

# De l'analyse harmonique au traitement d'images

Arthur Leclaire  
encadré par Lionel Moisan

Bien que l'individu soit constamment exposé à des images dans sa vie quotidienne, il n'est pas nécessairement conscient de toutes les opérations qui ont mené à leur production. Quiconque possède un appareil photo numérique (éventuellement inclus dans son téléphone portable) pourra acquérir une image, puis en quelques clics la traiter et l'enregistrer de manière économique sur son ordinateur.

Si l'on cherche à détailler cette chaîne de production, on constate que les opérations bas-niveau de traitement d'images numériques constituent autant de thèmes d'analyse mathématique. Le zoom d'une image est un bon exemple. Même si cette opération paraît très simple car elle se réalise en un clic avec un nombre incalculable de programmes grand public, il se trouve qu'il existe de nombreuses manières de zoomer (i.e. d'interpoler) une image, et chacune a ses avantages et ses inconvénients.

Dès lors, on comprend que le traitement d'images constitue un domaine de recherche très vaste à l'interface des mathématiques et de l'informatique. Ses applications sont nombreuses ; citons entre autres l'imagerie médicale, l'imagerie satellitaire, l'infographie.

Ajoutons que lorsque l'on conçoit un algorithme de traitement d'images, nous sommes guidés par notre propre perception visuelle. La reproduction des mécanismes de la vision humaine constitue un objectif attrayant, mais qui n'est encore pas du tout rempli. De tels systèmes de traitement d'images haut-niveau s'inscrivent dans un programme de vision artificielle, situé à l'autre extrémité du domaine.

Nous donnerons ici des exemples de problématiques de traitement d'images numériques faisant appel à l'analyse de Fourier discrète des images. Dans un premier temps, on montrera que l'analyse harmonique permet d'expliquer de façon très claire l'effet de l'échantillonnage d'un signal. Ceci nous conduira naturellement à introduire la transformée de Fourier discrète (TFD) des images, dont on donnera une étude synthétique dans une deuxième partie. Ensuite, on présentera un modèle de synthèse de textures exploitant la randomisation des phases (argument) de la TFD. Dans une dernière partie, on introduira le concept de cohérence des phases de la TFD, sur lequel j'ai travaillé lors de mon stage de M2 ; on y montrera que les mesures de cohérence de phase étudiées fournissent des indices de qualité image.

## 1 Le théorème de Shannon

L'échantillonnage d'un signal  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  consiste à ne conserver que les valeurs de  $f$  sur la grille  $a\mathbb{Z}$  où  $a$  est la période d'échantillonnage. Autrement dit, à  $f$ , on associe la distribution

$$f_e = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(an) \delta_{an} .$$

D'un point de vue physique, cette opération a lieu par exemple lors de la numérisation d'un signal sonore : à chaque instant  $an$ , un microphone et un convertisseur analogique-numérique permettent d'enregistrer une donnée  $f(an)$  représentant la pression à l'instant  $an$ . Bien entendu, on peut aussi échantillonner des fonctions  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ; cela modélise l'acquisition, par le capteur d'un appareil

photo numérique, des niveaux de gris<sup>1</sup> d'une image numérique.. En chaque pixel  $\mathbf{x}$  de l'image, le capteur va compter le nombre de photons arrivant sur le carré délimité par ce pixel, ce qui donnera la valeur du niveau de gris associée au pixel  $\mathbf{x}$ .

L'objectif de ce paragraphe est de comprendre comment cette étape d'échantillonnage affecte le signal manipulé. Pour simplifier les notations, on présentera la théorie en dimension 1.

On va regarder l'effet de cette opération dans le domaine de Fourier. Il s'agit donc de calculer la transformée de Fourier de  $f_e$ . Rappelons que la transformée de Fourier est définie sur les fonctions  $f \in L^1(\mathbb{R})$  par :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x} dx,$$

et qu'elle s'étend sur l'espace  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  des distributions tempérées en un opérateur

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Pour l'instant, supposons que  $f$  appartient à l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Alors on remarque que

$$f_e = f\Pi_a$$

où  $\Pi_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}$  est le peigne de Dirac de période  $a$ . Par suite,

$$\mathcal{F}(f_e) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}f * \mathcal{F}(\Pi_a).$$

Nous devons donc calculer la transformée de Fourier du peigne de Dirac  $\Pi_a$ .

