

Introduction au domaine de recherche : Un exemple de dualité en mécanique statistique

Paul Melotti, sous la direction de Béatrice de Tilière

Table des matières

1	Qu'est-ce qu'un modèle de mécanique statistique ?	2
1.1	Modèle d'Ising	3
1.2	Modèles "vertex"	4
1.3	Modèle de dimères	5
2	Qu'est-ce qu'une relation de dualité ?	6
2.1	Exemple fondateur : la dualité de Kramers-Wannier	6
2.2	Dualité pour des modèles à valeurs dans un groupe abélien	8
2.3	Dualité du modèle 8V symétrique	9
3	Du modèle d'Ising aux dimères	12
3.1	Du modèle d'Ising au modèle 8V	12
3.2	Du 8V au 6V	13
3.3	Du 6V aux dimères	13
4	Problèmes ouverts	14

Introduction

L'idée de la physique statistique est de décrire les propriétés de systèmes de particules à partir de prédicats probabilistes : plutôt que d'écrire les lois de la physique pour chaque particule, on préfère considérer qu'un état du système apparaît avec une certaine probabilité, qui dépend de son énergie. Si cette idée apparaît déjà dans les travaux de Kelvin, Maxwell ou Boltzmann, c'est Gibbs qui la formule clairement en 1902 et donne un formalisme à cette discipline. La physique statistique a ensuite pris son essor durant tout le vingtième siècle, notamment par son application à la mécanique quantique.

Au fil du temps, des modèles physiques ont émergé pour décrire simplement des phénomènes physiques complexes. Certains de ces modèles ont été repris dans le monde mathématique, afin de justifier les intuitions des physiciens et d'étudier la structure riche qu'ils renferment. Citons par exemple le modèle d'Ising, proposé par Lenz et Ising dans les années 20 pour étudier les phénomènes d'aimantation, résolu en dimension 1 par Ising en 1925 ([7]), et dont l'étude au cours du vingtième siècle donne encore des développements aujourd'hui ; ou encore le modèle de percolation introduit par Hammersley en 1957 et dont les propriétés critiques sont encore des conjectures pour de nombreux graphes (en particulier \mathbb{Z}^3).

Un des défis de la partie mathématique de cette discipline est donc de justifier les calculs et les résultats issus de la physique, et de comprendre leur structure mathématique. Dans cette introduction au domaine de recherche, on va montrer un lien fort entre le modèle d'Ising et un modèle plus récent et mieux compris, le modèle de dimères. On va d'abord présenter ces modèles, ainsi qu'un modèle intermédiaire, le modèle "vertex", dans la première partie ; puis on parlera de la dualité en mécanique statistique pour montrer le genre de structure mathématique qui apparaît dans

l'étude de ces modèles ; enfin on montrera comment la dualité des modèles "vertex" permet de faire le pont entre le modèle d'Ising et le modèle de dimères.

1 Qu'est-ce qu'un modèle de mécanique statistique ?

De manière très générale, le cadre de la mécanique statistique est le suivant : on se donne un ensemble Ω , dit *ensemble des configurations*, muni d'une mesure finie λ et d'une fonction $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, appelée *énergie*¹. Pour tout $\beta \geq 0$ (qui, en physique, est l'inverse d'une température), on définit la mesure w_β de densité $\exp(-\beta H(\omega))$ par rapport à λ . On appelle *fonction de partition* $Z(\beta)$ la masse totale de w_β :

$$Z(\beta) = w_\beta(\Omega) = \int_{\omega \in \Omega} \exp(-\beta H(\omega)) d\lambda(\omega).$$

Lorsque $Z(\beta)$ est fini, on considérera la mesure de probabilité $\frac{w_\beta}{Z(\beta)}$, qui est physiquement la probabilité d'apparition des configurations de Ω à la température inverse β .

