1

Introduction à un domaine de recherche :

Fibrés de Finsler adéliques et distribution asymptotique des pentes

Quentin Guignard

Sommaire

1.1 Introduction

1.1.1 Le contexte. Quelle est la plus petite constante c telle que pour tout n et pour tout polynôme P de degré exactement n et à coefficients entiers, l'inegalité

$$\sup_{z\in\mathbb{D}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} |P(z)| \geq c^{-n} \tag{1.1.1.1}$$

soit verifiée ?

Cette question, dûe à Ted Chinburg[1], est aussi difficile qu'élémentaire. Elle s'inscrit en fait dans le contexte général de l'étude des pentes des espaces de sections globales

$$H^0(X, \mathcal{L}^n)$$

où X est un schéma projectif sur un corps, et où $\mathcal{L}$ est un fibré en droites ample muni d'une structure additionnelle permettant de définir les pentes en question. La nature de cette structure additionnelle dépend du contexte ; on s'intéresse ici au cas d'une métrique adélique au sens de Zhang [10]. En attendant de pouvoir formuler une définition à la fois plus précise et plus générale (voir la définition 1.4.2.1 plus loin), on utilisera dans un premier temps la définition suivante :

1. Communication privée, janvier 2015.

Définition 1.1.1.1
Soit X une variété algébrique propre et lisse sur $\mathbb{Q}$, munie d'un modèle $\mathcal{X}$ propre et plat sur $\mathbb{Z}$, lui-même muni d'un fibré en droites $\mathcal{L}$. Une métrique sur $\mathcal{L}$ est simplement la donnée d'une métrique hermitienne continue invariante par conjugaison complexe sur le fibré en droite $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ (qui est un fibré en droites sur la variété complexe $X(\mathbb{C})$).

Si $(X, \mathcal{X}, \mathcal{L}, ||\cdot||_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}})$ est une telle donnée, alors on dispose de groupes abéliens de type fini

$$M_n = H^0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^n)$$

dont on notera r_n le rang. On peut munir les espaces vectoriels $(M_n)_{\mathbb{R}}$ de normes [2], via la formule

$$||s||_{M_n} = \sup_{x \in X(\mathbb{C})} ||s||_{\mathcal{L}^n_{\mathbb{C}}}$$

On s'intéresse alors aux pentes de Minkowski (logarithmiques, normalisées) $\lambda_1^{(n)} \geq \cdots \geq \lambda_{r_n}^{(n)}$ définies par

$$\lambda_i^{(n)} = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid M_n \text{ contient } i \text{ vecteurs linéairement indépendants de normes } \leq e^{-nt}\}$$

et on souhaiterait comprendre leur comportement asymptotique lorsque n tend vers l'infini. Par exemple, le problème (1.1.1.1) est réalisé par une métrique adéquate sur la paire $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}, \mathcal{O}(1))$, à savoir la métrique hermitienne continue donnée en coordonnées homogènes (X, Y) par

$$||\ell||_{\mathcal{O}(1)_{\mathbb{C}}, z} = \frac{|\ell(X, Y)|}{\max(|X|, |2Y - X|)}$$

Le problème 1.1.1.1 consiste alors à estimer la première pente $\lambda_1^{(n)}$; plus précisément, on a l'égalité $c = \sup_n \exp(\lambda_1^{(n)})$. En général, le problème le plus intéressant consiste, précisément, à majorer la pente maximale $\lambda_1^{(n)}$. Mais il se trouve qu'une *minoration* de *tous* les minimas successifs permet parfois d'accéder à une majoration de $\lambda_1^{(n)}$. Pourquoi ? Pour commencer, il faut savoir que la suite de mesures de probabilité

$$\mu^{(n)} = \frac{1}{r_n} \sum_{i=1}^{r_n} \delta_{\lambda_i^{(n)}}$$

converge étroitement vers une certaine mesure de probabilité à support compact μ (voir Chen [5]). On peut alors vérifier (exercice !) que $\lambda_1^{(n)}$ converge vers (et est majoré par) le plus grand élément du support de μ. Ainsi :

Principe 1.1.1.2. *L'asymptotique des pentes de Minkowski (logarithmiques, normalisées) est complètement décrite, à $o(1)$ près, par la mesure limite μ.*

En règle générale, l'invariant le plus facile à calculer est l'espérance de μ : en effet, des énoncés du type "Riemann-Roch arithmétique", comme celui de Gillet-Soulé [8], permettent de calculer cette espérance en terme d'un *nombre d'auto-intersection arithmétique*, qui se décompose lui-même en une somme de contributions locales, souvent calculables (on en présente ci-dessous une variante complètement élémentaire, dûe à Yuan [9]).
Si on arrive par ailleurs, par une construction explicite de vecteurs entiers de basse norme, à minorer la fonction de répartition de μ par celle d'une mesure de probabilité μ', et si μ' possède la même espérance que μ, alors on peut affirmer que $\mu = \mu'$: il s'agit là d'une approche permettant parfois de calculer effectivement μ, et donc d'estimer indirectement

2. On pourrait aussi utiliser des normes L^2 plutôt que L^∞. Un lemme de Gromov assure que cela n'affecte pas la mesure limite μ définie ci-après.

$\lambda_1^{(n)}$.
Une autre approche, permettant cette fois-ci de *majorer* la fonction de répartition de la mesure limite μ, consiste à *évaluer* les éléments de M_n en des points particuliers de X. Pour reprendre l'exemple (1.1.1.1), si P est un polynôme à coefficients entiers de degré exactement n, alors $P(0)$ et $P(1)$ sont des entiers : si l'un d'entre eux n'est pas nul, alors on peut prendre $c = 1$ dans (1.1.1.1). Un raisonnement similaire montre en fait que si $\sup_{z \in \mathbb{D}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} |P(z)|$ est petit, alors P s'annule *avec grande multiplicité* en 0 et 1. Quantifier cet énoncé se révèle en fait assez délicat ; on en discutera brièvement dans la section 1.3. On peut par ailleurs répéter cette procédure avec des points algébriques autres que 0 et 1, et obtenir des multiplicités d'annulations en ces autres points [3]. Ainsi :

Principe 1.1.1.3. *Les multiplicités d'annulation des sections réalisant les premières pentes de Minkowski possèdent une répartition limite.*

