Introduction à un domaine de recherche
Méthodes L^2 en géométrie complexe

Ambroise Marigot
(sous la direction de Sébastien Boucksom)

Table des matières

1 Introduction

Un des objectifs fondamentaux de la géométrie moderne est la compréhension des variétés à travers l'étude de certains invariants, dont les groupes de cohomologie sont peut-être l'exemple le plus important.
Dans le cas des variétés différentielles, la cohomologie de De Rham peut être présentée comme l'obstruction de la structure d'une variété à ce que l'hypothèse – nécessaire – de fermeture ($d\alpha = 0$) pour une forme différentielle α entraîne l'exactitude de cette dernière (i.e. que α admette un potentiel $d\beta = \alpha$). Toute forme fermée étant localement exacte, cette obstruction fournit une information sur la structure globale de la variété.
Pour les variétés complexes, une théorie cohomologique pour l'opérateur de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}$ de l'analyse complexe a été développée par P. Dolbeault dans les années 50, et occupe aujourd'hui une place centrale en géométrie analytique et algébrique complexe.
Enfin, la cohomologie de faisceaux fournit un langage et des outils puissants pouvant s'appliquer aux deux théories cohomologiques citées. Un faisceau est *grosso modo* la collection des données locales des sections en les points d'une variété, ainsi que des manières de les recoller pour obternir des sections sur des ouverts de la variété. La cohomologie des faisceaux peut être considérée comme un langage permettant d'exprimer de manière naturelle les obstacles au recollement de sections locales pour former des sections globales.
On peut ainsi considérer la cohomologie de De Rham d'une variété M comme la cohomologie du faisceau constant $\mathbb{R}$ sur M, et les groupes $H^{p,\bullet}(X)$ de cohomologie de Dolbeault d'une variété complexe X comme les groupes de cohomologie du faisceau Ω_X^p des germes de p-formes holomorphes.
Un résultat fondamental de la cohomologie des faisceaux est le théorème de De Rham-Weil, qui stipule que la cohomologie $H^\bullet(X, \mathcal{F})$ d'un faisceau $\mathcal{F}$ est fonctoriellement isomorphe à la cohomologie des sections globales d'une résolution par des faisceaux acycliques $(\mathcal{L}^\bullet, d)$:

$$H^q(X, \mathcal{F}) \simeq H^q(\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)).$$

Entre autres, la cohomologie de deux résolutions par des faisceaux acycliques d'un même faisceau sont isomorphes, ce qui permet de considérer d'autres objets que les formes différentielles pour décrire les cohomologies de De Rham et Dolbeault, comme par exemple les courants.

Une autre question fondamentale en géométrie est celle du plongement. Dans le cas réel, il est bien connu que la réponse est affirmative : toute variété différentielle compacte de dimension n se plonge dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$.
Dans le cas complexe, on voit vite que le plongement holomorphe dans $\mathbb{C}^m$ n'est pas possible puisque les fonctions holomorphes globales sont constantes sur une variété compacte. L'espace candidat le plus simple est alors l'espace projectif $\mathbb{P}^m$, et pour construire des plongements – quand cela est possible – on fait appel aux sections de fibrés en droites comme « généralisations des fonctions ». L'application ainsi construite, pour un

fibré donné L, est nommée *application de Kodaira*. Ce n'est généralement pas un plongement : si c'est le cas on dit que le fibré L est *très ample* ; et s'il existe une puissance tensorielle de L très ample on dit simplement que L est *ample*.
Le théorème du plongement de Kodaira fournit alors un critère simple pour déterminer si un fibré en droites est ample :

Théorème 1 (Théorème du plongement de Kodaira)**.** *Soit X une variété kählérienne compacte, et $L \to X$ un fibré en droites holomorphe. Alors L est ample si et seulement si il est positif.*

(Une variété kählérienne est une variété possédant une métrique hermitienne ω fermée.)