Dans cette présentation, on se placera uniquement dans le cas où Ω est fini, et on prendra pour λ la mesure de comptage. Alors w_β s'identifie à une fonction de Ω dans \mathbb{R}_+^* , et une configuration $\omega \in \Omega$ apparaît avec probabilité $\mathbb{P}(\omega) = \frac{w_\beta(\omega)}{Z(\beta)} = \frac{\exp(-\beta H(\omega))}{Z(\beta)}$. La fonction de partition s'écrit simplement

$$Z(\beta) = \sum_{\omega \in \Omega} \exp(-\beta H(\omega)).$$

Un des buts de l'étude d'un modèle est de comprendre le comportement de $Z(\beta)$ en fonction de β (et d'éventuels autres paramètres dont dépend le modèle). Justifions rapidement cet objectif. L'énergie moyenne $\langle H \rangle$ s'écrit

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \sum_{\omega \in \Omega} H(\omega) \frac{\exp(-\beta H(\omega))}{Z(\beta)} \\ &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

L'entropie S du modèle s'écrit

$$\begin{aligned} S &= -\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) \ln(\mathbb{P}(\omega)) \\ &= \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{\omega \in \Omega} \exp(-\beta H(\omega)) (\beta H(\omega) + \ln(Z(\beta))) \\ &= \beta \langle H \rangle + \ln(Z(\beta)). \end{aligned}$$

Ainsi un certain nombre d'informations physiques peuvent être lues dans la fonction de partition. Un but fondamental de l'étude d'un modèle est donc la compréhension de sa fonction de partition. On va voir comment des méthodes combinatoires permettent, dans certains cas, d'obtenir des écritures de Z qui permettent de calculer plus facilement les quantités précédentes (mais on n'entrera pas dans le calcul effectif, qui reste technique).

Remarque. Afin d'étudier les modèles plus facilement, il arrive qu'on étende ces définitions au cas où w_β est à valeurs complexes. On perd l'interprétation des poids comme probabilités, toutefois, on parlera encore de modèle de mécanique statistique et de fonction de partition.

1. Remarquons que contrairement à beaucoup de domaines des probas, on travaille directement avec l'espace probabilisé Ω .

1.1 Modèle d'Ising

Décrivons le modèle d'Ising, un des plus anciens modèles de mécanique statistique. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté fini, muni de constantes réelles $(J_e)_{e \in E}$ sur les arête, et de constantes réelles $(H_v)_{v \in V}$ sur les sommets. La première famille, notée simplement J est appelée *constantes de couplage*, et la seconde, notée H , est appelée *champ magnétique*. Soit $\Omega = \{\pm 1\}^V$ l'ensemble des *configurations de spins* sur le graphe G ; une configuration de spins sera classiquement notée $\sigma : V \rightarrow \{\pm 1\}$.

On munit Ω de la fonction d'énergie suivante :

$$H(\sigma) = - \sum_{e=uv \in E} J_e \sigma_u \sigma_v - \sum_{v \in V} H_v \sigma_v,$$

où la première somme porte sur les arêtes non orientées e d'extrémités u et v .

Autrement dit, la probabilité d'une configuration de spins σ vaut

$$\frac{\exp(\beta (\sum_{e=uv \in E} J_e \sigma_u \sigma_v + \sum_{v \in V} H_v \sigma_v))}{Z(\beta, J, H)}$$

où

$$Z(\beta, J, H) = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{\pm 1\}} \exp\left(\beta \left(\sum_{e=uv \in E} J_e \sigma_u \sigma_v + \sum_{v \in V} H_v \sigma_v\right)\right).$$

Dans toute la suite, on supposera le champ H nul, et quitte à changer les constantes de couplage J on peut supposer $\beta = 1$. On notera alors simplement $Z(J)$ la fonction de partition :

$$Z(J) = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{\pm 1\}} \exp\left(\sum_{e=uv \in E} J_e \sigma_u \sigma_v\right).$$

Dans le cas où G est planaire, il existe une formule permettant d'écrire $Z(J)$ comme la racine d'un déterminant : c'est la formule de Kac-Ward. Considérons le graphe G plongé dans le plan sans que les arêtes ne se croisent, et notons \vec{E} l'ensemble des arêtes orientées. On définit une matrice T , dite matrice de Kac-Ward de G , indexée par $\vec{E} \times \vec{E}$ de la façon suivante :

— Si \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont dans la configuration de la figure 1, *i.e.* le sommet terminal de \vec{e}_1 est le sommet original de \vec{e}_2 , on note (\vec{e}_1, \vec{e}_2) l'angle orienté de \vec{e}_1 vers \vec{e}_2 , et $x_{e_i} = \tanh(J_{e_i})$. Alors

$$T_{\vec{e}_1, \vec{e}_2} = \exp\left(\frac{i}{2}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)\right) (x_{e_1} x_{e_2})^{\frac{1}{2}}.$$

— Sinon, $T_{\vec{e}_1, \vec{e}_2} = 0$.