Étant donné un quadruplet $(X, \mathcal{X}, \mathcal{L}, ||\cdot||_{\mathcal{L}_{\mathbb{C}}})$, il s'agit donc de trouver des points particuliers en lesquels évaluer les sections. Par exemple, si X est une variété abélienne sur un corps de nombres et si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites symétrique convenablement métrisé, alors on dispose d'un ensemble Zariski-dense de points de basse hauteur, en l'occurrence les points de torsion de la variété abélienne X. Incidemment, ces espaces de sections sont asymptotiquement semistables (et même semistables en norme L^2, voir [2], théorème 4.2), dans le sens où la mesure limite μ est une masse de Dirac en un point.
Si on se place au contraire sur un espace projectif sur un corps de nombres (comme ce sera le cas dans ces pages), où l'on ne dispose pas de points de basse hauteur donnés *a priori*, la question du calcul de la distribution asymptotique des pentes peut se révéler très difficile, même si l'on dispose d'équations explicites pour les métriques, comme dans le cas du problème (1.1.1.1). On se propose ici de présenter, dans le langage des fibrés de Finsler adéliques, des méthodes menant, dans les cas les plus favorables, à la détermination de la mesure limite (voir le théorème 1.4.5.2), et dans tous les cas à des majorations pour la première pente de Minkowski $\lambda_1^{(n)}$. Par exemple, ayant parcouru ces quelques pages, la lectrice sera en mesure de démontrer, à partir de calculs purement locaux, que la valeur $c = \sqrt{1+\sqrt{2}} = 1,55377\ldots$ est admissible [4] dans (1.1.1.1).
Enfin, la détermination de la mesure limite μ ne détermine pas entièrement l'asymptotique des pentes de Minkowski. Les énoncés les plus précis du théorème de Riemann-Roch arithmétique (voir [8]) ouvrent en effet la voie à la recherche d'estimations à $o(n^{-1})$ près. La lectrice prendra cependant garde au fait que, dans ce cadre, le choix des normes L^∞ ou L^2 influe grandement sur les résultats. Il existe néanmoins des méthodes provenant de l'analyse semi-classique permettant de comparer deux normes L^2 sur M_n : il s'agit de voir la courbure de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ comme un champ magnétique dont le fibré en droites $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^n$ constitue une quantification de paramètre de Planck $\frac{1}{n}$ tendant vers 0 lorsque n tendant vers $+\infty$, puis de formuler le problème de la comparaison de deux normes L^2 en terme de répartition du spectre d'un opérateur de Schrödinger convenable (voir [6]). Dans tous les cas, l'influence de ces variations de normes sur les pentes *globales* reste mal connue [5] et mérite une attention toute particulière.

1.1.2 Ce que la lectrice trouvera dans ces pages. Dans la section 2, on généralise succinctement la notion de fibré de Finsler, classique dans le cas complexe, à tout corps de

3. On peut aussi évaluer en un point suffisamment générique, choisi de telle sorte que la section ne s'annule pas en ce point ; on obtient ainsi l'inégalité fondamentale de Zhang sur les minimas successifs des variétés arithmétiques (Th. (1.10), [10]), qui constitue l'outil essentiel de sa démonstration de la conjecture de Bogomolov [11].
4. On notera que l'exemple du polynôme $P(z) = z^4(1-z)^4(1-2z+2z^2)$ montre que l'on a nécessairement $c \geq \sqrt[4]{5} = 1,4953\ldots$ dans (1.1.1.1).
5. Bien entendu, l'influence de ces variations de normes sur le volume global est aisément déterminée à partir des résultats d'analyse spectrale évoqués ci-dessus. Ceci permet en particulier à Abbes et Bouche [1] de démontrer le théorème de Hilbert-Samuel arithmétique en imitant la démonstration algébrique usuelle.

base complet pour une valuation non triviale. Dans le cas d'un fibré de Finsler sur un point, on définit des capacités locales, dont on donne quelques exemples dans la section 1.3. On globalise ensuite la notion de fibré de Finsler dans la section 1.4, en utilisant le formalisme adélique de Zhang [10] ; on définit, suivant Yuan [9], une capacité globale associée à un drapeau et on applique cette théorie au problème de la distribution des pentes. Enfin, on explique dans la section 1.5 comment obtenir de meilleures estimations en considérant des drapeaux aléatoires plutôt que déterministes.

1.2 Fibrés de Finsler sur un corps valué.

1.2.1 Corps valués. Soit C un corps. Une *valuation* sur C est une application $|\cdot| : C \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes suivants :

(a) On a $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

(b) On a $|1| = 1$.

(c) Pour chaque paire (x, y) de C^2, on a $|xy| = |x||y|$.

(d) Il existe une constante $k > 0$ telle que $|x + y| \leq k(|x| + |y|)$ pour chaque paire (x, y) de C^2.

On note que si $|\cdot|$ est une valuation, alors $|\cdot|' = |\cdot|^\alpha$ en une aussi pour chaque $\alpha > 0$: on dit que $|\cdot|$ et $|\cdot|'$ sont *équivalentes*. On peut vérifier (exercice !) qu'il existe une valuation équivalente à $|\cdot|$ pour laquelle l'axiome (d) est vérifié avec $k = 1$, auquel cas la formule $d(x, y) = |x - y|$ définit une distance sur C. Dans la suite, on supposera toujours que (d) est vérifié avec $k = 1$. On dit que la paire (C, d) est un corps valué *complet* si l'espace métrique (C, d) est complet.

Exemple 1.2.1.1. (a) *Le corps des complexes $\mathbb{C}$, muni de sa valeur absolue usuelle, est un corps valué complet. Il en va de même pour le corps des réels, muni de sa valeur absolue usuelle.*

(b) *Sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, la formule*

$$|\frac{a}{b}|_p = p^{v_p(b) - v_p(a)}$$

où p est un nombre premier fixé, définit une valuation.

1.2.2 Fibrés de Finsler locaux. Soit $(C, |\cdot|)$ un corps valué complet dont la valuation est n'est pas triviale. Tout C-espace vectoriel de dimension finie s'identifie, via le choix d'une base, à un produit C^r pour un certain entier r : la topologie qui s'en déduit sur ce C-espace vectoriel de dimension finie ne dépend pas du choix de la base. On peut en fait démontrer que sur un C-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Plus généralement, si X est un C-schéma de type fini, alors l'ensemble $X(C)$ des C-points de X hérite d'une topologie qui est (en général) plus fine que la topologie de Zariski, et qui est fonctorielle en X. On peut à présent définir les structures qui vont habiter ces pages :

Définition 1.2.2.1
Soit X un C-schéma de type fini. Un fibré de Finsler de rang r sur X est la donnée d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang r sur X, et pour chaque point x de $X(C)$, d'une application $||\cdot||_{\mathcal{E},x} : x^*\mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, de telle sorte que les axiomes suivants soient vérifiés :

(a) Si x est un élément de $X(C)$, alors il existe une norme N sur $x^*\mathcal{E}$ pour laquelle on a $||\cdot||_{\mathcal{E},x} \geq N$.

