et pour tout* $k \in [\![2\alpha N, (1 - 2\alpha)N]\!]$*,*

$$\mathbb{P}_\mu(|\lambda_k - \lambda_k^{[\alpha N]} - \mathbb{E}_\mu(\lambda_k - \lambda_k^{[\alpha N]})| > \frac{N^{\frac{a}{2}+\tilde{\epsilon}}}{N}) \leq c_1 e^{-c_2 N^\delta},$$

où $\lambda_k^{[\alpha N]} = \lambda_k^{[\lfloor \alpha N \rfloor]} = \frac{1}{i_{\lfloor \alpha N \rfloor}} \sum_{i \in I_{k, \lfloor \alpha N \rfloor}} \lambda_i$

En utilisant de plus l'inégalité de sobolev logarithmique pour μ, on arrive à montrer une amélioration mieux que l'on espère :

Proposition 4. *Suppossons que l'on a la précision à échelle* N^{-1+a} *pour un certain* $a \in (0, 1)$*, alors pour tout* $\alpha, \epsilon > 0$*, il existe des constantes* $\delta, c_1, c_2 > 0$ *telles que, pour tout* $N \geq 1$ *et* $k \in [\![\alpha N, (1 - \alpha)N]\!]$*,*

$$\mathbb{P}_\mu(|\lambda_k - \mathbb{E}_\mu(\lambda_k)| > N^{-1+a/2+\epsilon}) \leq c_1 e^{-c_2 N^\delta}.$$

(B')Précision : entre $\gamma_k^{(N)}$ et γ_k

Ayant une bonne amélioration de la concentration, on peut améliorer la précision en utilisant les transformées de Stieltjes de la même manière que dans la Proposition 2.

Proposition 5. *Supposons que l'on a la précision à échelle N^{-1+a} pour un certain $a \in (0,1)$, alors pour tous $\alpha, \epsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tous $N \geq 1$ et $k \in [\![\alpha N, (1-\alpha)N]\!]$,*

$$|\gamma_k^{(N)} - \gamma_k| \leq cN^{-1+3a/4+\epsilon}.$$

(C')Fluctuation : entre $\mathbb{E}(\lambda_k)$ et $\gamma_k^{(N)}$

Pour la même raison que dans la partie (C), la distance entre $\mathbb{E}(\lambda_k)$ et $\gamma_k^{(N)}$ peut être améliorée de même échelle que pour la distance entre λ_k et $\mathbb{E}(\lambda_k)$.

4.2.3 Conclusion : échelle N^{-1}

Prenons $a = \frac{1}{2}$ dans la section précédente comme l'initiation et par récurrence, on arrive à une estimation à échelle N^{-1}, ce qui est énoncé dans Théorème 6.

5 Problème ouvert

1. Dans Théoreme 6, est-ce qu'on peut remplacer la terme $N^{-1+\epsilon}$ par $N^{-1}(\log N)^{\epsilon}$ par exemple comme c'est vrai dans le cas GUE pour $\epsilon = \frac{1}{2}$ d'après Gustavsson ?
2. Est-ce qu'on peut montrer directement le comportement local universel pour les β ensembles sans passer à la comparaison avec les matrices gaussiens classiques ?

Références

[1] Paul Bourgade, Laszlo Erdös, Horng-Tzer Yau, Universality of General β Ensembles, Duke Math. J. 163, no. 6 (2014), 1127-1190.

[2] Paul Bourgade, Laszlo Erdös, Horng-Tzer Yau, Bulk Universality of General β Ensembles with Non-convex Potential, Journal of Mathematical Physics, 2012.

[3] Paul Bourgade, Laszlo Erdös, Horng-Tzer Yau, Edge universality of beta ensembles. Communications in Mathematical Physics, 332(1), 261-353.

[4] Dumitriu Ioana, Alan Edelman. Matrix models for beta ensembles. arXiv preprint math-ph/0206043 (2002).

[5] Greg W. Anderson, Alice Guionnet, Ofer Zeitouni. An introduction to random matrices. No. 118. Cambridge University Press, 2010.

[6] Pastur, Leonid Andreevich, Mariya Shcherbina. Eigenvalue distribution of large random matrices. Vol. 171. Providence, RI : American Mathematical Society, 2011.

[7] Percy Alec Deift, Orthogonal polynomials and random matrices : a Riemann-Hilbert approach, Courant Lecture Notes in Mathematics, Vol. 3, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences 1999.