Introduction au Domaine de Recherche

Opérades et structures commutatives à homotopie près

Najib Idrissi Kaïtouni

21 octobre 2014
Sous la direction de Benoit Fresse

Table des matières

Introduction

Les *structures algébriques* sont omniprésentes en mathématiques : groupes, anneaux, corps, monoïdes, algèbres associatives, commutatives, de Lie, de Poisson... En général, on définit de telles structures en les munissant d'un certain nombre de lois de composition (produit, crochet...) et en imposant certains axiomes (associativité, commutativité...). Par analogie, cela reviendrait à considérer les anneaux comme étant définis uniquement par un ensemble de générateurs et un ensemble de relations : c'est un point de vue utile, mais considérer l'anneau lui-même comme un objet à part entière permet de simplifier de nombreux concepts (on peut essayer de définir un idéal maximal de ce point de vue pour s'en convaincre), et certains anneaux ne sont pas naturellement définis par générateurs et relations.

Vers la fin des années 60, Boardman et Vogt [BV73] et May [May72] introduisent les *opérades*. Ce sont des objets qui encodent de manière combinatoire les types d'algèbres. Au lieu de définir un type d'algèbre par « générateurs et relations », on considère toutes les opérations possibles (les éléments de l'opérade) et toutes les relations qui existent entre ces opérations quand on les compose entre elles. Cela permet, entre autres, de pouvoir comparer entre eux les types d'algèbres, et de considérer des types d'algèbres plus complexes que les types usuels.

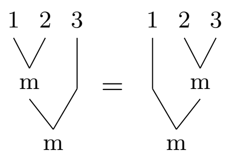
La définition de May se base sur des travaux antérieurs, notamment les PROPs de Mac Lane [Mac65], les associahèdres de Stasheff [Sta61] ; on retrouve déjà l'idée chez les analyseurs de Lazard [Laz55]. Utilisées au début pour étudier les espaces de lacets (section 2.1), elles ont depuis trouvé de nombreuses applications, en topologie algébrique et en algèbre homologique, en particulier au travers de la dualité de Koszul (Ginzburg et Kapranov [GK94], section 3).

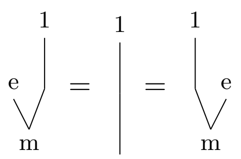
1 Opérades

1.1 Idée générale

Une structure algébrique (eg. « algèbre associative ») est caractérisée par des opérations, ayant un certain nombre de variables d'entrée et une sortie, qui agissent sur les algèbres du type en question (eg. le produit $m = m(x_1, x_2)$ d'arité 2 qui agit sur les monoïdes). Les constantes de structure (eg. l'unité e du produit) sont des opérations qui ne prennent aucune variable d'entrée. Il est possible de permuter les variables d'entrée : l'opération $m(x_2, x_1)$ prend en entrée deux variables et les multiplie dans l'ordre opposé.

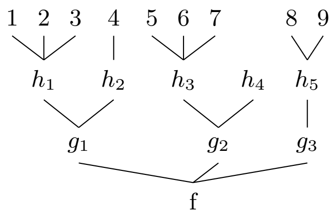
Il existe bien sûr toujours une opération « identité », notée 1, qui prend une variable en entrée et la laisse inchangée. Les opérations sont composables : par exemple on peut considérer une nouvelle opération $m(m, 1) = m(m(x_1, x_2), x_3)$, qui prend trois variables en entrée, multiplie les deux premières, puis multiplie le résultat avec la troisième. Cette composition vérifie certaines relations, ce qui peut se représenter sous la forme d'arbre (les numéros représentent les variables d'entrée ; e est une constante, donc n'a pas de variables d'entrée) :



$\Longleftrightarrow$ m est associatif ;


$\Longleftrightarrow$ e est l'unité de m.

Une composition sur plusieurs niveaux pourrait être potentiellement ambiguë. Mais au niveau des structures algébriques, la composition des opérations est associative, et les axiomes des opérades demandent donc qu'une composition comme celle qui suit n'est pas ambiguë :



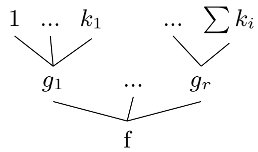
1.2 Définition précise

On se place dans une catégorie monoïdale (ie. munie d'un produit tensoriel) symétrique (ie. $A \otimes B \cong B \otimes A$) complète et cocomplète $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$. Les exemples habituels considérés sont la catégorie des ensembles ou des espaces topologiques potentiellement pointés ($\otimes = \times$, $\mathbb{1} = \{*\}$), des espaces vectoriels (potentiellement gradués et munis d'une différentielle de degré -1 et de carré nul – on parle alors de dg-objet). La définition originelle des opérades (topologiques) est donnée par May [May72], et on peut se référer à Fresse [Fre09] et Loday et Vallette [LV12] pour un traitement plus moderne.

Définition 1.1. Un **$\mathfrak{S}$-module** M est une suite $\{M(n)\}_{n\geq 0}$ d'objets de $\mathcal{C}$, l'objet $M(n)$ étant muni d'une action à droite du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. La catégorie associée $\mathcal{M}$ est une catégorie monoïdale symétrique enrichie sur $\mathcal{C}$, en posant $(M \otimes N)(n) = \bigoplus_{p+q=n} M(p) \otimes_{\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q} N(q)$ et comme unité $\mathbb{1}$ (concentré en arité 0).

Étant donné une autre catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{E}$ enrichie sur $\mathcal{C}$, on peut définir le produit « de composition » $M \circ X = \bigoplus_{n\geq 0} M(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} X^{\otimes n}$ ($M \in \mathcal{M}$, $X \in \mathcal{E}$). Cela munit en particulier $\mathcal{M} = \mathcal{E}$ d'une nouvelle structure monoïdale symétrique $(\mathcal{M}, \circ, I)$, avec pour unité $I(1) = \mathbb{1}$, $I(n \neq 1) = 0$.