Pour cela, on note que  $\Pi_a$  est une distribution périodique de période  $a$ . Calculer sa transformée de Fourier revient donc à trouver son développement en série de Fourier. Comme le montre [GW09], on peut l'obtenir par dérivation (au sens des distributions) du développement en série de Fourier d'une primitive de  $\Pi_a$ . Tout calcul fait, on obtient

$$\Pi_a(x) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi n \frac{x}{a}}$$

où la série converge au sens des distributions, et donc

$$\mathcal{F}(\Pi_a) = \frac{2\pi}{a} \Pi_{\frac{2\pi}{a}}.$$

En convolant par  $\mathcal{F}f$ , on obtient que

$$\mathcal{F}(f_e) = \frac{1}{a} \mathcal{F}f * \Pi_{\frac{2\pi}{a}}. \quad (1)$$

A noter que cette égalité n'est rien d'autre que la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(an)e^{-ian\xi} = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}f \left( \xi - \frac{2\pi}{a}n \right). \quad (2)$$

Ainsi, sur les équations (1) et (2), on s'aperçoit que  $a\mathcal{F}(f_e)$  est obtenue en additionnant toutes les translatées (répliques) de  $\mathcal{F}f$  de multiples de  $\frac{2\pi}{a}$ .

Bien entendu, si  $\text{Supp}(\mathcal{F}f) \subseteq [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ , alors ces répliques ne se superposent pas, et on peut retrouver  $\mathcal{F}f$  en multipliant  $\mathcal{F}(f_e)$  par l'indicatrice de  $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ . En revenant dans le domaine temporel, le raisonnement précédent permet de montrer le théorème suivant (cf. [GW09] pour la preuve complète).

---

1. Dans ce document, on parlera d'images en niveaux de gris. Là encore, aussi basique que cela puisse paraître, il y a plusieurs manières de définir et de manipuler des images couleur, la plus commune étant de considérer qu'il existe trois canaux séparés R, G, B contenant les valeurs des pixels correspondant aux couleurs rouge, vert et bleu. Nous n'aborderons pas ces questions ici.

**Théorème 1.1** (Théorème d'échantillonnage de Shannon, 1949). *Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  dont la transformée de Fourier est supportée par  $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ . Alors  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(na)|^2 < \infty$ , et on a, dans  $L^2(\mathbb{R})$  l'égalité*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{a} - n\right),$$

où  $\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ .

Ce théorème fondateur du traitement du signal numérique assure que le signal continu  $f$  peut être retrouvé par interpolation des échantillons  $f(na)$  à l'aide de sinus cardinal translatés.

Le théorème s'adapte au cas de la dimension 2, ce qui nous donne déjà en application une manière naturelle d'interpoler une image discrète  $u : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2} u(\mathbf{x}) < \infty$  : on pourra poser

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} u(\mathbf{n}) \operatorname{sinc}\left(\frac{x_1}{a} - n_1\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{x_2}{a} - n_2\right).$$

Maintenant, lorsque la condition (dite de Shannon)  $\operatorname{Supp}(\mathcal{F}f) \subseteq [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$  est affaiblie, alors les différentes répliques de  $\mathcal{F}f$  peuvent se superposer : c'est ce qu'on appelle le repliement de spectre (ou aliasing). La coupure par l'indicatrice ne redonnera alors plus exactement  $\mathcal{F}f$ , mais un spectre où les hautes fréquences sont polluées par les répliques. Dans le cas de la dimension 2, on pourra observer ce phénomène de repliement de spectre sur la figure 1. Concrètement, les hautes fréquences présentes dans l'image initiale vont se replier sur des basses fréquences par périodisation. Cela a pour conséquence un effet bien connu sur les textures hautes fréquences, que l'on pourra observer sur la figure 2.

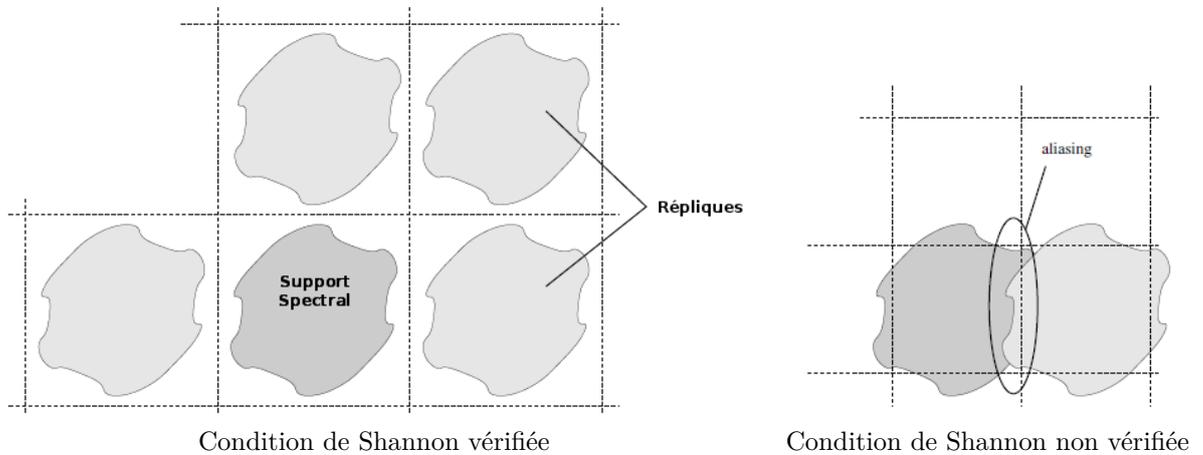


FIGURE 1 – Observation du repliement de spectre dans le domaine de Fourier. Images empruntées au polycopié du cours d'imagerie sous-pixellique de Lionel Moisan.