(b) Si e est un élément de $x^*\mathcal{E}$, où x est un élément de $X(C)$, alors on a

$$||\lambda e||_{\mathcal{E},x} = |\lambda|||e||_{\mathcal{E},x}$$

pour chaque élément λ de C.

(c) Si U est un ouvert de X et si e est une section de $\mathcal{E}$ sur U, alors l'application

$$x \in U(C) \longmapsto ||e(x)||_{\mathcal{E},x} \in \mathbb{R}_+$$

est continue.

Si X est un C-schéma de type fini et si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur X, alors on peut former le fibré projectif

$$\mathbb{P}_X(\mathcal{E}) = \text{Proj Sym}_\cdot(\mathcal{E}^*) \xrightarrow{\pi} X$$

On vérifie alors que la donnée d'une structure de fibré de Finsler sur $\mathcal{E}$ équivaut à la donnée d'un structure de fibré de Finsler sur le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{E})}(1)$. Plus précisément, étant donné une structure de fibré de Finsler sur $\mathcal{E}$, alors on peut munir $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{E})}(1)$ de la structure définie par la formule

$$||s||_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{E})}(1),(x,[e(x)])} = \frac{|s(e(x))|}{||e(x)||_{\mathcal{E},x}}$$

où e est un germe de section de $\mathcal{E}$ en x, et où s est un germe de section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(\mathcal{E})}(1)$ au point $(x,[e(x)])$ de $\mathbb{P}_X(\mathcal{E})(C)$.

Pour plus d'informations sur le cas $C = \mathbb{C}$, la lectrice consultera avec profit [7].

1.2.3 Puissances symétriques duales. Ici et dans la suite, on suppose que C est de caractéristique nulle. Si $\mathcal{E}$ est un fibré de Finsler sur un C-schéma de type fini X, alors on peut munir les puissances symétriques duales $S^n\mathcal{E}^*$ de structures de fibrés de Finsler. Pour simplifier l'exposition, on ne présente ici que le cas $X = \text{Spec } C$. Dans ce cas, $\mathcal{E}$ est simplement un C-espace vectoriel de dimension finie r, muni d'une application $||\cdot||_\mathcal{E} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes suivants
(a') Il existe une norme N sur $\mathcal{E}$ pour laquelle on a $||\cdot||_\mathcal{E} \geq N$.
(b') Si e est un élément de $\mathcal{E}$ alors on a

$$||\lambda e||_\mathcal{E} = |\lambda| ||e||_\mathcal{E}$$

pour chaque élément λ de C.
(c') L'application $||\cdot||_\mathcal{E}$ est continue.
Avant de continuer, il convient d'introduire quelques notations. Si $\nu = (e_1, \cdots, e_r)$ est une base de $\mathcal{E}$, de base duale $\nu^* = (e_1^*, \cdots, e_r^*)$, et si α est un r-uplet d'entiers naturels, alors on pose

$$(\nu)^\alpha = e_1^{\alpha_1} \cdots e_r^{\alpha_r} \text{ et } (\nu^*)^\alpha = (e_1^*)^{\alpha_1} \cdots (e_r^*)^{\alpha_r}$$

Lorsque α parcourt les r-uplets d'entiers naturels avec $|\alpha| = \sum_i \alpha_i = n$, alors les $(\nu)^\alpha$ et les $(\nu^*)^\alpha$ forment des bases de $S^n\mathcal{E}$ et $S^n\mathcal{E}^*$, respectivement. En posant $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_r!$, la formule

$$\left\langle (\nu^*)^\alpha | (\nu)^\beta \right\rangle = \delta_{\alpha\beta} \frac{\alpha!}{n!}$$

définit une application bilinéaire qui met en dualité $S^n\mathcal{E}^*$ et $S^n\mathcal{E}$; on vérifie que cet accouplement ne dépend pas de la base choisie.

On munit alors la n-ième puissance symétrique duale $S^n\mathcal{E}^*$ d'une structure de fibré de Finsler, via la formule

$$||\theta^*||_{S^n\mathcal{E}^*} = \sup_{e \in E \setminus \{0\}} \frac{|\langle \theta^* | e^n \rangle|}{||e||_\mathcal{E}^n}$$

Il s'agit en fait d'une norme sur $S^n\mathcal{E}^*$, ce qui rend immédiate la vérification des axiomes $(a'), (b'), (c')$.

1.2.4 Capacités locales. Soit $\mathcal{E}$ un fibré de Finsler de rang r sur Spec C. On note $\Gamma(\mathcal{E})$ l'ensemble des bases $\nu = (e_1, \cdots, e_r)$ de $\mathcal{E}$. Comme $\Gamma(\mathcal{E})$ s'identifie naturellement à l'ensemble des isomorphismes de $C^{\oplus r}$ dans $\mathcal{E}$, le groupe $\mathrm{Gl}_r(C)$ agit à droite sur $\Gamma(\mathcal{E})$. Si on restreint l'action à celle du sous-groupe de Borel standard

$$\mathrm{B}(C) = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

alors le quotient $\Gamma(\mathcal{E})/\mathrm{B}(C)$ s'identifie à l'ensemble des drapeaux complets de $\mathcal{E}$.

On se donne à présent un élément $\nu = (e_1, \ldots, e_r)$ de $\Gamma(\mathcal{E})$. Si θ^* est un élément de $S^n\mathcal{E}^*$, alors on note $\theta^*[\nu, \alpha]$ le coefficient de $(\nu^*)^\alpha$ dans l'écriture de θ^* dans la base $(\nu^*)^\beta)_{|\beta|=n}$. Autrement dit, on a

$$\theta^* = \sum_{|\alpha|=n} \theta^*[\nu, \alpha](\nu^*)^\alpha$$

On munit alors $\mathbb{N}^r$ de l'ordre lexicographique, qui est un ordre total, et on définit le *degré* de θ^* en ν par la formule

$$\deg_\nu(\theta^*) = \sup\{\alpha \mid \theta^*[\nu, \alpha] \neq 0\}$$

La lectrice vérifiera sans peine que l'on a, pour tout élément g de $\mathrm{B}(C)$ de diagonale $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, les formules

$$\deg_{\nu g}(\theta^*) = \deg_\nu(\theta^*) \tag{1.2.4.1}$$

$$\theta^*[\nu g, \deg_{\nu g}(\theta^*)] = \lambda^\alpha \theta^*[\nu, \deg_\nu(\theta^*)] \tag{1.2.4.2}$$