Définition 1.2. Une **opérade** (symétrique) $\mathtt{P}$ est un monoïde interne à $(\mathcal{M}, \circ, I)$.



Concrètement, une opérade est un $\mathfrak{S}$-module $\{\mathtt{P}(n)\}$ muni d'un morphisme $\mathbb{1} \to \mathtt{P}(1)$, et de morphismes de composition qui vérifient des propriétés d'associativité et d'équivariance (voir les références pour les axiomes explicites) :

$$\gamma : \mathtt{P}(r) \otimes \mathtt{P}(k_1) \otimes \ldots \otimes \mathtt{P}(k_r) \to \mathtt{P}(k_1 + \ldots + k_r) \iff \gamma : \mathtt{P} \circ \mathtt{P} \to \mathtt{P}.$$

Les éléments de $\mathtt{P}(r)$ représentent les opérations d'arité r. Le morphisme $\mathbb{1} \to \mathtt{P}(1)$ représente l'opération identité. Les morphismes γ décrivent comment composer les opérations entre elles : $\gamma(f; g_1, \ldots, g_r) =: f(g_1, \ldots, g_r)$ est l'opération où la sortie de g_i est branchée dans la $i$ème entrée de f. La représentation sous forme d'arbre permet de mieux comprendre comment interpréter les γ et quels sont les axiomes qu'ils doivent vérifier.

1.3 Exemples

L'exemple fondamental est l'**opérade des endomorphismes** d'un objet $X \in \mathcal{E}$:

$$\mathtt{End}_X(n) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X^{\otimes n}, X).$$

L'opération identité est l'identité $1_X : X \to X$, et la composition est la composition évidente des morphismes : $(f(g_1, \ldots, g_r))(x_1, \ldots, x_{k_1+\ldots+k_r}) := f(g_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots)$. Les opérades sont en fait conçues de telle sorte que $\mathtt{End}_X$ soit tautologiquement une opérade. L'intérêt des opérades vient de la définition suivante :

Définition 1.3. Une **algèbre** sur une opérade $\mathtt{P}$ est un morphisme d'opérades $\mathtt{P} \to \mathtt{End}_A$. De manière équivalente, une algèbre sur $\mathtt{P}$ est donnée par une action de monoïde $\mathtt{P} \circ A \to A$.

De manière explicite (dans la catégories des ensembles par exemple), si A est une algèbre sur $\mathtt{P}$, alors pour chaque opération $\alpha \in \mathtt{P}(r)$ d'arité r on dispose d'un morphisme $\bar{\alpha} : A^{\times r} \to A$. Ces morphismes, composés entre eux, vérifient les lois de composition qui existent dans l'opérade $\mathtt{P}$. La $\mathtt{P}$-algèbre libre sur X est donnée par $\mathtt{P} \circ X$.

Cette définition englobe de nombreux types de structures algébriques. Par exemple, on a les opérades $\mathtt{Ass}$ et $\mathtt{Com}$ des algèbres associatives et commutatives (et leurs versions unitaires $\mathtt{Ass}_+$ et $\mathtt{Com}_+$), l'opérade $\mathtt{Lie}$ des algèbres de Lie... Ces opérades peuvent être décrites par générateurs et relations : par exemple $\mathtt{Com}$ est engendrée par une opération $\mu(x_1, x_2) = \mu(x_2, x_1)$ (il faut décrire comment $\mathfrak{S}_n$ agit sur les générateurs d'arité n) avec la relation $\mu(\mu(x_1, x_2), x_3) = \mu(x_1, \mu(x_2, x_3))$. L'opérade $\mathtt{Ass}$ a deux générateurs $m(x_1, x_2)$ et $\bar{m}(x_1, x_2)$, avec $m(x_2, x_1) = \bar{m}(x_1, x_2)$ et $m(m(x_1, x_2), x_3) = m(x_1, m(x_2, x_3))$.

Remarque 1.4. Ceci est une généralisation des représentation d'algèbres associatives (qui généralisent les représentations de groupes). La composition induit un produit associatif $\mathtt{P}(1) \otimes \mathtt{P}(1) \to \mathtt{P}(1)$, et réciproquement toute algèbre associative A induit une opérade $\mathtt{P}_A$ concentrée en arité 1. Une algèbre sur $\mathtt{P}_A$ est alors exactement une représentation de A.

On peut déjà interpréter certains résultats de ce point de vue. Par exemple, toute algèbre commutative est une algèbre associative ; cela se traduit par un morphisme d'opérades $\mathtt{Ass} \to \mathtt{Com}$ qui envoie les générateurs $m(x_1, x_2)$ et $m(x_2, x_1)$ de $\mathtt{Ass}$ sur le générateur $\mu(x_1, x_2) = \mu(x_2, x_1)$ de $\mathtt{Com}$. De même, une algèbre associative est une algèbre de Lie, ce qui correspond à un morphisme $\mathtt{Lie} \to \mathtt{Ass}$ qui envoie le crochet (générateur) $\lambda(x_1, x_2) \in \mathtt{Lie}(2)$ sur $m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1)$.