La discussion précédente montre l'intérêt de considérer l'analyse de Fourier des images manipulées. Malheureusement, pour plusieurs raisons, la formule d'interpolation précédente n'est pas utilisable en pratique. D'abord, la contrainte sur la compacité du support de  $\mathcal{F}f$  implique que  $f$  est analytique, ce qui est bien loin de s'appliquer à des images naturelles  $f$ . Et la décroissance lente du sinus cardinal empêche d'utiliser en pratique la formule d'interpolation précédente telle quelle.

Néanmoins, [GW09] prouve que le théorème de Shannon est aussi valable pour des fonctions trigonométriques  $f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\lambda_n x}$  pourvu que pour tout  $n$ ,  $|\lambda_n| < \frac{\pi}{a}$ . En particulier, cela montre que si nos  $f(na)$  sont les échantillons d'un polynôme trigonométrique, alors leur interpolée de Shannon est exactement ce polynôme trigonométrique. Mais on verra dans la partie suivante que les coefficients de ce polynôme trigonométrique interpolateur sont exactement les coefficients de la transformée de Fourier discrète.

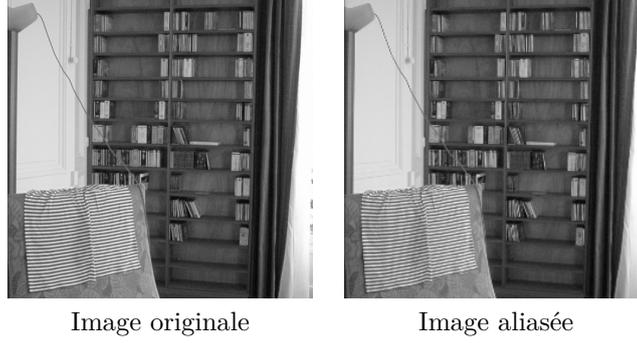


FIGURE 2 – Conséquences visuelles du repliement de spectre : noter que sur le short semblent apparaître de nouvelles rayures dont la direction est presque orthogonale aux rayures initiales. Noter aussi l’effet de crénelage sur le fil.

## 2 La transformée de Fourier discrète

Dans cette partie, on se place tout de suite dans le cadre des images discrètes en niveaux de gris, c’est-à-dire qu’on considère une fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  où  $\Omega = \{1, \dots, M\} \times \{1, \dots, N\}$ . On rappelle la définition classique suivante.

**Définition 2.1.** La transformée de Fourier discrète (TFD) de  $u$  est l’application  $\hat{u} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{Z}^2, \quad \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) e^{-i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle}$$

où l’on a posé  $\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle = 2\pi \left( \frac{x_1 \xi_1}{M} + \frac{x_2 \xi_2}{N} \right)$ .

La transformée de Fourier discrète hérite de propriétés similaires à la transformée de Fourier des fonctions. Par exemple, vu que  $u$  est réelle,  $\hat{u}$  possède une symétrie hermitienne au sens où  $\hat{u}(-\boldsymbol{\xi}) = \hat{u}(\boldsymbol{\xi})^*$ . Aussi, la bijection réciproque est explicitement calculable, comme le montre le résultat suivant.

**Théorème 2.1.** La TFD est une isométrie à constante près :  $\|\hat{u}\|_2 = \sqrt{MN} \|u\|_2$ , et par conséquent, on dispose de la formule de reconstruction

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad u(\mathbf{x}) = \frac{1}{MN} \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \Omega} \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle}. \quad (3)$$

Ainsi, la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  qui à  $\mathbf{x}$  associe  $\frac{1}{MN} \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \Omega} \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle}$  est un polynôme trigonométrique qui interpole les valeurs  $u(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Il coïncide donc avec l’interpolée de Shannon de l’image  $\hat{u} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  obtenue par  $\Omega$ -périodisation de  $u$ .

On notera au passage qu’il existe un lien entre la TFD et la transformée de Fourier des distributions tempérées : en effet, si l’on introduit la distribution  $U$  associée à l’image  $u$  définie par

$$U = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} u(\mathbf{x}) \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2} \delta_{\mathbf{x} + \mathbf{n}}, \quad (4)$$

alors on obtient (en appliquant une fois de plus la formule sommatoire de Poisson) que

$$\mathcal{F}U = \frac{2\pi}{M} \frac{2\pi}{N} \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{Z}^2} \hat{u}(\boldsymbol{\xi}) \delta_{\left(\frac{2\pi\xi_1}{M}, \frac{2\pi\xi_2}{N}\right)}.$$

Ainsi, on s’aperçoit que de même que  $\mathcal{F}$  réalise une correspondance entre des classes de signaux continus, elle réalise aussi une correspondance entre des classes de signaux échantillonnés.