L'objet de ce document est d'introduire des applications des méthodes hilbertiennes L^2 à plusieurs outils de la géométrie complexe développés autour de ces thèmes, notamment la théorie de Hodge et la théorie des estimations L^2 de Hörmander.

La théorie de Hodge a été développée par W.V.D. Hodge dans les années 30-40, et a pour but principal de décrire l'algèbre de cohomologie de De Rham d'une variété riemannienne compacte en termes de ses formes harmoniques, qui sont les formes différentielles appartenant au noyau d'un laplacien Δ généralisé (l'opérateur de Laplace-Beltrami). Le résultat central est que toute classe de cohomologie possède un unique représentant harmonique :

Théorème 2 (Théorème d'isomorphisme de Hodge)**.** *Si (M, g) est une variété riemannienne compacte, et qu'on note $\mathcal{H}^k(M)$ l'espace des k-formes Δ-harmoniques, on a*

$$H^k_{DR}(M) \simeq \mathcal{H}^k(M).$$

La théorie de Hodge s'adapte très convenablement à la géométrie complexe dans le contexte des variétés kählériennes :

Théorème 3. *Si (X, ω) est une variété kählérienne compacte et que $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ est l'espace des (p, q)-formes Δ''-harmoniques, on a :*

$$H^{p,q}(X) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X) \qquad \textit{(Isomorphisme de Hodge-Dolbeault)}, \tag{1}$$

$$H^k_{DR}(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) \qquad \textit{(Décomposition de Hodge)}, \tag{2}$$

$$H^{p,q}(X) \simeq \overline{H^{q,p}(X)} \qquad \textit{(Symétrie de Hodge)}. \tag{3}$$

Le théorie de Hodge s'étend aussi en très large partie aux variétés kählériennes (resp. riemanniennes) complètes non nécessairement compactes en considérant des espaces L^2 de courants (les courants sont une généralisation des formes différentielles à l'instar de ce que les distributions sont aux fonctions $\mathcal{C}^\infty$).

La théorie des estimations L^2 de Hörmander part de l'étude analytique de l'équation de Cauchy-Riemann sur des variétés kählériennes – éventuellement singulières – en s'appuyant sur le concept de positivité et fournit des outils extrêmement puissants s'appliquant à des problèmes variés de la géométrie complexe analytique et algébrique, comme par exemple le théorème d'annulation de Nadel et le théorème de plongement de Kodaira. La construction et l'utilisation de métriques singulières permet de résoudre de nombreux problèmes de construction de sections de fibrés en droites holomorphes.

En partant des identités classiques de commutation de la géométrie kählérienne pour les laplaciens Δ'_E et Δ''_E pour un fibré E, on établit l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano qui se dérive en l'inégalité

$$\|\nabla'' u\|^2 + \|\nabla''^\star u\|^2 \geq \int_X \langle [i\Theta(E), \Lambda] u, u \rangle dV.$$

Sous des hypothèses adéquates de positivité de la courbure $i\Theta(E)$ du fibré, cette inégalité amène le théorème fondamental suivant :

Théorème 4 (Théorème des estimations L^2 de Hörmander)**.** *Soit (X, ω) une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe de dimension n, et $E \to X$ un fibré en droites hermitien. Soient $\gamma_1(x) \leq \gamma_2(x) \leq \cdots \leq \gamma_n(x)$ les valeurs propres en tout point de la forme de courbure $i\Theta(E)$ relativement à la métrique ω. Supposons que la courbure soit positive, i.e. $\gamma_1 \geq 0$ partout.*

Alors pour tout $q > 0$ et toute forme $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q} X \otimes E)$ satisfaisant

$$\nabla'' g = 0 \qquad \textit{et} \qquad \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_n)^{-1} |g|^2 dV_\omega < +\infty,$$

il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{n,q-1} X \otimes E)$ vérifiant

$$\nabla'' f = g \qquad \textit{et} \qquad \int_X |f|^2 dV_\omega \leq \int_X (\gamma_1 + \cdots + \gamma_n)^{-1} |g|^2 dV_\omega.$$