1.4 Variations

Il existe plusieurs variations du concept d'opérade :

- On peut définir de manière équivalente les opérades par des morphismes de composition partiels $\circ_i$, où $f \circ_i g$ est l'opération où la sortie de g est branchée dans la $i$ème entrée de f et l'identité dans le reste des entrées.
- Les opérades non symétriques, où l'on ne demande pas d'action des $\mathfrak{S}_n$ sur les opérations. Il y a une opérade non symétrique associative $\mathtt{As}$, mais pas d'opérade commutative, par exemple.
- Les coopérades encodent les cogèbres : chaque coopération a une entrée et plusieurs sorties. De manière équivalente, une coopérade est une opérade dans la catégorie duale.
- Les prop(érade)s sont une généralisation où les opérations ont plusieurs entrées et sorties. On peut s'en servir pour modéliser les bigèbres (associatives, Lie...).
- Les opérades colorées (ou multicatégories) sont aux opérades ce que les catégories sont aux monoïdes : on associe des couleurs (objets de la multicatégorie) aux entrées et sorties des opérations. Par exemple, si les couleurs sont $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$, on peut avoir des opérations du type $(\clubsuit; \diamondsuit; \diamondsuit) \to \spadesuit$, ou encore $(\diamondsuit; \heartsuit) \to \heartsuit$. On ne peut alors brancher une sortie que dans une entrée de couleur correspondante. Si $\mathtt{P}$ est une opérade, les morphismes de $\mathtt{P}$-algèbres sont des algèbres sur une opérade à deux couleurs $\mathrm{Map}_{\mathtt{P}}$.

2 Les petits cubes

2.1 Principe de reconnaissance

Étant donné un (bon) espace topologique X muni d'un point base $* \in X$, on définit l'**espace des lacets** $\Omega X = \{f : [0, 1] \to X \mid f(0) = f(1) = *\}$ muni de la topologie compacte-ouverte.

On peut itérer cette construction : $\Omega^n X = \{f : [0,1]^n \to X \mid f(\partial[0,1]^n) = *\}$.

Une des premières applications des opérades fut de reconnaître les espaces du type $\Omega^n X$ à homotopie près. Pour cela, on introduit des opérades particulières, les opérades des petits cubes $\mathtt{C}_n$. On considère les plongements rectilinéaires du cube $[0,1]^n$ dans lui-même, ie. ceux qui sont des compositions de translations et de matrices diagonales à coefficients positifs. L'espace $\mathtt{C}_n(r)$ est alors l'espace des r-uplets de tels plongements, dont les images ont des intérieurs deux à deux disjoints. La composition est la composition des plongements (figure 1).

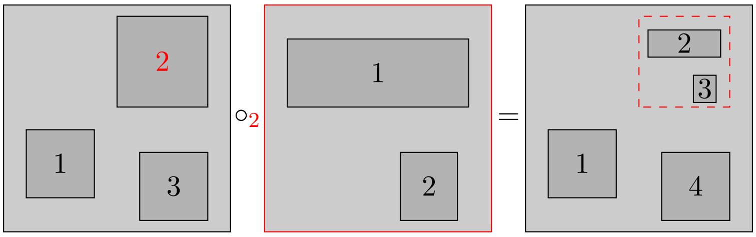


Figure 1 – Exemple de composition dans $\mathtt{C}_2$

Alors $\Omega^n X$ est une algèbre sur $\mathtt{C}_n$, en posant pour $\alpha \in \mathtt{C}_n(r)$ et $f_1, \dots, f_r \in \Omega^n X$:

$$\alpha(f_1, \dots, f_r)(u) = \begin{cases} f_i(t) & u = \alpha_i(t), \\ * & u \notin \bigcup \mathrm{im}(\alpha_i). \end{cases}$$

La condition au bord assure que $\alpha(f_1, \dots, f_r) \in \Omega^n X$ est bien défini et continu, et on vérifie que la composition dans $\mathtt{C}_n$ s'envoie bien sur la composition des lacets dans $\mathtt{End}_{\Omega^n X}$.

L'opérade $\mathtt{C}_n$ est incluse dans $\mathtt{C}_{n+1}$ via $[0,1]^n \times 0 \subset [0,1]^{n+1}$, et on note $\mathtt{C}_\infty$ la colimite (l'« union ») des $\mathtt{C}_n$. On vérifie de même que si X est un espace de lacets d'ordre infini (ie. il existe une suite X_n avec $X_0 = X$ et $X_n \simeq \Omega X_{n+1}$), alors c'est une algèbre sur $\mathtt{C}_\infty$.

Théorème 2.1 (May [May72] et Boardman et Vogt [BV73])**.** *Si Y est un espace connexe par arcs muni d'une structure de $\mathtt{C}_n$-algèbre, $1 \le n \le \infty$, alors il existe un n-espace de lacets X faiblement équivalent à Y via des morphismes de $\mathtt{C}_n$-algèbres.*

Idée de preuve. La preuve (de May) de ce théorème repose sur la construction d'un « délaçage » explicite $B_n Y$ (qui dépend de la structure d'algèbre E_n de Y) via une construction bar simpliciale, et de l'utilisation d'un théorème d'approximation qui permet de relier les algèbres libres sur E_n et les algèbres libres sur l'opérade $\Omega^n \Sigma^n$. □

En général, on appelle **opérade** E_n une opérade $\mathtt{P}$ faiblement équivalente à l'opérade $\mathtt{C}_n$ (ie. quand il existe un zigzag de morphismes d'opérades $\mathtt{P} = \mathtt{P}_1 \xleftarrow{\sim} \mathtt{P}_2 \xrightarrow{\sim} \dots \xleftarrow{\sim} \mathtt{P}_l = \mathtt{C}_n$ qui induisent des équivalences d'homotopie sur les espaces $\mathtt{P}_l(r)$). On peut citer par exemple l'opérade des petits disques, l'opérade de Kontsevich ou l'opérade de Fulton-MacPherson (section 2.3).

2.2 Conjecture de Deligne

Dans toute la suite, la catégorie de base sera celle des dg-espaces vectoriels. Les opérades E_n de la section 2.1 sont au centre de nombreux résultats, dont la reconnaissance des espaces de lacets et l'interpolation $A_\infty \simeq E_1 \hookrightarrow E_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow E_\infty$ entre types d'algèbres homotopiques de la section 3.