En pratique, vu que  $\hat{u}$  est  $\Omega$ -périodique, il suffira de la calculer sur un carré  $\Xi$  de taille  $M \times N$  centré en zéro (ou presque centré si  $M$  ou  $N$  est pair). L'algorithme FFT (*Fast Fourier Transform*) de Cooley et Tuckey (1965) permet de calculer la TFD d'une image  $u$  de manière récursive, avec une complexité  $\mathcal{O}(MN \log(MN))$ . On obtient ainsi une méthode d'analyse harmonique des images discrètes directement implémentable sur ordinateur.

Armés de cet algorithme FFT, on en donne une première application en explicitant l'opération de zoom par interpolation de Shannon évoquée dans la partie précédente. Pour zoomer une image  $u$  par 2, on en calcule donc la TFD  $\hat{u}$ , que l'on plonge dans un carré fréquentiel dont les dimensions sont deux fois plus grandes (en prolongeant par zéro) pour obtenir une image  $\hat{v}$ , et on reprend la TFD inverse pour obtenir l'image zoomée  $v$ . Précisément, on aura pris deux fois plus d'échantillons dans le polynôme trigonométrique interpolant les valeurs de  $u$  sur  $\Omega$ .

Il est maintenant légitime de se demander à quoi ressemble la TFD. Puisque  $\hat{u}$  est à valeurs complexes, on va en représenter le module et l'argument. Par abus de langage, on désignera par module de  $u$  l'image  $|\hat{u}|$  et par phase de  $u$  l'image  $\text{Arg}(\hat{u})$  (l'argument étant pris égal à zéro si jamais un coefficient de  $\hat{u}$  est nul). On pourra observer le résultat sur la figure 3.

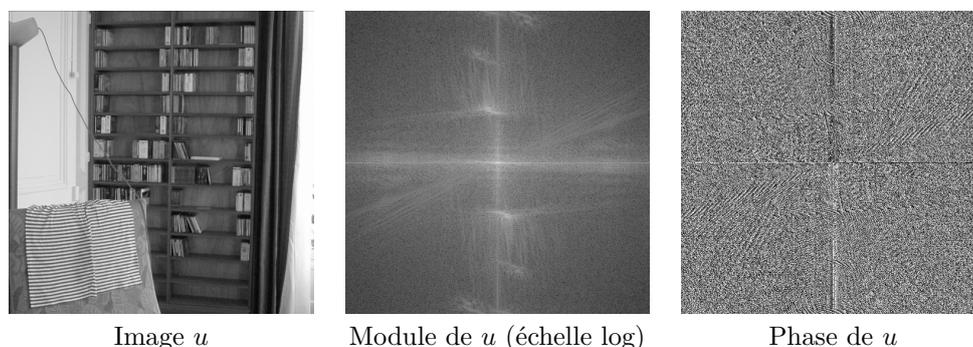


FIGURE 3 – Observation de la transformée discrète de l'image “Room”.

Sur cette figure, on constate que l'image de module est très piquée en zéro : la décroissance à l'infini est en effet une propriété attendue pour la transformée de Fourier d'un signal. On voit aussi sur le module que sur certaines lignes passant par zéro, la décroissance semble être moins rapide. En fait, c'est le cas lorsque dans la direction orthogonale l'image de départ possède des singularités. Cela explique pourquoi l'image de module fait apparaître une oblique dont la direction est orthogonale à celle du fil. Aussi, on voit apparaître une énorme croix au milieu de l'image. Celle-ci est due au fait que l'utilisation de la TFD suppose implicitement une périodisation de l'image  $u$  (cf. (4)). C'est l'effet de bords typique de la TFD.

Autant il est aisé de commenter l'image de module, autant l'image de phase paraît mystérieuse. Là encore on distingue la croix, mais le reste des coefficients ne s'ordonne pas de manière visuellement agréable. On peut se demander si c'est le fait que les phases soient calculées entre  $-\pi$  et  $\pi$  qui gêne la compréhension de ces images de phases. C'est pourquoi, lors d'un projet du cours d'imagerie sous-pixellique (M2 MVA), on a cherché à définir des relèvements de la phase. Cette étude a permis de conclure qu'il n'était pas raisonnable de chercher à interpréter directement ces images de phase.

Et pourtant, la phase est extrêmement importante dans la reconstruction de l'image. Les coefficients de phase gèrent en effet le placement relatifs des ondes pures de la reconstruction (3). Une expérience proposée par Oppenheim et Lim dans [OL81] montre l'effet surprenant de l'échange de module et de phase de deux images, cf fig. 4. On constate qu'une grande partie de la géométrie persiste même si l'information de module est perdue.