Sous des hypothèses convenables, le théorème ci-dessus reste vrai si l'on considère des métriques singulières positives, données dans chaque carte par un poids $e^{-2\varphi}$ où φ est une fonction plurisousharmonique – les fonctions plurisousharmoniques étant *grosso modo* la généralisation des fonctions convexes pour des fonctions $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. En introduisant l'idéal multiplicateur $\mathcal{I}(h)$ des germes de fonctions holomorphes localement L^2 par rapport à la métrique singulière h, on déduit alors des estimations de Hörmander le théorème fondamental suivant :

Théorème 5 (Théorème d'annulation de Nadel)**.** *Soit (X, ω) une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe, et $E \to X$ un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique singulière h. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la forme de courbure satisfasse $i\Theta(E) \geq \varepsilon\omega$. Alors pour tout $q > 0$ on a*

$$H^q(X, \mathcal{O}(K_X + E) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0.$$

Les estimations L^2 de Hörmander dans le cas des métriques singulières permettent aussi de « construire »des sections de fibrés en droites en créant des métriques positives ayant des singularités adéquates ; cette méthode permet notamment de prouver le théorème du plongement de Kodaira.

2 Théorie de Hodge

2.1 Variétés riemanniennes compactes

Le cadre de la théorie initiale est le suivant : soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n, et $E \to M$ un fibré hermitien (ou riemannien) plat de rang r, c'est-à-dire admettant une connexion riemannienne ∇ telle que $\nabla^2 = 0$.

La relation $\nabla^2 = 0$ permet de définir des groupes de cohomologie $H^p(M, E)$ qui sont les groupes de cohomologie du complexe de cochaines $(\Gamma(\Lambda^\bullet(M) \otimes E), \nabla)$. Notre but est d'exhiber des représentants « choisis »de ces classes de cohomologie.

La structure riemannienne de M et la structure hermitienne de E définissent de manière naturelle pour tout p un produit scalaire $\langle \bullet, \bullet \rangle$ sur $\Lambda^p(M) \otimes E$, et donc un produit scalaire global sur $\Gamma(\Lambda^p(M) \otimes E)$:

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle = \int_M \langle u, v\rangle dV.$$

On peut par ailleurs défnir sur E un accouplement sesquilinéaire (bilinéaire dans le cas où E est juste riemannien)

$$\begin{aligned} \Gamma(\Lambda^p(M) \otimes E) \times \Gamma(\Lambda^q(M) \otimes E) &\to \Gamma(\Lambda^{p+q}(M)) \\ (u, v) &\mapsto \{u, v\} \end{aligned}$$

par

$$\{u, v\} = \sum_{\lambda,\mu} \langle e_\lambda, e_\mu\rangle u_\lambda \wedge \overline{v_\mu}, \qquad u = \sum_\lambda u_\lambda \otimes e_\lambda, \qquad v = \sum_\mu v_\mu \otimes e_\mu,$$

de manière indépendante du choix de la trivialisation (e_λ) de E donnée. Cet accouplement induit alors un opérateur *étoile de Hodge* $\star$ sur les formes à valeurs vectorielles via la relation

$$\{s, \star t\} = \langle s, t\rangle dV.$$

L'étoile de Hodge permet de calculer un adjoint formel $\nabla^\star$ (pour le produit scalaire global) de la connexion :

$$\nabla^\star = (-1)^{np+1} \star \nabla \star.$$

On peut alors définir l'*opérateur de Laplace-Beltrami* :

$$\Delta_E = \nabla\nabla^\star + \nabla^\star\nabla.$$

Le *symbole principal* d'un opérateur différentiel est un concept central en théorie des EDP, permettant *grosso modo* d'exprimer sous forme d'un polynôme homogène à coefficients endomorphismes, via la transforméé de Fourier, les termes de plus haut degré (de dérivation) de l'opérateur.

On peut calculer le symbole principal de l'opérateur de Laplace-Beltrami, qui vaut $\sigma_{\Delta_E}(x,\xi) = -|\xi|^2 \,\mathrm{Id}$. Notamment, le symbole est non nul pour tout $\xi \neq 0$; on dit alors que l'opérateur est elliptique.