Grâce au foncteur des chaînes singulières C_* (sur un corps $\Bbbk$ de caractéristique nulle pour simplifier) et au morphisme de Künneth, les opérades topologiques $\mathtt{C}_n$ donnent des dg-opérades $C_*(\mathtt{C}_n)$. Comme avant, on appelle « opérade E_n » toute opérade **cofibrante** (section 3) faiblement équivalente à $C_*(\mathtt{C}_n)$. On peut également appliquer le foncteur homologie pour obtenir des opérades en modules gradués $e_n := H_*(\mathtt{C}_n)$. Celles-ci sont en fait bien connues :

Définition 2.2. Une n-**algèbre de Gerstenhaber** $(A, \cdot, [\,,\,])$ est la combinaison d'une algèbre commutative $(A, \cdot)$ et d'une algèbre de Lie $(A, [\,,\,])$ avec un crochet de degré $n-1$ vérifiant la relation de Leibniz $[a, b \cdot c] = [a, b] \cdot c + \pm b \cdot [a, c]$.

On note $\mathtt{Ger}_n$ l'opérade des n-algèbres de Gerstenhaber. Dans le cas $n = 1$, on parle d'**algèbre de Poisson** : $\mathtt{Poi} := \mathtt{Ger}_1$. Ces opérades sont engendrées par le produit μ et le crochet λ.

Les algèbres de Poisson apparaissent naturellement en géométrie symplectique ($C^\infty(X)$ est une algèbre de Poisson pour une variété symplectique X) et dans l'étude des groupes quantiques.

Théorème 2.3 (Cohen [Coh76])**.** *L'homologie de E_n est donnée par : $e_1 = \mathtt{Ass}$; $e_\infty = \mathtt{Com}$; $e_n = \mathtt{Ger}_n$, $1 < n < \infty$.*

En théorie de la déformation, la **cohomologie de Hochschild** $HH^*(A)$ d'une algèbre associative $(A, \cdot)$ (voir aussi la section 5) est définie comme l'homologie d'un complexe de cochaînes $CH^n(A) = \operatorname{Hom}(A^{\otimes n}, A)$ avec comme différentielle $b : CH^n(A) \to CH^{n+1}(A)$:

$$\begin{aligned}(bf)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) = \sum_i \pm f(\ldots \otimes a_i \cdot a_{i+1} \otimes \ldots) \\ + \pm a_1 \cdot f(a_2 \otimes \ldots) + \pm f(\ldots \otimes a_n) \cdot a_{n+1}.\end{aligned}$$

Elle donne des obstructions à l'existence de déformations de $(A, \cdot)$, par exemple les déformations formelles : des produits associatifs $\star : A[[\hbar]] \otimes A[[\hbar]] \to A[[\hbar]]$ définis sur les séries formelles à coefficients dans A, tels que $a \star b \equiv a \cdot b \pmod{\hbar}\ \forall a, b \in A$.

On peut définir par des formules explicites un cup-produit et un crochet de Lie sur $HH^*(A)$ qui en font une 2-algèbre de Gerstenhaber. Deligne posa la question en 1993 : existe-t-il une structure de E_2-algèbre sur $CH^*(A)$ qui induit en homologie la structure de $\mathtt{Ger}_2$-algèbre sur $HH^*(A)$?

Théorème 2.4 (Conjecture de Deligne : Kontsevich et Soibelman [KS00] ; McClure et Smith [MS02])**.** *Il existe une structure de E_2-algèbre sur $CH^*(A)$ qui induit la structure de $\mathtt{Ger}_2$-algèbre sur $HH_*(A)$.*

Idée de preuve. Il y a plusieurs preuves de la conjecture. L'idée récurrente est de construire une opérade spécifique, de montrer qu'elle est équivalente à $C_*(\mathtt{C}_2)$, et de montrer qu'elle agit « naturellement » sur $CH^*(A)$. Une preuve plus récente (Hess-Scott) montre que $HH^*(A) \cong \pi_* \Omega^2 \operatorname{Def}(A)$ (à relier à la section 2.1). □

2.3 Formalité des opérades E_n

Sur un corps de caractéristique nulle, un dg-module V est toujours **formel** : il est équivalent à son homologie, via un zigzag $V \xleftarrow{\sim} V_1 \xrightarrow{\sim} V_2 \xleftarrow{\sim} \ldots \xrightarrow{\sim} V_n \xleftarrow{\sim} H(V)$. En général, on dit qu'une dg-algèbre associative est formelle si elle est équivalente à son homologie via un zigzag de morphismes d'algèbres (ce n'est pas toujours le cas, même en caractéristique nulle).

Théorème 2.5 (KONTSEVICH [Kon99]; TAMARKIN [Tam03] $n = 2$). *Les opérades E_n sont **formelles** sur $\mathbb{R}$, ie. il existe une chaîne d'équivalences faibles qui sont des morphismes d'opérades entre E_n et e_n.*

Idée de preuve (Kontsevich). On se réfère à LAMBRECHTS et VOLIĆ [LV14] pour les détails. La chaîne de quasi-isomorphismes ressemble à :

$$E_n = C_*(FM_n) \xleftarrow{\sim} C_*^{sa}(FM_n) \xrightarrow{\sim} \mathtt{Graphs}_n \xleftarrow{\sim} H_*(FM_n) = e_n.$$

Ici, FM_n est l'opérade de Fulton-MacPherson ; c'est une opérade E_n. Elle est construite comme une compactification des espaces de configurations dans $\mathbb{R}^n$ (à noter que $\mathtt{C}_n(r) \simeq \mathrm{Conf}(r, \mathbb{R}^n) \subset (\mathbb{R}^n)^r$), où l'on permet aux points d'être infinitésimalement proches. Les points gardent cependant une distance et une direction relatives. Le foncteur C_*^{sa} est le foncteur des chaînes semi-algébriques (un ensemble semi-algébrique est une union et intersection de solutions d'inéquations polynomiales), et la théorie générale montre que $C_*^{sa} \xrightarrow{\sim} C_*$ pour les bons espaces.