Outre l'analyse à vue des images spectrales, un des grands intérêts de la TFD est qu'elle permet de réaliser des convolutions circulaires de deux images pleines de mêmes dimensions. Les paragraphes suivantes vont exposer d'autres applications de la TFD en traitement d'images.



FIGURE 4 – Expérience d’échange du module et de la phase de deux images.

### 3 Bruits à phases aléatoires

Dans ce paragraphe, on va aborder brièvement le problème de la synthèse de textures en exposant le modèle RPN, étudié dans [GGM11]. L’objectif est le suivant : à partir d’un échantillon de texture (par exemple une petite image de tissu), produire une nouvelle image qui est perceptuellement similaire à l’échantillon, mais en évitant au maximum la recopie locale des pixels. Il est clair que de tels procédés sont utiles lorsqu’il s’agit d’habiller des objets 3D avec des textures.

La stratégie est la suivante. Partons d’un échantillon  $u$  d’une texture. On suppose que les caractéristiques perceptuelles de l’image analysée  $u$  sont incluses dans ses corrélations de second ordre. On cherchera donc à faire en sorte que le modèle préserve la fonction d’auto-corrélation

$$\hat{u} * \check{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \Omega} \hat{u}(\mathbf{y}) \hat{u}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) .$$

Or la TFD de cette auto-corrélation est le module au carré de la TFD de  $u$  (théorème de Wiener-Khintchine). Cela conduit naturellement à penser qu’on pourra synthétiser des textures similaires à  $u$  en générant des images aléatoires admettant le même module que  $u$ .

Pour définir un modèle d’image aléatoire admettant même module que  $u$ , le plus simple est de remplacer toutes les phases de  $u$  par des nombres uniformément distribués sur  $[-\pi, \pi]$ . On introduit donc une famille  $(\psi(\boldsymbol{\xi}))_{\boldsymbol{\xi} \in \Xi}$  de variables aléatoires définies sur le domaine fréquentiel discret  $\Xi$  qui sont indépendantes et uniformes sur  $[-\pi, \pi]$ , modulo la contrainte d’imparité (i.e. de symétrie hermitienne de  $e^{i\psi(\boldsymbol{\xi})}$ ). On pose alors

$$u_{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{MN} \sum_{\boldsymbol{\xi} \in \Omega} |\hat{u}(\boldsymbol{\xi})| e^{i(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}) + i\psi(\boldsymbol{\xi})} . \quad (5)$$

Les réalisations de  $u_{\psi}$ , appelées bruits à phases aléatoires (ou *Random phase noise*, RPN en anglais) fournissent effectivement de bons candidats pour la reproduction de la texture  $u$ . On en donne un exemple sur la figure 5.

De nombreuses questions apparaissent lors de l’étude de cet algorithme. La première à se poser est la gestion des effets de bords. En effet, si l’échantillon de texture  $u$  possède des valeurs différentes d’un bord à l’autre du domaine, alors une discontinuité arbitraire va biaiser le module de sa transformée de Fourier. Par conséquent, des bords horizontaux et verticaux artificiels vont apparaître dans les réalisations de  $u_{\psi}$ . Sans entrer dans les détails, mentionnons qu’il est possible de contourner ses effets de bords en appliquant le RPN, non plus à l’image  $u$  elle-même, mais à sa composante périodique définie dans [Moi11].

Une autre question très importante est la suivante : quelles sont les textures qui vont être bien reproduites par RPN ? Après quelques expériences, on s’aperçoit qu’en général, RPN ne reproduit

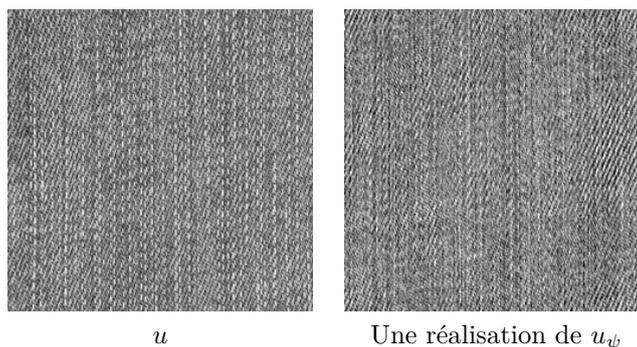


FIGURE 5 – Exemple de synthèse de textures par randomisation de phases.

bien que les images ayant une géométrie essentiellement encodée dans les caractéristiques locales. C'est ce qu'on appelle des micro-textures. En revanche, sur des images ayant une géométrie globale (images de briques, ou de fourrure par exemple), RPN va échouer. Ceci est dû au fait que la phase tient un rôle essentiel dans le codage de la géométrie des images, alors que RPN détruit l'information de phase.