On pose ensuite

$$F[\mathcal{E}, \nu, \alpha] = \sup_{\substack{\theta^* \in S^{|\alpha|}\mathcal{E}^* \\ \deg_\nu(\theta^*) = \alpha}} \frac{|\theta^*[\nu, \alpha]|}{||\theta^*||_{S^{|\alpha|}\mathcal{E}^*}}$$

Les formules 1.2.4.1 et 1.2.4.2 montrent que pour tout élément g de $\mathrm{B}(C)$ de diagonale $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, on a

$$F[\mathcal{E}, \nu g, \alpha] = |\lambda|^\alpha F[\mathcal{E}, \nu, \alpha] \tag{1.2.4.3}$$

On dispose à présent des ingrédients nécessaires à la définition des capacités locales. Ces capacités locales sont des fonctions définies sur l'intérieur du simplexe de dimension $r - 1$, c'est-à-dire

$$\overset{\circ}{\Delta}_r = \{\alpha \in (\mathbb{R}_+^*)^r \mid \sum_i \alpha_i = 1\}$$

Ce simplexe, ou plutôt son adhérence Δ_r, est le corps d'Okounkov de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ muni du drapeau de sous-variétés linaires correspondant à la base ν (voir [3] et [9]). Si α est un élément de $\overset{\circ}{\Delta}_r$, et si $(\alpha_k)_k$ est une suite de r-uplets d'entiers, telle que les suites $(\frac{\alpha_k}{|\alpha_k|})_k$ et $(|\alpha_k|)_k$ tendent vers α et vers $+\infty$ respectivement, alors on pose

$$c[\mathcal{E}, \nu, \alpha] = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{|\alpha_k|} \log F[\mathcal{E}, \nu, \alpha_k]$$

D'après [9], la quantité $c[\mathcal{E},\nu,\alpha]$ ne dépend pas du choix de la suite utilisée pour la définir, et l'application $\alpha \longmapsto c[\mathcal{E},\nu,\alpha]$ est une fonction concave continue sur $\overset{\circ}{\Delta}_r$. La formule 1.2.4.3 montre que pour tout élément g de $\mathrm{B}(C)$ de diagonale $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$, on a

$$c[\mathcal{E},\nu g,\alpha] = c[\mathcal{E},\nu,\alpha] + \log(|\lambda|^\alpha) \tag{1.2.4.4}$$

1.3 Quelques calculs de capacités locales.

On se place ici dans le cas où $\mathcal{E}$ est un C-espace vectoriel de dimension 2, avec une structure de fibré de Finsler définie par

$$||e||_{\mathcal{E}} = \max(|(e_1^0)^* e|, |(e_2^0)^* e|)$$

où $\nu^0 = (e_1^0, e_2^0)$ est une base donnée de $\mathcal{E}$. On cherche à calculer la capacité locale $c[\mathcal{E},\nu,\alpha]$ lorsque α est dans l'intervalle Δ_1 et lorsque $\nu = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathcal{E}$.

1.3.1 Cas p-adique. On se place dans le cas où $C = \mathbb{C}_p$ est la complétion d'une clôture algébrique d'une complétion de $\mathbb{Q}$ pour la valuation p-adique. On commence par calculer la quantité

$$F[\mathcal{E},\nu,(n-k,k)] = \sup_{\substack{\theta^* \in S^n\mathcal{E}^* \\ \deg_\nu(\theta^*)=(n-k,k)}} \frac{|\theta^*[\nu,(n-k,k)]|}{||\theta^*||_{S^n\mathcal{E}^*}}$$

Un élément θ^* de $S^n\mathcal{E}^*$ vérifie $\deg_\nu(\theta^*) = (n-k,k)$ si et seulement si on peut écrire $\theta^* = (e_2^*)^k \psi^*$ où ψ^* est un élément de $S^{n-k}\mathcal{E}^*$ qui vérifie $\langle \psi^* | e_1^{n-k}\rangle \neq 0$. On a alors les formules

$$\theta^*[\nu,(n-k,k)] = \langle \psi^* | e_1^{n-k}\rangle \tag{1.3.1.1}$$

$$||\theta^*||_{S^n\mathcal{E}^*} = ||e_2^*||_{\mathcal{E}^*}^k ||\psi^*||_{S^{n-k}\mathcal{E}^*} \tag{1.3.1.2}$$

où on a utilisé la multiplicativité des normes de Gauss $||\cdot||_{S^n\mathcal{E}^*}$, qui est un phénomène particulier au monde non-archimédien. On en déduit la formule

$$F[\mathcal{E},\nu,(n-k,k)] = \frac{||e_1||_{\mathcal{E}}^{n-k}}{||e_2^*||_{\mathcal{E}^*}^k}$$

On obtient donc l'identité

$$c[\mathcal{E},\nu,\alpha] = \alpha_1 \log(||e_1||_{\mathcal{E}}) - \alpha_2 \log(||e_2^*||_{\mathcal{E}^*})$$

La lectrice pourra vérifier directement à partir de cette expression la validité de la formule 1.2.4.4 dans ce cas particulier.

1.3.2 Cas complexe. On se place à présent dans le cas où $C = \mathbb{C}$ est le corps des complexes. Comme ci-dessus, on peut écrire

$$F[\mathcal{E},\nu,(n-k,k)] = \sup_{\psi^* \in S^{n-k}\mathcal{E}^*} \frac{|\langle \psi^* | e_1^{n-k}\rangle|}{||(e_2^*)^k \psi^*||_{S^n\mathcal{E}^*}}$$

Il existe un unique triplet (a,b,c) de nombres complexes pour lesquels on a

$$\begin{aligned} e_1 &= a e_1^0 + b e_2^0 \\ c e_2^* &= -b (e_1^0)^* + a (e_2^0)^* \end{aligned}$$

On a donc

$$F[\mathcal{E}, \nu, (n-k,k)] = |c|^k \sup_{\psi^* \in S^{n-k}\mathcal{E}^*} \frac{|\langle \psi^* | (ae_1^0 + be_2^0)^{n-k} \rangle|}{||(-b(e_1^0)^* + a(e_2^0)^*)^k \psi^*||_{S^n\mathcal{E}^*}}$$

On suppose à présent que $|a|$ excède $|b|$, de telle sorte que $z_0 = \frac{b}{a}$ appartient au disque unité fermé. En effectuant le changement de variable $z = \frac{(e_2^0)^* e}{(e_1^0)^* e}$, l'expression ci-dessus devient

$$F[\mathcal{E}, \nu, (n-k,k)] = |c|^k |a|^{n-2k} \sup_{P \in \mathbb{C}[z]_{n-k}} \frac{|P(z_0)|}{||(z-z_0)^k P(z)||_{\mathbb{D}}}$$

où $\mathbb{C}[z]_{n-k}$ est l'ensemble des polynômes complexes de degré au plus $n-k$ et $||\cdot||_{\mathbb{D}}$ désigne la norme uniforme sur le disque unité (ou, de manière équivalente, sur le cercle unité).