On peut alors lui appliquer les résultats classiques sur les opérateurs elliptiques, notamment le théorème de finitude, qui se traduit dans notre cas par l'énoncé suivant :

Théorème 6. *Pour tout p, on a une décomposition orthogonale*

$$\Gamma(\Lambda^p(M) \otimes E) = \mathcal{H}^p(M,E) \oplus \operatorname{Im} \nabla \oplus \operatorname{Im} \nabla^\star,$$

*où $\mathcal{H}^p(M,E) = \operatorname{Ker} \Delta_E$ est l'espace des p-**formes harmoniques** sur M à valeurs dans E.*

Comme $\operatorname{Im} \nabla^\star = (\operatorname{Ker} \nabla)^\perp$, on a alors le théorème d'isomorphisme de Hodge

$$H^p_{DR}(M,E) \simeq \mathcal{H}^p(M,E).$$

2.2 Variétés kählériennes compactes

Lorsque (X,ω) est une variété complexe hermitienne et $E \to X$ un fibré hermitien plat, on peut déjà transposer toute la théorie de Hodge réelle à la variété riemannienne (X,g) correspondante (rappelons que la structure complexe de X étant fixée, la forme fondamentale ω, la métrique hermitienne h et la métrique riemannienne g se déduisent les unes des autres).

La connexion se décompose alors en $\nabla = \nabla' + \nabla''$, avec

$$\nabla' : \Gamma(\Lambda^{p,q}(X) \otimes E) \to \Gamma(\Lambda^{p+1,q}(X) \otimes E), \quad \nabla'' : \Gamma(\Lambda^{p,q}(X) \otimes E) \to \Gamma(\Lambda^{p,q+1}(X) \otimes E).$$

De plus, l'étoile de Hodge $\star$ est de bidegré pur, à savoir

$$\star : \Gamma(\Lambda^{p,q}(X) \otimes E) \to \Gamma(\Lambda^{n-p,n-q}(X) \otimes E).$$

On peut donc s'en servir pour calculer – de la même manière que dans le cas réel – les adjoints formels $\nabla'^\star$ et $\nabla''^\star$ des opérateurs ∇' et ∇'', et remarquer que les laplaciens Δ'_E et Δ''_E, définis de manière analogue, sont des opérateurs différentiels elliptiques auto-adjoints d'ordre 2.

On a alors de manière totalement analogue au cas réel l'isomorphisme suivant, dit *isomorphisme de Hodge-Dolbeault* :

$$\mathcal{H}^{p,q}(X,E) \simeq H^{p,q}(X,E),$$

où $\mathcal{H}^{p,q}(X, E)$ est l'espace des (p, q)-formes Δ''_E-harmoniques.

Il peut être intéressant de noter que tous les résultats énoncés jusqu'ici restent vrais pour des variétés hermitiennes non nécessairement kählériennes. On peut aussi remplacer la condition ≪ E est un fibré plat ≫par "E est un fibré holomorphe muni de sa connexion de Chern" – dans ce dernier cas, cependant, nous n'avons pas de résultat particulier concernant ∇' ou Δ'_E.

La caractéristique importante des variétés kählériennes est qu'elles nous permettent de comparer les cohomologies de De Rham et de Dolbeault – deux objets de natures pourtant *a priori* très différentes, ne serait-ce que parce que les classes de transformations les laissant invariants ne sont en général pas les mêmes.