En fait, a contrario, la destruction de la structuration des phases par RPN va pouvoir être exploitée de façon à dériver une mesure de cohérence de phase. C'est ce qu'on verra dans le paragraphe suivant.

Le lecteur désireux d'en savoir plus à propos de RPN est invité à consulter l'article en ligne [GGM11], sur lequel il pourra tester l'algorithme avec les images de son choix.

## 4 Introduction à la cohérence de phase

Dans cette partie, on va présenter les deux indices de cohérence de phase introduits dans les articles [BMR08] et [BM11]. On travaille encore sur une image  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  en niveaux de gris, et on reprend la notation  $u_\psi$  du paragraphe précédent désignant l'image aléatoire obtenue à partir de  $u$  en rendant les phases uniformes sur  $[-\pi, \pi]$ .

Avant d'introduire la cohérence de phase il faut rappeler que la variation totale (TV) constitue un indicateur de référence pour mesurer la quantité d'oscillations présentes dans l'image. L'ensemble des fonctions à variations bornées est un modèle de régularité ayant mené à des algorithmes de débruitage efficace, cf. en particulier l'article [Cha04]. Dans notre cadre, on utilisera la variation totale périodique définie par :

$$\text{TV}(u) = \sum_{\mathbf{x} \in \Omega} |\dot{u}(x_1 + 1, x_2) - \dot{u}(x_1, x_2)| + |\dot{u}(x_1, x_2 + 1) - \dot{u}(x_1, x_2)| = \|\partial_x \dot{u}\|_1 + \|\partial_y \dot{u}\|_1 .$$

Intuitivement, on définirait la cohérence de phase comme la capacité qu'ont les phases à bien coopérer de façon à créer dans l'image des bords nets et des zones plates. Maintenant, si l'on déphase aléatoirement les composantes ondulatoires, des oscillations vont polluer les zones plates et donc faire exploser la TV. D'où l'idée des auteurs de [BMR08] de poser la définition suivante.

**Définition 4.1.** (Blanchet-Moisan-Rougé) La cohérence globale de phase de l'image  $u$  est la quantité

$$\text{GPC}(u) = -\log_{10} \mathbb{P}(\text{TV}(u_\psi) \leq \text{TV}(u)) .$$

Ainsi,  $\text{GPC}(u)$  est grande lorsqu'il est peu probable que la variation totale de  $u_\psi$  soit plus petite que celle de  $u$ . En général pour des images naturelles, il n'y a que très peu de déphasages qui vont faire diminuer la variation totale. C'est pourquoi nous considérons cette probabilité en échelle logarithmique.

En général la probabilité qui apparaît dans cette définition est impossible à calculer explicitement. C'est pourquoi en pratique, les auteurs de [BMR08] ont suggéré d'utiliser plutôt la quantité

$$\text{GPC}_N(u) = -\log_{10} \Phi \left( \frac{\mu - \text{TV}(u)}{\sigma} \right)$$

où  $\Phi$  est la queue de la distribution gaussienne :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

et où  $m$  et  $\sigma^2$  sont des estimateurs de Monte-Carlo de la moyenne et de la variance de  $\text{TV}(u_\psi)$ . Approcher  $\text{GPC}(u)$  par  $\text{GPC}_N(u)$  revient à supposer que  $\text{TV}(u_\psi)$  est gaussienne de moyenne  $m$  et de variance  $\sigma^2$ .

On obtient ainsi un premier indice de cohérence de phase sur lequel on peut commencer à mener des expériences, cf. [BMR08]. Malgré tout, calculer  $m$  et  $\sigma$  requiert beaucoup de simulations (de Monte-Carlo), et donc le calcul de  $\text{GPC}_N(u)$  n'est pas instantané. C'est pourquoi les auteurs de [BM11] ont cherché à remplacer dans cette construction le modèle  $u_\psi$  par un autre modèle aléatoire  $v$  pour lequel le calcul de la moyenne et la variance de  $\text{TV}(v)$  est explicite.

En synthèse de textures, le chapitre 2 de [Gal10] assure que le modèle *asymptotic discrete spot noise* admet des réalisations perceptuellement similaires à celles du modèle de randomisation de phases. Cela suggère d'adapter la construction de la GPC à ce modèle. Autrement dit, au lieu de considérer des déphasages aléatoires  $u_\psi$  de  $u$ , on va considérer le champ gaussien

$$u * W(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \Omega} \dot{u}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) W(\mathbf{y})$$

où  $W$  est un bruit blanc gaussien d'écart-type  $\frac{1}{\sqrt{MN}}$ .