Si z_0 vaut 0, alors cette formule donne

$$F[\mathcal{E}, \nu, (n-k,k)] = |c|^k |a|^{n-2k}$$

et donc

$$c[\mathcal{E}, \nu, \alpha] = \alpha_2 \log |c| + (\alpha_1 - \alpha_2) \log |a| \tag{1.3.2.1}$$

Pour z_0 de module 1, le problème de maximisation ci-dessus peut de résoudre au moyen de la théorie des polynômes orthogonaux ; plus précisément, on voit naturellement apparaître les polynômes orthogonaux de Jacobi après avoir effectué le changement de variable $x = \mathrm{Re}(z)$. Un calcul que l'on ne détaillera pas dans ces page donne alors la formule

$$c[\mathcal{E}, \nu, \alpha] = \alpha_2 \log |c| + (\alpha_1 - \alpha_2) \log |a| \tag{1.3.2.2}$$

$$+ \frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{2} \log(\alpha_1 + 2\alpha_2) - \alpha_2 \log(4) - \frac{\alpha_1}{2} \log(\alpha_1) - \alpha_2 \log(\alpha_2) \tag{1.3.2.3}$$

On conclut cette section en énonçant un problème qui, bien que de nature très élémentaire, s'avère fort difficile :

Problème 1.3.2.1

Pour z_0 de module strictement compris entre 0 et 1, déterminer le comportement asymptotique de la quantité

$$\sup_{P \in \mathbb{C}[z]_{n-k}} \frac{|P(z_0)|}{||(z-z_0)^k P(z)||_{\mathbb{D}}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$, avec $k \asymp n$.

En utilisant la formule de Heine-Weyl pour les déterminants de matrices de Toeplitz (voir [4]), le problème 1.3.2.1 se ramène à l'estimation des intégrales

$$\int_{U(k)} \frac{\mathrm{d}g}{|\det(1 - z_0 g)|^{2n}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$, avec $k \asymp n$. Ici, la mesure $\mathrm{d}g$ désigne la mesure de Haar normalisée sur le groupe unitaire $U(k)$.

1.4 Fibrés de Finsler adéliques.

1.4.1 Valuations sur les corps de nombres. Soit K un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie du corps des rationnels. Soit $\mathcal{M}_K$ l'ensemble des classes d'équivalences de valuations non-triviales sur le corps K (aussi appelées *places* de K). On notera π l'application $\mathcal{M}_K \longmapsto \mathcal{M}_{\mathbb{Q}}$ qui à v associe la restriction de v à $\mathbb{Q}$. On va maintenant spécifier, pour chaque élément v de $\mathcal{M}_K$, un élément de la classe d'équivalence v, que l'on notera encore v par la suite :

▷ Si $K = \mathbb{Q}$ et si v est non-archimédienne, alors v contient la valeur absolue p-adique $|\cdot|_p$ pour un unique nombre premier p. On choisit alors $|\cdot|_p$ comme représentant pour v.
▷ Si $K = \mathbb{Q}$ et si v est archimédienne, alors v contient la valeur absolue réelle usuelle, notée $|\cdot|_\infty$, que l'on choisit comme représentant.
▷ En général, si K_v est la complétion de K par rapport à v, alors on choisit comme représentant de v la restriction à K de l'unique valuation sur K_v dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est le représentant de $\pi(v)$ spécifié ci-dessus.

Avec ces normalisations, la *formule du produit* s'énonce ainsi : en notant d_v le degré de l'extension $K_v/\mathbb{Q}_{\pi(v)}$, on a

$$\prod_{v \in \mathcal{M}_K} |x|_v^{d_v} = 1$$

pour tout élément x de K^*. Enfin, on notera $\mathbb{C}_v$ la complétion d'une clôture algébrique de K_v.

1.4.2 Fibrés de Finsler globaux. Soit K un corps de nombres. Pour chaque place v de K, et pour chaque K-schéma de type fini X, le $\mathbb{C}_v$-schéma X_v qui se déduit de X par extension du corps de base est encore de type fini. De plus, si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel de rang r sur X, alors sa restriction $\mathcal{E}_v$ à X_v est encore un fibré vectoriel de rang r. Ces remarques étant faites, et ces notations étant introduites, on peut définir la notion de fibré de Finsler adélique :

Définition 1.4.2.1
Soit X un K-schéma de type fini. Un fibré de Finsler adélique de rang r sur X est la donnée d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang r sur X, et pour chaque place v de K, d'une structure $(||\cdot||_{\mathcal{E}_v,x})_{x\in X_v(\mathbb{C}_v)}$ de fibré de Finsler sur le fibré vectoriel $\mathcal{E}_v$, de telle sorte que les axiomes suivant soient vérifiés :

(a) Pour toute trivialisation $(e_1, \cdots, e_r)$ de $\mathcal{E}$ sur un ouvert U de X, on a

$$||e||_{\mathcal{E}_v,x} = \max(|(e_1)^*e|, \cdots, |(e_r)^*e|)$$

pour tout point x de $U(\mathcal{C}_v)$ et tout élément e de $x^*\mathcal{E}_v$, sauf peut-être pour un nombre fini de places v.

(b) Si e est une section de $\mathcal{E}$ sur un ouvert U de X, si x est un point de $U(\mathcal{C}_v)$, et si σ est un automorphisme continu de $\mathbb{C}_v$ qui fixe K_v, on a

$$||e(x)^\sigma||_{\mathcal{E}_v,x} = ||e(x^\sigma)||_{\mathcal{E}_v,x^\sigma}$$

Le cas $r = 1$ de cette définition est dû à Zhang [10]. Dans la suite on se concentrera sur le cas où X est le point Spec K.