L'opérade $\mathtt{Graphs}_n$ est une opérade décrite de manière combinatoire par des complexes de graphes « admissibles ». Kontsevich définit explicitement des formes différentielles (semi-algébriques) sur FM_n pour obtenir, via intégration (il faut vérifier la convergence) la seconde équivalence. Enfin, la description par COHEN [Coh76] de la cohomologie des espaces de configurations $\mathrm{Conf}(r, \mathbb{R}^n) \simeq FM_n(r)$ comme un complexe de forêts permet de conclure. □

Une application de ce théorème est la **quantification par déformation** des variétés de Poisson (les variétés X telles que $A = C^\infty(X)$ est une algèbre de Poisson, où le produit est le produit des fonctions). Étant donné une algèbre commutative A et une déformation formelle $\star : A[[\hbar]] \otimes A[[\hbar]] \to A[[\hbar]]$, on peut montrer que $\{a, b\}_\star := \frac{1}{\hbar}(a \star b - b \star a) \pmod{\hbar}$ définit un crochet de Poisson sur A. Le théorème suivant combine la formalité et la conjecture de Deligne :

Théorème 2.6 (KONTSEVICH [Kon03]). *Pour toute variété de Poisson X, $C^\infty(X) = (A, \cdot, [\,,\,])$, il existe une déformation formelle* canonique *$(A[[\hbar]], \star)$ de $(A, \cdot)$ dont les composantes sont des opérateurs bidifférentiels, telle que $\{\,,\,\}_\star = [\,,\,]$.*

3 Algèbres homotopiques

En général, pour une opérade quelconque $\mathtt{P}$, si un objet Y est une $\mathtt{P}$-algèbre et que $X \simeq Y$, alors X n'est pas nécessairement une $\mathtt{P}$-algèbre. La question est de savoir quelles opérades vérifient cette propriété d'invariance : c'est une idée de Boardman-Vogt pour le cadre topologique, et de Kadeishvili pour les complexes de chaînes. On peut aussi se référer à MARKL [Mar04] ou à LODAY et VALLETTE [LV12, Chapitre 10].

En considérant un cas simple, si $X \in \mathcal{T}op$ a le type d'homotopie d'une algèbre sur $\mathtt{Ass}_+$ (ie. un monoïde topologique), alors X est muni d'un produit associatif et unitaire à homotopie près. Si l'on veut multiplier $n \geq 3$ éléments de X, il faut donc faire un choix dans le placement des parenthèses ; on peut passer d'un choix à l'autre par des homotopies, mais a priori le passage n'est pas canonique (il y a plusieurs chemins différents). En fait, X a plus de structure : c'est une algèbre sur l'opérade « **associative à homotopie fortement cohérente près** » A_∞, et l'espace des choix est contractible. La raison est que tout monoïde topologique est une algèbre A_∞ ($\exists A_\infty \to \mathtt{Ass}_+$), et que tout espace ayant le type d'homotopie d'une algèbre A_∞ est encore une algèbre A_∞.

Les types d'algèbres homotopiques ont été définies de manière « ad-hoc » dans de nombreux cas : les algèbres A_∞ (associatives), E_∞ (commutatives), L_∞ (Lie), etc. On a que $A_\infty \simeq E_1$, et l'opérade E_∞ est bien équivalente à $C_*(\mathtt{C}_\infty)$. La théorie des opérades permit de définir une construction générale : si $\mathtt{P}$ est une opérade, une algèbre homotopique sur $\mathtt{P}$ est une algèbre sur un modèle **cofibrant** $Q_{\mathtt{P}} \xrightarrow{\sim} \mathtt{P}$. Deux tels modèles sont équivalents et un objet équivalent à une $Q_{\mathtt{P}}$-algèbre est encore une $Q_{\mathtt{P}}$-algèbre.

On dispose de la théorie des opérades de **Koszul** : une dg-opérade de Koszul $\mathtt{P}$ a un modèle cofibrant explicite $\mathtt{P}_\infty$, construit à partir de sa coopérade duale de Koszul $\mathtt{P}^{¡}$ ($\mathtt{P}^{¡}$ est définie pour toute opérade binaire quadratique, ie. munie d'une présentation où les générateurs sont d'arité 2 et les relations sont quadratiques).

Les opérades $\mathtt{Ass}$, $\mathtt{Com}$, $\mathtt{Lie}$ et beaucoup d'autres sont de Koszul. Leurs opérades duales respectives sont $\mathtt{Ass}^! = \mathtt{Ass}$, $\mathtt{Com}^! = \mathtt{Lie}$ et $\mathtt{Lie}^! = \mathtt{Com}$ (on retrouve facilement $\mathtt{P}^{¡}$ à partir de $\mathtt{P}^!$). Par exemple, une structure L_∞ sur $\mathfrak{g}$ est donc donnée (via la théorie des opérades de Koszul) par une codérivation de carré nul sur la cogèbre *commutative* ($\mathtt{Lie}^! = \mathtt{Com}$) colibre engendrée par (une suspension de) $\mathfrak{g}$ – c'était une des définition ad-hoc des algèbres L_∞.