Dans ces conditions, l'article [BM11] donne les formules explicites de  $m = \mathbb{E}[\text{TV}(u * W)]$  et  $\sigma^2 = \text{Var}(\text{TV}(u * W))$ , ce qui permet de définir un deuxième indice de cohérence de phase :

**Définition 4.2.** On pose

$$\text{SI}(u) = -\log_{10} \Phi \left( \frac{\mathbb{E}[\text{TV}(u * W)] - \text{TV}(u)}{\sqrt{\text{Var}(\text{TV}(u * W))}} \right). \quad (6)$$

Cette fois-ci, cet indice est calculable explicitement en temps raisonnable (via 4 transformées de Fourier rapides). Pour décrire la différence entre les modèles  $u_\psi$  et  $u * W$ , il faut considérer les deux dans le domaine de Fourier. On constate alors qu'en plus d'une randomisation des phases, la convolution par  $W$  induit la multiplication des modules par le bruit de Rayleigh  $|\dot{W}|$ . En un certain sens, la convolution par la TFD inverse de  $|\dot{W}|$  ressemble à un Dirac en zéro, ce qui nous permet d'espérer que les deux modèles ne sont finalement pas éloignés.

L'objectif de mon stage de M2 était précisément de mener une étude théorique et pratique détaillée de cet indice SI.

Sur le plan théorique, on a pu mener une réflexion probabiliste sur les modèles  $\text{TV}(u_\psi)$  et  $\text{TV}(u * W)$ . On a montré que la formule obtenue dans [BM11] pour  $\mathbb{E}[\text{TV}(u * W)]$  constitue une approximation de  $\mathbb{E}[\text{TV}(u_\psi)]$  et on a donné une borne d'erreur explicite (bien qu'assez mauvaise en pratique), qui fait appel au théorème de Berry-Esseen pour des variables aléatoires non identiquement distribuées. On a aussi cherché à donner une approximation gaussienne de la loi de  $\text{TV}(u * W)$ , ce qui a conduit à l'étude de théorèmes central-limite pour des sommes de variables aléatoires non indépendantes. Enfin, on a introduit une nouvelle quantité  $\text{SI}_a(u)$  approchant  $\text{SI}(u)$  et plus simple à calculer (car elle ne nécessite plus qu'une seule FFT) ; une majoration intermédiaire de l'erreur relative a été trouvée.

D'un point de vue pratique, de nombreuses expériences ont été menées. Dans un premier temps, il a fallu comprendre quel type d'images étaient favorisées par le SI. On s'est très vite aperçus qu'une image possédant des bords nets jouxtant des zones plates avait en général une grande valeur de SI (à l'instar de  $-TV$ ). Puis, de la même manière que l'a montré [BMR08] pour GPC, on a vérifié empiriquement que SI constituait un indice de netteté (i.e. de qualité image), justifiant ainsi son nom *Sharpness Index* : sur la figure 6, on pourra constater que le SI décroît lorsque l'on ajoute du bruit ou du flou sur une image.

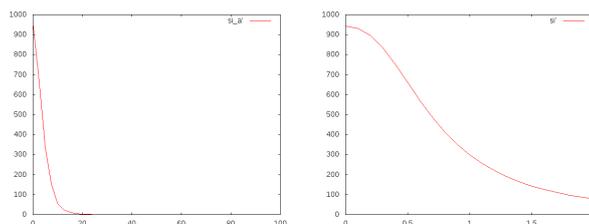


FIGURE 6 – A gauche (resp. à droite), tracé du SI en fonction du niveau du bruit (resp. flou) ajouté à l'image “Lena”.

Enfin, au cours de ce stage, on a cherché à utiliser le SI en déconvolution paramétrique et non paramétrique. Bien entendu, un indice de qualité permet par exemple de choisir entre divers résultats d'algorithmes de traitement d'images (appliqués éventuellement avec plusieurs paramètres) d'en désigner un comme étant le meilleur. Par exemple, pour effectuer une déconvolution (ou déflouage), on peut appliquer le filtre de Wiener qui est un inverse de convolution régularisé de noyau gaussien. Le filtre appliqué dépendra donc d'un écart-type  $\sigma$ . Alors on voit que le SI privilégie une des valeurs de  $\sigma$  menant à un résultat qui possiblement est le meilleur de toute la gamme, cf. figure 7.

On a essayé également une autre méthode de déconvolution par adaptation progressive aléatoire d'un petit filtre  $5 \times 5$ . Le procédé optimise de manière stochastique le SI de la déconvolution d'une petite fenêtre de l'image. Cette méthode apparemment naïve a mené à des résultats non homogènes (le choix de la petite fenêtre a apparemment une grande importance), mais dans certains cas, les images déconvoluées sont très satisfaisantes. Sur la figure 8, on pourra observer un résultat de cette méthode de déconvolution, qui ne fait apparaître aucun des artefacts habituellement rencontré dans ce genre de procédé.