1.4.3 Volume d'un fibré de Finsler adélique. Soit $\mathcal{E}$ un fibré de Finsler adélique de rang r sur Spec K. On peut former l'espace $\mathcal{E}_{\mathbb{A}_K} = \mathcal{E} \otimes_K \mathbb{A}_K$ qui s'identifie au produit restreint des paires $(\mathcal{E}_{K_v}, \mathbb{B}_v)$ où

$$\mathbb{B}_v = \{e \in \mathcal{E}_{K_v} \mid ||e||_{\mathcal{E}_v} \leq 1\}$$

Dans ce cas, $\mathcal{E}_{\mathbb{A}_K}$ est un groupe topologique localement compact, et

$$\mathbb{B} = \prod_{v \in \mathcal{M}_K} \mathbb{B}_v$$

est une partie compacte de $\mathcal{E}_{\mathbb{A}_K}$. On pose alors

$$\chi(\mathcal{E}) = \log\left(\frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{B})}{\mathrm{Vol}(\mathcal{E}_{\mathbb{A}_K}/\mathcal{E})}\right)$$

où le volume est pris par rapport à une mesure de Haar donnée sur $\mathcal{E}_{\mathbb{A}_K}$, le quotient des volumes ne dépendant pas du choix de cette mesure. Le *volume* de $\mathcal{E}$ est alors défini par la formule

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{E}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{r!}{n^r} \chi(S^n \mathcal{E}^*)$$

1.4.4 Distribution asymptotique des pentes. Soit $\mathcal{E}$ un fibré de Finsler adélique sur Spec K. On peut munir, et on munit, la n-ième puissance symétrique duale $S^n\mathcal{E}^*$ d'une structure de fibré de Finsler adélique par la construction du paragraphe 1.2.3. Si θ^* est un élément non-nul de $S^n\mathcal{E}^*$, on définit la *hauteur* de θ^* par la formule

$$H_{S^n\mathcal{E}^*}(\theta^*) = \prod_{v \in \mathcal{M}_K} ||\theta^*||_{S^n\mathcal{E}_v^*}^{d_v}$$

On note alors $\mathcal{F}^{\geq t} S^n\mathcal{E}^*$ le K-sous-espace vectoriel de $S^n\mathcal{E}^*$ engendré par les éléments θ^* de $S^n\mathcal{E}^*$ qui vérifient $H_{S^n\mathcal{E}^*}(\theta^*) \leq e^{-nt}$. On obtient ainsi une filtration décroissante de $S^n\mathcal{E}^*$ dont les sauts sont les *pentes* (normalisées) du fibré de Finsler adélique $S^n\mathcal{E}^*$. On considère alors la fonction

$$G(\mathcal{E}, t) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\dim\left(\mathcal{F}^{\geq t} S^n\mathcal{E}^*\right)}{\dim\left(S^n\mathcal{E}^*\right)}$$

qui est bien définie par le lemme de Fekete sur les suites sur-additives (voir aussi [3] et [5]). La fonction $G(\mathcal{E}, \cdot)$ est la fonction de répartition d'une certaine mesure de probabilité $\mu_{\mathcal{E}}$ à support compact sur $\mathbb{R}$.

Problème 1.4.4.1
Décrire les fibrés de Finsler adéliques $\mathcal{E}$ pour lesquels la mesure limite $\mu_{\mathcal{E}}$ est une masse de Dirac (autrement dit, pour lesquels les fibrés $S^n\mathcal{E}^*$ sont asymptotiquement semistables).

La mesure limite $\mu_{\mathcal{E}}$ est un invariant global du fibré de Finsler adélique $\mathcal{E}$ qui s'avère en règle générale très difficile à déterminer. On va cependant voir que le calcul des capacités locales dans des bases bien choisies permet de collecter des informations sur cette mesure limite, et parfois même de calculer effectivement $\mu_{\mathcal{E}}$. Dans tous les cas, la seule information dont on dispose *a priori* est donnée dans le résultat suivant :

Théorème 1.4.4.1. *L'espérance de $\mu_{\mathcal{E}}$ est donnée par la formule*

$$\int_{\mathbb{R}} t \mathrm{d}\mu_{\mathcal{E}}(t) = \frac{1}{r} \mathrm{Vol}(\mathcal{E})$$

1.4.5 Capacités globales. Soit $\mathcal{E}$ un fibré de Finsler adélique de rang r sur Spec K, et soit L une extension finie de K. On se donne un drapeau complet

$$\mathcal{E}_\bullet : 0 = \mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{E}_r = \mathcal{E}_L$$

sur le L-espace vectoriel $\mathcal{E}_L = \mathcal{E} \otimes_K L$. Autrement dit, $\mathcal{E}_\bullet$ est un L-point de la K-variété des drapeaux complets sur $\mathcal{E}$. On se donne aussi une L-base $\nu = (e_1, \cdots, e_r)$ de $\mathcal{E}_L$ qui est adaptée à ce drapeau complet. Si α est un élément de $\overset{\circ}{\Delta}_r$, on définit la *capacité globale* $c[\mathcal{E}, \nu, \alpha]$ par la formule

$$c[\mathcal{E}, \nu, \alpha] = \frac{1}{[L : K]} \sum_{v \in \mathcal{M}_L} d_v c[\mathcal{E}_v, \nu, \alpha]$$

La lectrice aura noté que cette somme ne comporte qu'un nombre fini de termes. En particulier, la fonction $c[\mathcal{E}, \nu, \cdot]$ est continue et concave sur $\overset{\circ}{\Delta}_r$. On peut par ailleurs vérifier que

$c[\mathcal{E}, \nu, \alpha]$ ne dépend pas de L, dans le sens où elle ne dépend que du point fermé correspondant à $\mathcal{E}_\bullet$sur la K-variété des drapeaux complets de $\mathcal{E}$.

La formule 1.2.4.4 et la formule du produit montrent que l'on a

$$c[\mathcal{E}, \nu, \alpha] = c[\mathcal{E}, \nu g, \alpha]$$

pour tout élément g de $B(L)$. En particulier, la quantité $c[\mathcal{E}, \nu, \alpha]$ ne dépend que du drapeau complet $\mathcal{E}_\bullet$, de telle sorte que l'on pourra, sans confusion possible, la noter $c[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\bullet, \alpha]$.