En fait, une métrique kählérienne peut être vue comme une métrique approximable à l'ordre deux en tout point par la métrique canonique $\sum_i dz_i \wedge d\overline{z_i}$ de $\mathbb{C}^n$ en coordonnées géodésiques. Cela implique notamment que la variété (X, ω) vérifie les identités de commutation – facilement établies dans $\mathbb{C}^n$ – suivantes :

Proposition 1 (Identités de commutation de la géométrie kählérienne)**.** *Soit L l'opérateur $L : \sigma \mapsto \omega \wedge \sigma$ et Λ son adjoint formel. Alors,*

$$[\nabla''^{\star}, L] = i\nabla', \qquad [\nabla'^{\star}, L] = -i\nabla'',$$
$$[\Lambda, \nabla''] = -i\nabla'^{\star}, \qquad [\Lambda, \nabla'] = i\nabla''^{\star}.$$

De ces identités, vraies pour toute connexion hermitienne ∇ (non nécessairement plate) sur une variété kählérienne, on déduit l'identité

Proposition 2 (Identité de Bochner-Kodaira-Nakano)**.** *On a*

$$\Delta''_E = \Delta'_E + [i\Theta(E), \Lambda].$$

Notamment, si la connexion est plate, il en découle $\Delta_E = 2\Delta''_E = 2\Delta'_E$.

Cette dernière égalité est très importante et nous permet de faire la comparaison annoncée : en effet, toute forme Δ''_E-harmonique est alors Δ_E-harmonique, et a un conjugué Δ'_E-harmonique donc Δ''_E-harmonique. On en déduit donc

$$\mathcal{H}^k(X, E) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X, E), \qquad \mathcal{H}^{p,q}(X, E) = \overline{\mathcal{H}^{q,p}(X, E)}, \tag{4}$$

ce qui, combiné à l'isomorphisme de Hodge-Dolbeault, donne les relations (1), (2) et (3) énoncées dans l'introduction.

Il est à noter qu'en examinant des groupes de cohomologie définis grâce à l'opérateur $\nabla'\nabla''$, nommés groupes de cohomologie de Bott-Chern, on peut prouver un résultat un peu plus fort : les isomorphismes

$$H^k_{DR}(X,E) \simeq \sum_{p+q=k} H^{p,q}(X,E), \qquad H^{p,q}(X,E) \simeq \overline{H^{q,p}(X,E)},$$

sont en fait naturels et ne dépendent pas de la métrique kählérienne choisie.

2.3 Variétés kählériennes complètes

Si on enlève l'hypothèse de compacité, un peu de travail supplémentaire est nécessaire pour transporter la théorie de Hodge. Essentiellement, on doit travailler avec des courants (des formes différentielles à coefficients distributions) L^2, et des considérations de domaine de l'adjoint hilbertien – qui doit coïncider avec celui de l'adjoint formel pour pouvoir transporter la théorie – amènent naturellement à l'hypothèse nécessaire de complétude des variétés considérées.

En utilisant quelques résultats classiques d'analyse fonctionnelle, on peut alors établir le théorème suivant :

Théorème 7. *Soit (X,ω) est une variété kählérienne complète, et ∇ une connexion plate. Alors on a les décompositions orthogonales*

$$L^2(X,\Lambda^\bullet(X)\otimes E) = \mathcal{H}^\bullet_{L^2}(X,E) \oplus \overline{\operatorname{Im}\nabla} \oplus \overline{\operatorname{Im}\nabla^\star},$$

$$\operatorname{Ker}\nabla = \mathcal{H}^\bullet_{L^2}(X,E) \oplus \overline{\operatorname{Im}\nabla},$$

où $\mathcal{H}^\bullet_{L^2}(X,E) = \left\{u \in L^2(X,\Lambda^\bullet(X)\otimes E) \mid \Delta_E u = 0\right\}$ est l'espace des k-formes L^2 qui sont Δ_E-harmoniques sur X.

On a bien évidemment des résultats analogues pour ∇' et ∇''. En définissant les groupes de cohomologie de De Rham L^2 comme les groupes de cohomologie du complexe $(K^\bullet,\nabla)$ avec

$$K^\bullet = \operatorname{Dom}\nabla \cap L^2(\Lambda^\bullet(X)\otimes E)$$

et les groupes de cohomologie de Dolbeault L^2 définis de manière analogue, on obtient alors les isomorphismes de Hodge et de Hodge-Dolbeault L^2 :

$$\mathcal{H}^k_{L^2}(X,E) \simeq H^k_{DR,L^2}(X,E)_{sep}, \qquad \mathcal{H}^{p,q}_{L^2}(X,E) \simeq H^{p,q}_{L^2}(X,E)_{sep},$$

où $H^k_{DR,L^2}(X,E)_{sep} = \operatorname{Im}\nabla/\overline{\operatorname{Ker}\nabla}$ est l'espace séparé associé à $H^k_{DR,L^2}(X,E)_{sep}$.