Théorème 3.1 (Transfert homotopique)**.** *Les structures $\mathtt{P}_\infty$ sont stables par équivalence homotopique : si $f : V \xrightarrow{\sim} W$ où W est une $\mathtt{P}_\infty$-algèbre, alors il existe une structure de $\mathtt{P}_\infty$-algèbre sur V telle que f s'étende en une (∞-)équivalence de $\mathtt{P}_\infty$-algèbres.*

Idée de preuve. Pour démontrer le théorème, on définit par des formules complètement explicites la nouvelle structure sur V, et il s'agit ensuite de vérifier explicitement que ces formules définissent bien une structure $\mathtt{P}_\infty$ et induisent un ∞-quasi-isomorphisme. La difficulté réside aussi dans la définition du modèle cofibrant explicite $\mathtt{P}_\infty = \Omega\mathtt{P}^{¡}$, dans la vérification de la propriété de Koszul de chaque opérade, et dans la description (le cas échéant) de ce qu'est une algèbre $\mathtt{P}_\infty$. On vérifie par exemple que $A_\infty = \mathtt{Ass}_\infty$, $E_\infty = \mathtt{Com}_\infty$ et $L_\infty = \mathtt{Lie}_\infty$. Cela permet donc de redémontrer (avec des arguments généraux) ce qui était déjà connu sur ces types d'algèbres. $\square$

4 Interactions avec les petits cubes

4.1 Longs nœuds

Soit $n \geq 2m+2$ deux entiers. On considère une généralisation $\mathrm{Emb}_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ de l'espace des **longs nœuds** : c'est l'espace des plongements qui coïncident avec l'inclusion standard $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ en dehors d'un compact. C'est un ouvert dense de l'espace des longues immersions, et on considère la fibre (homotopique) $\overline{\mathrm{Emb}_c}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ de l'inclusion : c'est l'espace des longs nœuds (de dimension supérieure) trivialisés par des immersions.

Quand $\mathtt{P}$ est une opérade de Koszul, on peut appliquer la théorie de la déformation aux morphismes d'opérades $\mathtt{P} \xrightarrow{\varphi} \mathtt{Q}$. Les déformations en question sont des morphismes $\mathtt{P}_\infty \to \mathtt{Q}$ dont la « restriction » à $\mathtt{P}$ est du type $\varphi + \alpha$. On a alors une dg-algèbre de Lie $\mathrm{Def}(\mathtt{P} \xrightarrow{\varphi} \mathtt{Q})$ dont les éléments de Maurer-Cartan ($d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$) sont en bijection avec les déformations de $\mathtt{P} \to \mathtt{Q}$.

Théorème 4.1 (Arone et Turchin [AT14])**.** *On a $C_*^{\mathbb{Q}}(\overline{\mathrm{Emb}_c}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \simeq \mathrm{Def}(e_m \to e_n)$.*

Idée de preuve. Ce théorème est une généralisation de théorèmes antérieurs de Lambrechts, Turchin et Volić (cas $m = 1$). Dans le cas $m = 1$, le complexe de droite est $\mathrm{Def}(\mathtt{Ass} \to \mathtt{Ger}_n)$, qui calcule la « cohomologie de Hochschild » de $\mathtt{Ger}_n$ (analogue à celle des sections 2.2 et 2.3, cf. aussi la section 5). Pour $m > 1$, c'est $\mathrm{Def}(\mathtt{Ger}_m \to \mathtt{Ger}_n)$ où $\mu \mapsto \mu$ et $\lambda \mapsto 0$.

— Le calcul de Goodwillie-Weiss, qui sert à approcher les foncteurs « analytiques » par leur « série de Taylor », permet de se ramener (en l'appliquant à $\overline{\mathrm{Emb}}_c(-, \mathbb{R}^n)$) à un calcul de complexes dérivés de morphismes entre bimodules infinitésimaux sur E_m ;
— La formalité des opérades E_n (théorème 2.5) simplifie l'écriture de ces espaces de morphismes dérivés, ce qui permet ensuite de se ramener à des bimodules infinitésimaux sur $\mathtt{Com}$. Ceux-ci ont une description simple en termes de diagrammes sur une catégorie $\Omega = \Delta_-$;
— La théorie des opérades de Koszul (section 3) permet ensuite d'obtenir des modèles cofibrants explicites des diagrammes sur Ω ;
— Enfin, une identification explicite et la description des opérades $H_*(E_n)$ en termes d'arbres permet de conclure. □

Quand $m = 1$, les diagrammes de cordes fournissent certaines classes dans l'homologie de $\overline{\mathrm{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, et la structure d'algèbre de Gerstenhaber de la cohomologie de Hochschild fournit de nouvelles classes, mais la description complète de $H_*(\overline{\mathrm{Emb}}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n))$ n'est pas encore atteinte (et encore moins si $m > 1$).

4.2 Groupe de Grothendieck-Teichmüller

Une catégorie monoïdale tressée $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ est une catégorie munie d'un produit tensoriel associatif et commutatif à isomorphismes près : $\alpha : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ et $\gamma : A \otimes B \to B \otimes A$ qui vérifient des conditions de cohérence (pentagone, hexagone) ; mais l'on ne demande pas $\gamma^2 = Id$ (contrairement aux catégories monoïdales symétriques). L'opérade E_2 agit sur l'espace classifiant $B\mathcal{C}$ d'une catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$ (et donc $B\mathcal{C}$ est équivalent à un espace de lacets doubles).

Les **associateurs de** Drinfel'd [Dri90] fournissent une manière « universelle » de construire des catégories monoïdales tressées. Ce sont des séries formelles en deux variables qui vérifient certaines équations (hexagone, pentagone…) – les « mêmes » que les catégories monoïdales tressées. On peut aussi voir l'ensemble $Ass^1(\Bbbk)$ des associateurs comme les isomorphismes entre l'opérade des tresses parenthésées complétée et l'opérade des diagrammes de cordes complétée (les mêmes diagrammes qu'en théorie des nœuds) – cf. Fresse [Fre12].