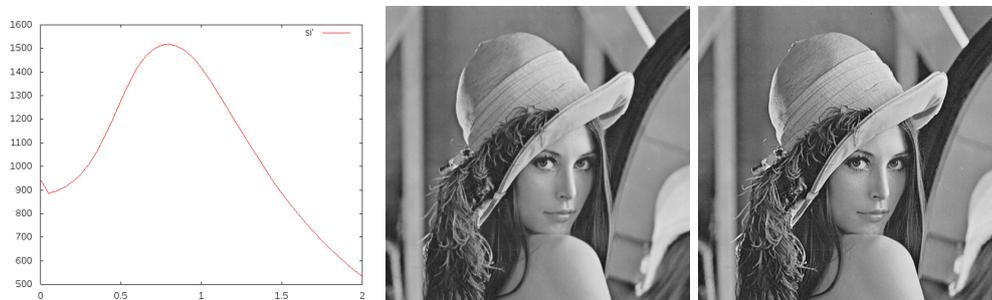


FIGURE 7 – A gauche : evolution du SI en fonction du paramètre de déconvolution  $r$ . Au milieu, image floue (SI = 943). A droite : image déconvoluée avec le paramètre optimal (SI = 1520).

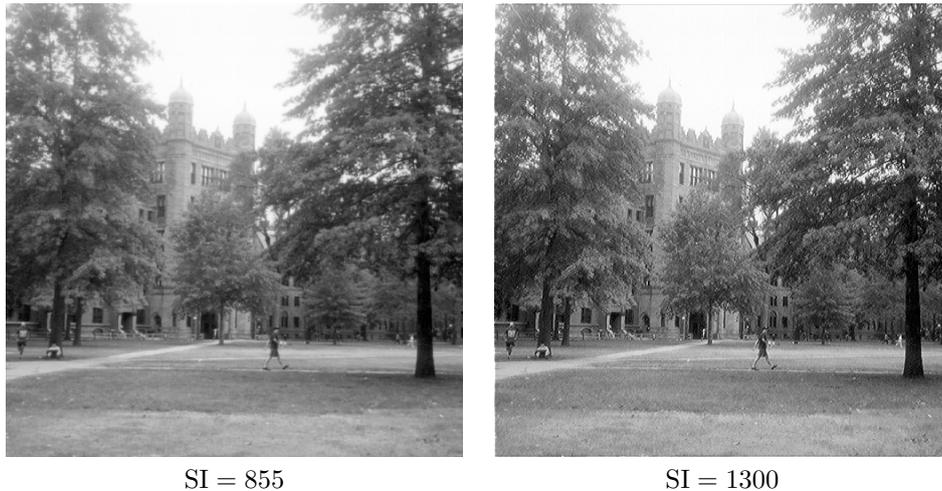


FIGURE 8 – Résultat de la déconvolution aveugle par adaptation aléatoire de noyau sur l’image “Yale”.

## 5 Conclusion

Dans cette introduction au domaine de recherche, nous avons montré des applications de l’analyse de Fourier à la théorie de l’échantillonnage, et à deux problématiques de traitement d’images que sont la synthèse de textures et la mesure de netteté. On a vu que la compréhension de l’information de phase des images semble encore hors de portée.

Mais, bien que ces phases soient mal comprises, les mesures de cohérence de phase introduites dans la partie 4 trouveront sans doute une application dans la vérification de structuration des phases de nouveaux modèles d’images aléatoires. On a déjà dit de RPN qu’il n’était adapté qu’aux micro-textures car il détruisait l’information de phase. On peut voir en effet que la cohérence globale de phase du modèle RPN est faible. Si l’on cherche maintenant à trouver de nouveaux algorithmes de synthèse de texture menant à des phases mieux structurées, alors les indices GPC et SI donneront un moyen de valider ou non l’efficacité des nouvelles approches adoptées. Ces champs aléatoires à phase structurée constituent précisément l’objet de ma thèse.

## Références

- [BM11] G. Blanchet and L. Moisan. An explicit sharpness index related to global phase coherence, 2011. Working paper.
- [BMR08] G. Blanchet, L. Moisan, and B. Rougé. Measuring the global phase coherence of an image. *Proceedings of the International Conference on Image Processing*, pages 1176–1179, 2008.
- [Cha04] A. Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20 :89–97, 2004.
- [Gal10] B. Galerne. *Modèles d’image aléatoires et synthèse de texture*. PhD thesis, 2010.
- [GGM11] B. Galerne, Y. Gousseau, and J.M. Morel. Micro-Texture Synthesis by Phase Randomization. *Image Processing On Line, ipol.im*, 2011.
- [GW09] C. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications*. Dunod, 2009.
- [Moi11] L. Moisan. Periodic plus smooth image decomposition. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 39 :161–179, 2011.
- [OL81] A. V. Oppenheim and J. S. Lim. The importance of phase in signals. *Proc. of the IEEE*, 69(5) :529–541, 1981.