L'intérêt de cette construction réside dans le résultat suivant, qui résulte d'un théorème de Yuan [9] :

Théorème 1.4.5.1. *Avec les notations qui précèdent, on a l'identité*

$$\int_{\overset{\circ}{\Delta}_r} c[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\bullet, \alpha] \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{r!} \mathrm{Vol}(\mathcal{E})$$

La lectrice notera que le membre de droite de cette identité est un invariant de nature globale, tandis que celui de gauche se décompose en une somme finie de termes locaux. On est maintenant prêt à exposer un résultat permettant, dans certains cas, de déterminer la mesure limite $\mu_{\mathcal{E}}$:

Théorème 1.4.5.2. *On conserve les notations de ce paragraphe, et on suppose de plus que l'application $c[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\bullet, \cdot]$ est décroissante pour l'ordre lexicographique. On a alors la formule*

$$\mu_{\mathcal{E}} = c[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\bullet, \cdot]_* \lambda$$

où $\mathrm{d}\lambda(\alpha) = (r-1)!\mathrm{d}\alpha$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le simplexe Δ_r.

Démonstration. Soit θ^* un élément non-nul de $\mathcal{F}^{\geq t} S^n \mathcal{E}^*$, de degré α en $\mathcal{E}_\bullet$. Essentiellement par définition, on a une majoration

$$|\theta^*[\nu, \alpha]|_v \leq e^{nc[\mathcal{E}_v, \nu, \frac{\alpha}{n}]} ||\theta^*||_{S^n \mathcal{E}_v^*}$$

La formule du produit appliquée à l'élément non-nul $\theta^*[\nu, \alpha]$ de L donne alors

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{v \in \mathcal{M}_L} |\theta^*[\nu, \alpha]|_v^{\frac{d_v}{[L:K]}} \\ &\leq e^{nc[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\bullet, \frac{\alpha}{n}]} H_{S^n \mathcal{E}^*}(\theta^*) \end{aligned}$$

En particulier, on a l'inégalité

$$t \leq c[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\bullet, \frac{\alpha}{n}]$$

Si on note $\alpha^* = \alpha^*(t)$ le plus grand (pour l'ordre lexicographique) élément β de Δ_r pour lequel on a $c[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\bullet, \beta] \geq t$, alors on a obtenu $\alpha \leq n\alpha^*(t)$. En particulier,

$$\dim \left(\mathcal{F}^{\geq t} S^n \mathcal{E}^* \right) \leq |\{\alpha \in \mathbb{N}^r \mid |\alpha| = n, \ \alpha \leq n\alpha^*(t)\}|$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{E}}([t, +\infty[) &= G(\mathcal{E}, t) \\ &\leq (r-1)! \int_{\overset{\circ}{\Delta}_r} 1_{\alpha \leq \alpha^*(t)} \mathrm{d}\alpha \\ &= (r-1)! \int_{\overset{\circ}{\Delta}_r} 1_{c[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\bullet, \alpha] \geq t} \mathrm{d}\alpha \\ &= (c[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\bullet, \cdot]_* \lambda)([t, +\infty[) \end{aligned}$$

Comme les mesures $\mu_{\mathcal{E}}$ et $c[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\bullet, \cdot]_* \lambda$ sont à supports compacts et de même espérance par les théorèmes 1.4.5.1 et 1.4.4.1, l'inégalité ci-dessus force ces deux mesures à être égales. $\square$

Corollaire 1.4.5.3. *S'il existe un drapeau algébrique $\mathcal{E}_\bullet$ pour lequel la capacité globale $c[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\bullet, \cdot]$ est une fonction constante, alors la mesure limite $\mu_\mathcal{E}$ est une masse de Dirac en un point (autrement dit, les fibrés $S^n\mathcal{E}^*$ sont asymptotiquement semistables lorsque n tend vers $+\infty$).*

De la démonstration du théorème 1.4.5.2 on extrait aussi la majoration

$$t_{\max} \leq \sup_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_r} c[\mathcal{E}, \mathcal{E}_\bullet, \alpha]$$

pour le supremum $t_{\max}$ des nombres réels t tels que $\mathcal{F}^{\geq t} S^n\mathcal{E}^*$ n'est pas nul pour un certain n. Cette inégalité n'est pertinente que si les zeros des premiers minima se concentrent sur un même drapeau. Dans les sections suivantes, on généralise la notion de capacité globale au cas d'un drapeau aléatoire, censé représenter la distribution des zéros des minima successifs.

1.5 Le cas d'un drapeau aléatoire

1.5.1 Capacité locale relativement à une base aléatoire. Soit $\mathcal{E}$ un fibré de Finsler de rang r sur Spec C, où C est un corps non-trivialement valué complet. On reprend les notations du paragraphe 1.2.4. En particulier, on note encore $\Gamma(\mathcal{E})$ l'ensemble des C-bases de $\mathcal{E}$. Soit $\nu = (e_1, \cdots, e_r)$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\Gamma(\mathcal{E})$, de loi $\mathbb{P}_\nu$.

Si θ^* est un élément non-nul de $S^n\mathcal{E}^*$, alors l'espérance $\mathbb{E}[\deg_\nu(\theta^*)]$ est un élément du simplexe $n\Delta_r$; on note $\Delta_r[\mathbb{P}_\nu, n]$ l'ensemble des éléments de $n\Delta_r$ qui sont de cette forme. On pose ensuite, pour chaque élément α de $\Delta_r[\mathbb{P}_\nu, n]$,

$$F[\mathcal{E}, \mathbb{P}_\nu, \alpha] = \sup_{\substack{\theta^* \in S^n\mathcal{E}^* \\ \mathbb{E}[\deg_\nu(\theta^*)] = \alpha}} \frac{\exp\left(\mathbb{E}[\ \log |\theta^*[\nu, \deg_\nu(\theta^*)]|\ ]\right)}{||\theta^*||_{S^n\mathcal{E}^*}}$$

Si maintenant α est un élément de $\overset{\circ}{\Delta}_r$, si $(n_k)_k$ est une suite d'entiers tendant vers $+\infty$, et si $(\alpha_k)_k$ est une suite de r-uplets de nombres réels, avec α_k dans $\Delta_r[\mathbb{P}_\nu, n_k]$, alors on pose

$$c[\mathcal{E}, \mathbb{P}_\nu, \alpha] = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{n_k} \log F[\mathcal{E}, \mathbb{P}_\nu, \alpha_k]$$