Les identités de commutation kählériennes étant quant à elles locales, elles restent vraies, ainsi que les décompositions (4) pour les analogues L^2 ; on a donc finalement le résultat suivant :

Théorème 8. *Soit (X,ω) une variété kählérienne complète et $E \to X$ un fibré hermitien plat. On a des isomorphismes canoniques*

$$H^k_{DR,L^2}(X,E)_{sep} \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}_{L^2}(X,E)_{sep}, \qquad H^{p,q}_{L^2}(X,E)_{sep} \simeq \overline{H^{q,p}_{L^2}(X,E)_{sep}}.$$

On prouve par ailleurs facilement que si les groupes de cohomologie de De Rham et Dolbeault L^2 sont de dimension finie, alors ils sont séparés et donc $H^{\bullet}_{DR,L^2}(X,E)_{sep} = H^{\bullet}_{DR,L^2}(X,E)$ (*idem* pour les groupes de Dolbeault).

3 Estimations L^2

Les applications de la théorie des estimations L^2 sont très vastes, aussi le choix est fait ici de présenter les idées principales menant aux théorèmes d'estimations et à leur usage pour obtenir les théorèmes de Nadel et de Kodaira.

Une différence fondamentale de la géométrie complexe vis-à-vis de la géométrie différentielle réelle est l'absence de partitions de l'unité, outil rendant souvent facile le passage de propriétés locales à des propriétés globales.
Une des idées sous-jacentes de la portée des estimations L^2 et de l'intérêt de considérer des métriques singulières est que l'annulation de certains groupes de cohomologie peut être vue comme la possibilité de résoudre l'équation $\overline{\partial}u = \overline{\partial}\theta f$ pour des sections f holomorphes définies localement autour d'un point x et tronquées par des fonctions « tronquantes »θ. On obtient alors une section $F = \theta f - u$ holomorphe, mais la correction u peut en général perturber les propriétés locales pour lesquelles f a été construite. Cependant si la métrique est singulière en x, on peut contrôler cette perturbation.

3.1 Définitions centrales

Les différentes notions de positivité jouent un rôle central en géométrie algébrique et analytique complexe. Nous donnons ici une définition restreinte de la positivité, dans le cas des fibrés en droites holomorphes.

On rappelle que si X^n est une variété complexe, tout fibré holomorphe hermitien $E \to X$ admet un opérateur naturel $\overline{\partial}$ sur les formes différentielles à coefficients dans E ; ainsi qu'une connexion hermitienne particulière ∇, nommée connexion de Chern de E, vérifiant $\nabla'' = \overline{\partial}$.

Définition 1. *Soit $\tilde{\Theta}$ la forme hermitienne associée à la 2-forme réelle $i\Theta(E)$, où $\Theta(E)$ est la courbure de la connexion de Chern. On dit que le fibré E est* ***positif*** *(resp.* ***semi-positif****) si $\tilde{\Theta}$ est définie positive (resp. positive).*

Comme indiqué précédemment, nous serons amenés à considérer des métriques présentant des singularités, que nous définirons analytiquement pour plus de flexibilité :

Définition 2. *Soit $E \to X$ un fibré en droites holomorphe. Une métrique hermitienne* ***singulière*** *sur E est une métrique donnée dans toute trivialisation $\tau : E\big|_{\Omega} \to \Omega \times \mathbb{C}$ par*

$$\|\xi\| = |\tau(\xi)|e^{-\varphi},$$

où φ est une fonction L^1_{loc} arbitraire est nommée ***poids de la métrique*** *relativement à τ.*

On a alors $i\Theta(E) = 2\partial\overline{\partial}\varphi$, ce qui justifie la notation exponentielle du poids de la métrique.