Par cette description $Ass^1(\Bbbk) = \mathrm{Iso}(A, B)$, le **groupe de Grothendieck-Teichmüller** $GT^1(\Bbbk) = \mathrm{Aut}(A)$ agit librement et transitivement sur $Ass^1(\Bbbk)$: c'est un « pro-torseur ». Ce groupe décrit (en un certain sens) comment modifier une catégorie monoïdale tressée pour récupérer une nouvelle catégorie monoïdale tressée. On peut également définir les variantes $GT(\Bbbk)$ et $GRT(\Bbbk)$. Le groupe $GT(\mathbb{Q})$ contient le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ – savoir si l'inclusion est stricte est un problème ouvert.

Théorème 4.2 (Drinfel'd [Dri90])**.** *L'ensemble des associateurs rationnels $Ass^1(\mathbb{Q})$ est non vide.*

Idée. Drinfel'd construit explicitement un associateur en se servant de la monodromie des équations de Knizhnik-Zamolodchikov, des équations différentielles qui apparaissent dans l'étude de certains modèles de la théorie quantique des champs. Les solutions de cette équation sont à coefficients complexes ; mais Drinfel'd utilise ensuite le fait que $Ass^1(\mathbb{C})$ est un torseur sous l'action de $GT(\mathbb{Q})$ pour obtenir une solution rationnelle. □

La preuve de Tamarkin de la formalité dans le cas $n = 2$ (théorème 2.5) utilise ce résultat, en construisant une chaîne de quasi-isomorphismes qui passe par $\hat{B}\hat{U}\mathfrak{t}$, la construction bar (section 5) complétée sur l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{t}$, l'algèbre de Lie de Drinfel'd-Kohno (on peut voir les associateurs de Drinfel'd comme des éléments de $\hat{B}\hat{U}\mathfrak{t}$).

Théorème 4.3 (Willwacher [Wil10]). *Le* 0*ème groupe de cohomologie de* $\mathrm{Def}(E_2 \xrightarrow{=} E_2)$ *est isomorphe à l'algèbre de Lie* $\mathfrak{grt}$ *du groupe* GRT.

La cohomologie en degré < 0 de ce complexe est nulle ; elle est encore inconnue en degré > 0. La conjecture de Drinfel'd-Kontsevich dit que $H^1(\mathrm{Def}(E_2 \to E_2))$ est nul. Si elle s'avérait vraie, cela fournirait une nouvelle preuve du théorème 4.2 de Drinfel'd, ainsi qu'une preuve de la formalité intrinsèque des opérades E_2 : toute opérade dont l'homologie est e_2 serait automatiquement formelle (et donc $\simeq e_2 \simeq E_2$).

Grâce à la formalité des opérades E_2, on sait que ce complexe est égal à $\mathrm{Def}(\mathtt{Ger}_2 \to \mathtt{Ger}_2)$. Willwacher étudie plus généralement $\mathrm{Def}(\mathtt{Ger}_n \to \mathtt{Ger}_n)$. Le calcul de la cohomologie de ce complexe est un autre problème ouvert.

5 Complexes bar itérés

Quand $\mathtt{P}$ est de Koszul, on peut définir la cohomologie des algèbres sur $\mathtt{P}$ en s'inspirant de la construction d'André-Quillen, via un foncteur dérivé du foncteur des dérivations pour obtenir $H^*_{\mathtt{P}}(A; M)$, où A est une $\mathtt{P}$-algèbre et M est un module sur A (défini de manière analogue aux modules sur les algèbres usuelles). On a alors $H^*_{\mathtt{P}}(A; A) \cong H(\mathrm{Def}(\mathtt{P} \to \mathtt{End}_A))$.

Le complexe bar $BA = (\bigoplus_n (\Sigma A)^{\otimes n}, b')$ d'une dg-algèbre associative A est une construction standard en algèbre homologique, utilisée (entre autres) pour définir la cohomologie de Hochschild $HH^*(A) = H(\mathrm{Hom}(BA, A), b'') \cong H^*_{\mathtt{Ass}}(A; A)$ (section 2.2, $b = b' + b''$). Quand A est commutative, le produit shuffle $\sqcup$ sur BA en fait à son tour une dg-algèbre commutative, et on peut itérer la construction pour avoir un endofoncteur B^n de la catégorie des dg-algèbres commutatives.

Théorème 5.1 (Fresse [Fre11]). *Le foncteur* B^n *s'étend aux algèbres* E_n *et* $H^{E_n}_*(A) \cong H_*(\Sigma^{-n} B^n A)$ *pour les bonnes algèbres* A.

Théorème 5.2 (Fresse [Fre06]). *Quand* A *est une algèbre de Poisson et* M *un module sur* A*, on peut définir deux différentielles* b *et* ∂_λ *sur* $\mathrm{Hom}(BA, M)$ *qui en font un bicomplexe, et on a* $H^*_{\mathtt{Poi}}(A; M) \cong H(\mathrm{Hom}(BA, M), b + \partial_\lambda)$.

Dans mon mémoire de M2, j'ai défini un complexe $C^*(A; M) = (\mathrm{Hom}(B^n A, M), b + \partial_\lambda)$ dont la cohomologie est $H^*_{\mathtt{Ger}_n}(A; M)$. La définition de ce complexe s'inspire de la définition du complexe qui calcule l'homologie de Poisson, et le fait que si A est une $\mathtt{Ger}_n$-algèbre, alors BA est une $\mathtt{Ger}_{n-1}$-algèbre. La preuve s'appuie aussi sur des résultats intervenant dans la preuve du théorème sur l'homologie des algèbres E_n (se rappeler aussi du théorème 2.3). Ce complexe s'étend en un complexe $C^*(\Phi)$, pour tout morphisme d'opérades $\mathtt{Ger}_n \xrightarrow{\Phi} \mathtt{P}$, avec en particulier $C^*(\mathtt{Ger}_n \to \mathtt{End}_A) \cong C^*(A; A)$.

Théorème 5.3. *Le complexe* $C^*(\Phi)$ *est quasi-isomorphe à* $\mathrm{Def}(\mathtt{Ger}_n \xrightarrow{\Phi} \mathtt{P})$.