Exemple 1.5.1.1. *On considère le cas $C = \mathbb{C}$, avec $\mathcal{E} = \mathbb{C}^{\oplus 2}$, muni de la métrique de Finsler*

$$||(x, y)||_\mathcal{E} = \max(|x|, |y|)$$

Soit ε une variable aléatoire uniforme sur le doubleton $\{\pm 1\}$. On considère la base aléatoire

$$\nu = (e_1, e_2) = ((1, \varepsilon), (0, 1))$$

L'ensemble $\Delta_r[\mathbb{P}_\nu, n]$ est alors constitué des paires $\left(n - \frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$ avec $k \in [|0, 2n|]$. On a par ailleurs

$$F\left[\mathcal{E}, \mathbb{P}_\nu, \left(n - \frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)\right] = 2^{\frac{k}{2}} \sup_{\substack{P \in \mathbb{C}[X]_{n-k} \\ a+b=k}} \frac{|P(-1)|^{\frac{1}{2}} |P(1)|^{\frac{1}{2}}}{||(z-1)^a (z+1)^b P||_\mathbb{D}}$$

La transformation astucieuse $P(z)P(-z) = Q(z^2)$, permet alors de calculer la capacité locale $c[\mathcal{E}, \mathbb{P}_\nu, \alpha]$ en se ramenant à la formule (1.3.2.2).

1.5.2 Capacité globale relativement à un drapeau aléatoire. Soit $\mathcal{E}$ un fibré de Finsler de rang r sur Spec K, où K est un corps de nombres. On reprend les notations du paragraphe 1.2.4. Soit $\nu = (e_1, \cdots, e_r)$ une variable aléatoire discrète de loi $\mathbb{P}_\nu$ à valeurs dans $\Gamma(\mathcal{E}_L)$, où L est une extension finie de K. On note $\mathcal{E}_\bullet$ le drapeau complet aléatoire associé à ν. Si α est un élément de $\overset{\circ}{\Delta}_r$, on définit la *capacité globale* $c[\mathcal{E}, \mathbb{P}_\nu, \alpha]$ par la formule

$$c[\mathcal{E}, \mathbb{P}_\nu, \alpha] = \frac{1}{[L:K]} \sum_{v \in \mathcal{M}_L} d_v c[\mathcal{E}_v, \mathbb{P}_\nu, \alpha]$$

Une fois encore, la quantité $c[\mathcal{E}, \mathbb{P}_\nu, \alpha]$ ne dépend de $\mathbb{P}_\nu$ qu'à travers son image sur l'ensemble des L-points de la K-variété des drapeaux complets de $\mathcal{E}$. On la notera donc indifféremment $c[\mathcal{E}, \mathbb{P}_{\mathcal{E}_\bullet}, \alpha]$. On a alors l'inegalité

$$t_{\max} \leq \sup_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_r} c[\mathcal{E}, \mathbb{P}_{\mathcal{E}_\bullet}, \alpha] \tag{1.5.2.1}$$

pour le supremum $t_{\max}$ des nombres réels t tels que $\mathcal{F}^{\geq t} S^n \mathcal{E}^*$ n'est pas nul pour un certain n. Par exemple, le fait que $c = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ est admissible dans (1.1.1.1) s'obtient de cette manière en utilisant le drapeau aléatoire de l'exemple 1.5.1.1, convenablement translaté.

Problème 1.5.2.1
En rang 2, existe-t-il nécessairement un drapeau aléatoire $\mathcal{E}_\bullet$ pour lequel (1.5.2.1) soit une égalité ?

On n'énoncera pas ici l'analogue du théoreme 1.4.5.2 pour les drapeaux aléatoires. Qu'il suffise de dire que lorsque la capacité globale est décroissante pour l'ordre lexicographique, alors la filtration $\mathcal{F}^{\leq \cdot}$ se compare à la filtration de Harder-Narasimhan de l'espace multi-filtré $(S^n \mathcal{E}^*, (\deg_\nu)_\nu)$.

1.5.3 Remarque conclusive. La lectrice aura noté que la présente section est très brève ; il y a à cela au moins deux raisons :

- ▷ Si le calcul explicite des capacités associées à un drapeau était difficile, celui des capacités associées à des drapeaux aléatoires l'est encore plus. Plus précisément, le présent auteur n'a su en calculer, jusqu'à présent, qu'en présence de symétries permettant de se ramener à un drapeau déterministe, comme dans l'exemple 1.5.1.1.
- ▷ Les drapeaux aléatoires sont des objets très naturels dans le cas présent, qui est celui des espaces projectifs. De plus, ils s'inscrivent un cadre élémentaire qui s'accorde très bien avec la simplicité d'exposition, souhaitée et souhaitable, du présent document. Cependant, il est plus naturel, dans un contexte plus général, de considérer des systèmes de coordonnées locales (déterministes ou non), éventuellement *non-algébriques*. Ce n'est en effet qu'à cette condition qu'apparaît clairement le lien avec la géométrie diophantienne, et en particulier avec la méthode des pentes de Bost en théorie de la transcendance.

Bibliographie

[1] Ahmed Abbes, Thierry Bouche, "Théorème de Hilbert-Samuel arithmétique", Annales de l'Institut Fourier, tome 45 fascicule 2 (1995), 375-401.

[2] Jean-Benoît Bost, "Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masseret G. Wüstholtz)", Séminaire Bourbaki, n°795, 1994-1995, Astérisque 237 (1996), 115-161.

[3] Sébastien Boucksom et Huayi Chen, "Okounkov bodies of filtered linear series", Compositio Mathematica 147 (2011), no. 4, 1205-1229.

[4] Daniel Bump et Persi Diaconis, "Toeplitz minors", J. Combin. Theory Ser. A, 97 (2002), pp. 252-271.

[5] Huayi Chen, "Convergence des polygones de Harder-Narasimhan", Mémoires de la Société Mathématique de France 120 (2010), 1-120.

[6] Jean-Pierre Demailly, "Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d''-cohomologie", Annales de l'institut Fourier 35.4 (1985).

[7] Jean-Pierre Demailly, "Pseudoconvex-concave duality and regularization of currents", Several Complex Variables, MSRI publications, Volume 37 in memory of Michael Schneider, ed. Y.T. Siu, Cambridge Univ. Press (1999), 233-271.

[8] Henri Gillet et Christophe Soulé, "Amplitude arithmetique", Note CRAS Paris 307, Serie I (1988), 887-890.

[9] Xinyi Yuan, "On Volumes of Arithmetic Line Bundles II", arXiv :0909.3680 (2009).

[10] Shouwu Zhang, "Small points and adelic metrics", J. Algebraic Geom. 4 (1995), no. 2.

[11] Shouwu Zhang, "Equidistribution of small points on abelian varieties", Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 1, 159-165.