Enfin, nous définissons l'application de Kodaira, qui sous certaines conditions donne un plongement projectif :

Définition 3. *Soit $E \to X$ un fibré en droites holomorphe, et soient $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ des sections holomorphes non nulles de E.*
Notons Σ le système linéaire engendré par les σ_j, et $B_\Sigma = \bigcap_j \sigma_j^{-1}(0)$ son ensemble base. On a alors une application méromorphe

$$\Phi_\Sigma : X \setminus B_\Sigma \to \mathbb{P}^{N-1}, \qquad x \mapsto [\sigma_1(x) : \dots : \sigma_N(x)],$$

nommée ***application de Kodaira****.*

3.2 Estimations L^2 de Hörmander et théorème d'annulation de Nadel

Soit $E \to X$ un fibré hermitien sur une variété kählérienne (X, ω). En intégrant l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano $\Delta''_E = \Delta'_E + [i\Theta(E), \Lambda]$, on établit l'inégalité portant le même nom

$$\|\nabla'' u\|^2 + \|\nabla''^\star u\|^2 \geq \int_X \langle [i\Theta(E), \Lambda]u, u\rangle dV_\omega.$$

Dans le cas compact, cette inégalité donne presque immédiatement plusieurs théorèmes d'annulation (notamment le théorème d'annulation de Kodaira-Akizuki-Nakano) en s'appuyant sur l'idée suivante : sous certaines conditions on peut s'assurer que l'opérateur $A_\omega := [i\Theta(E), \Lambda]$ est positif, et donc si une forme u est harmonique (i.e. de terme de gauche nul) elle doit être nulle :

Proposition 3. *Si A_ω est défini positif sur $\Gamma(\Lambda^{p,q}(X) \otimes E)$, alors on a*

$$H^{p,q}(X, E) = \mathcal{H}^{p,q}(X, E) = 0.$$

Dans le cas non compact, un peu de travail supplémentaire est nécessaire pour établir un théorème dont l'énoncé est un peu lourd mais est essentiellement assez similaire à la proposition ci-dessus pour les formes L^2 sous les hypothèses supplémentaires :

- (X, ω) est complète,
- $\int_X \langle A_\omega g, g\rangle dV_\omega < +\infty$.

Si (X, ω) n'est pas complète mais faiblement pseudoconvexe, des propriétés d'approximation de ω par des métriques complètes permettent alors de dériver ce théorème en celui des estimations L^2 de Hörmander énoncé dans l'introduction.

Si l'on cherche à considérer le cas de métriques hermitiennes singulières, on peut appliquer des techniques standard de régularisation et remarquer que les estimations L^2 passent à la limite. On a alors le théorème suivant (un énoncé général pour des variétés faiblement pseudoconvexe existe, mais pour plus de simplicité nous nous restreindrons à partir de maintenant au cas compact) :

Théorème 9. *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte et $E \to X$ un fibré en droites holomorphe admettant une métrique singulière de poids local $\varphi \in L^1_{loc}$. Supposons E positif.*

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $q > 0$ et $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q}(X) \otimes E)$ telle que $\nabla'' g = 0$, il existe $f \in L^2(\lambda^{n,q-1}(X) \otimes E)$ telle que

$$\int_X |f|^2 dV_\omega \leq C \int_X |g|^2 dV_\omega.$$

La considération de métriques singulières rend naturelle l'utilisation d'idéaux multiplicateurs définis de la manière suivante :

Définition 4. *Soit φ une fonction plurisousharmonique sur un ouvert $\Omega \subset X$. On note $\mathcal{I}(\varphi)$, et on appelle **faisceau d'idéaux multiplicateurs** associé au poids φ, l'idéal de $\mathcal{O}_X(\Omega)$ constitué des fonctions localement L^2 relativement à la métrique de poids φ (i.e. telles que $|f|^2 e^{-2\phi}$ soit localement intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dans une carte).*

Pour que cette définition soit utile, il faut pouvoir l'étendre par recollements de manière naturelle lorsque φ provient d'une métrique singulière h sur un fibré en droites E. Cela est possible en remarquant que $\mathcal{I}(\varphi)$ est un faisceau cohérent (le résultat n'est pas trivial et est dû à Nadel).