L'intérêt de ce complexe est qu'il dispose d'une description simple à l'aide d'arbres de hauteur n, et la différentielle b est définie de manière explicite (∂_λ a une description plus complexe qui passe par des idempotents eulériens). Des calculs pourraient alors peut-être permettre d'obtenir de nouveaux résultats sur les questions de la section 4. On peut également penser que des techniques similaires pourraient donner des résultats sur l'homologie de factorisation (une version « supérieure » de l'homologie de Hochschild).

Références

[AT14] Gregory ARONE et Victor TURCHIN. « Graph-complexes computing the rational homotopy of high dimensional analogues of spaces of long knots ». In : *Ann. Inst. Fourier (to appear)* (2014). arXiv : 1108.1001.

[BV73] J. Michael BOARDMAN et Rainer M. VOGT. *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, p. x+257. MR0420609.

[Coh76] Frederick R. COHEN. « The homology of C_{n+1} spaces ». In : Frederick R. COHEN, Thomas J. LADA et J. Peter MAY. *The homology of iterated loop spaces.* T. 533. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976, p. 207–351. MR0436146.

[Dri90] Vladimir G. DRINFEL'D. « On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ». In : *Algebra i Analiz* 2.4 (1990), p. 149–181. ISSN : 0234-0852. MR1080203.

[Fre06] Benoit FRESSE. « Théorie des opérades de Koszul et homologie des algèbres de Poisson ». In : *Ann. Math. Blaise Pascal* 13.2 (2006), p. 237–312. ISSN : 1259-1734. DOI : 10.5802/ambp.219. MR2275449.

[Fre09] Benoit FRESSE. *Modules over operads and functors.* T. 1967. Lecture Notes in Mathematics. Berlin : Springer-Verlag, 2009, p. x+308. ISBN : 978-3-540-89055-3. DOI : 10.1007/978-3-540-89056-0. MR2494775.

[Fre11] Benoit FRESSE. « Iterated bar complexes of E-infinity algebras and homology theories ». In : *Algebr. Geom. Topol.* 11.2 (oct. 2011), p. 747–838. ISSN : 1472-2747. DOI : 10.2140/agt.2011.11.747. MR2782544.

[Fre12] Benoit FRESSE. « Homotopy of Operads & Grothendieck-Teichmüller Groups - Part I ». Book project. 2012. URL : http://math.univ-lille1.fr/~fresse/OperadHomotopyBook/.

[GK94] Victor GINZBURG et Mikhail KAPRANOV. « Koszul duality for operads ». In : *Duke Math. J.* 76.1 (1994), p. 203–272. ISSN : 0012-7094. DOI : 10.1215/S0012-7094-94-07608-4. MR1301191.

[Kon03] Maxim KONTSEVICH. « Deformation quantization of Poisson manifolds ». In : *Lett. Math. Phys.* 66.3 (2003), p. 157–216. ISSN : 0377-9017. DOI : 10.1023/B:MATH.0000027508.00421.bf. MR2062626.

[Kon99] Maxim KONTSEVICH. « Operads and motives in deformation quantization ». In : *Lett. Math. Phys.* 48.1 (1999). Moshé Flato (1937–1998), p. 35–72. ISSN : 0377-9017. DOI : 10.1023/A:1007555725247. MR1718044.

[KS00] Maxim KONTSEVICH et Yan SOIBELMAN. « Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture ». In : *Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon).* T. 21. Math. Phys. Stud. Dordrecht : Kluwer Acad. Publ., 2000, p. 255–307. arXiv : math/0001151. MR1805894.

[Laz55] Michel LAZARD. « Lois de groupes et analyseurs ». In : *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* 72 (1955), p. 299–400. ISSN : 0012-9593. NUMDAM : ASENS_1955_3_72_4_299_0. MR0077542.

[LV12] Jean-Louis Loday et Bruno Vallette. *Algebraic operads*. T. 346. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Heidelberg : Springer, 2012, p. xxiv+634. ISBN : 978-3-642-30361-6. DOI : 10.1007/978-3-642-30362-3. MR2954392.

[LV14] Pascal Lambrechts et Ismar Volić. « Formality of the little N-disks operad ». In : *Mem. Amer. Math. Soc.* 230.1079 (2014), p. viii+116. ISSN : 0065-9266. arXiv : 0808.0457. MR3220287.

[Mac65] Saunders Mac Lane. « Categorical algebra ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 71 (1965), p. 40–106. ISSN : 0002-9904. DOI : 10.1090/S0002-9904-1965-11234-4. MR0171826.

[Mar04] Martin Markl. « Homotopy algebras are homotopy algebras ». In : *Forum Math.* 16.1 (2004), p. 129–160. ISSN : 0933-7741. DOI : 10.1515/form.2004.002. MR2034546.

[May72] J. Peter May. *The geometry of iterated loop spaces*. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271. Berlin : Springer-Verlag, 1972, p. viii+175. MR0420610.

[MS02] James E. McClure et Jeffrey H. Smith. « A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture ». In : *Recent progress in homotopy theory (Baltimore, MD, 2000)*. T. 293. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, p. 153–193. DOI : 10.1090/conm/293/04948. MR1890736.

[Sta61] James Dillon Stasheff. « Homotopy associativity of H-spaces ». Thèse de doct. Princeton University, 1961, p. 116. MR2613327.

[Tam03] Dmitry E. Tamarkin. « Formality of chain operad of little discs ». In : *Lett. Math. Phys.* 66.1-2 (2003), p. 65–72. ISSN : 0377-9017. DOI : 10.1023/B:MATH.0000017651.12703.a1. MR2064592.

[Wil10] Thomas Willwacher. *M. Kontsevich's graph complex and the Grothendieck-Teichmueller Lie algebra*. Sept. 2010. arXiv : 1009.1654.