On définit ainsi un faisceau $\mathcal{I}(h)$ d'idéaux multiplicateurs correspondant aux germes de fonctions localement L^2 relativement à la métrique.

On peut alors énoncer le théorème d'annulation de Nadel (dans le cas compact) : si E est positif, alors $H^q(X, \mathcal{O}(K_X + E) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0$ pour tout $q > 0$. Ce théorème est essentiellement une traduction du théorème des estimées L^2 de Hörmander dans un langage plus algébrique.

3.3 Plongement de Kodaira et conjecture de Fujita

Le théorème d'annulation de Nadel admet de nombreux corollaires, dont le suivant :

Corollaire 1. *Soient (X, ω), E et φ vérifiant les hypothèses du théorème d'annulation de Nadel. Supposons que pour un certain $x \in X$ on ait*

$$\liminf_{z \to x} \frac{\varphi(z)}{\log |z - x|} \geq n + s$$

pour un entier s dans un voisinage de x. Alors $H^0(X, \mathcal{O}(K_X + E))$ engendre tous les s-jets de sections au point x.

L'idée exprimée par ce corollaire est que si la métrique est « suffisamment »singulière en x, alors la perturbation en x par la résolution de l'équation $\overline{\partial}$ doit être nulle jusqu'à un certain ordre.

On dérive de là le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit (X, ω) une variété kählérienne compacte et L un fibré en droites positif sur X. Soient $x_1, \ldots, x_N$ des points de X. Alors il existe des constantes a et b dépendant uniquement du fibré L et du nombre N de points telles que pour tout $s \in \mathbb{N}$, $H^0(X, \mathcal{O}(mL))$ engendre les jets d'ordre s en tout point x_j dès que $m \geq as + b$.*

Avec quelques arguments de compacité, ce lemme prouve donc le théorème du plongement de Kodaira :

Théorème 10 (Théorème du plongement de Kodaira)**.** *Soit X une variété kählérienne compacte, et $L \to X$ un fibré en droites holomorphe. Alors L est ample si et seulement si il est positif.*

Autour de la question du plongement, on peut se demander s'il existe une borne effective $m_0(n)$ telle que pour tout fibré ample L sur une variété kählérienne de dimension n, $m_0 L$ soit très ample.
La réponse s'avère négative, mais si l'on remplace mL par le fibré « adjoint »$K_X + mL$, une réponse universelle semble se dégager :

Conjecture 1 (Conjecture de Fujita)**.** *Si L est un fibré en droites ample sur une variété kählérienne X de dimension n, alors :*

1. *$K_X + (n+1)L$ est engendré par ses sections globales,*
2. *$K_X + (n+2)L$ est très ample.*

La conjecture a été prouvée dans le cas $n = 2$ par Reider ; et la première assertion pour $n = 3$ par Ein-Lazarsfeld et Fujita, dont la méthode a été raffinée par Kawamata pour obtenir le cas $n = 4$. Les autres cas de la conjecture (première assertion pour $n \geq 5$ et seconde pour $n \geq 3$) restent ouverts.

La technique des estimations de Hörmander permet cependant d'établir un résultat assez fort en lien avec la conjecture, établi par Fujita et généralisé par Demailly. Nous présentons ici l'énoncé de Fujita, plus facile à énoncer. On dit qu'un fibré K est **nef** (numériquement effectif) si $mK + L$ est ample pour tout fibré ample L.

Théorème 11 (Théorème de Fujita)**.** *Si L est un fibré en droites ample sur une variété kählérienne X de dimension n, alors $K_X + (n+1)L$ est nef.*