Théorème (Formule de Kac-Ward [8]). *Soit $Z(\beta, J)$ la fonction de partition du modèle d'Ising sur un graphe planaire G , et T sa matrice de Kac-Ward, alors*

$$Z(\beta, J)^2 = \det(I - T).$$

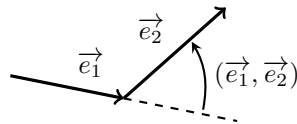


FIGURE 1

Ce modèle est dit *résoluble*, car on a écrit la fonction de partition sous une forme qui permet de calculer beaucoup des quantités qui nous intéressent.

1.2 Modèles “vertex”

Étant donné un graphe planaire $G = (V, E)$ on définit le graphe médial $G^M = (V^M, E^M)$ par :

- $V^M = E$,
- E^M s’obtient de la façon suivante : pour chaque face f de G , on tourne autour de f en sens horaire en reliant les arêtes voisines dans ce parcours. Ainsi E^M s’identifie naturellement aux couples (f, c) où f une face de G et c un des “coins” de f .

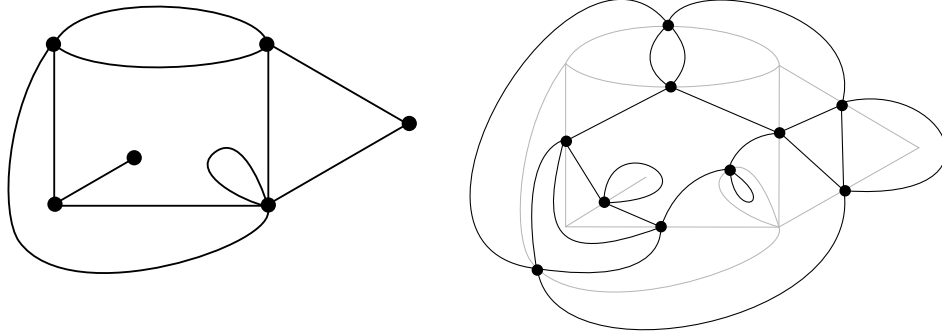


FIGURE 2 – Un graphe planaire et son graphe médial.

Le graphe G^M est planaire. Les faces de G^M correspondent soit à un sommet de G , soit à une face de G . Dans les dessins suivants on coloriera en gris les faces qui correspondent à un sommet de G .

Le graphe G^M est 4-régulier (chaque sommet est de degré 4). Fixons une orientation de référence sur les arêtes du graphe G , alors on peut numéroter les arêtes de G^M autour du sommet correspondant comme sur la figure 3.

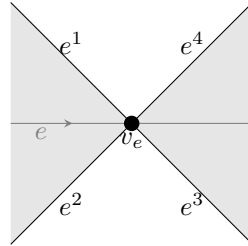


FIGURE 3 – Une arête primale $e \in E$ avec son orientation de référence, le sommet $v_e \in V^M$ et les arêtes médiales adjacentes.

On appelle *configuration “vertex”* une application ν de E^M dans $\{\pm 1\}$; on représentera une telle configuration en coloriant en rouge les arêtes de G^M sur lesquelles ν vaut -1 .

Pour tout $e \in E$, on définit une fonction de poids $w_e : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rightarrow \mathbb{C}$. Alors le poids d’une configuration “vertex” est donné par

$$w(\nu) = \prod_{e \in E} w_e(\nu(e^1), \nu(e^2), \nu(e^3), \nu(e^4))$$

et donc le modèle a pour fonction de partition

$$Z(X) = \sum_{\nu: E^M \rightarrow \{\pm 1\}} w(\nu).$$

Ce modèle n’est en général pas considéré dans toute sa globalité, et on prend souvent des fonction de poids w_e qui s’annulent sur certaines configurations. Par exemple, le modèle *8 vertex* (ou 8V) consiste à prendre des fonctions

de poids nuls pour les configurations de degré impair en un sommet. On définit également les modèles 16V et 6V avec les configurations présentées sur la figure 4. De plus, un tel modèle est dit *symétrique* lorsque les poids des configurations complémentaires (à la verticale sur la figure 4) sont égaux.

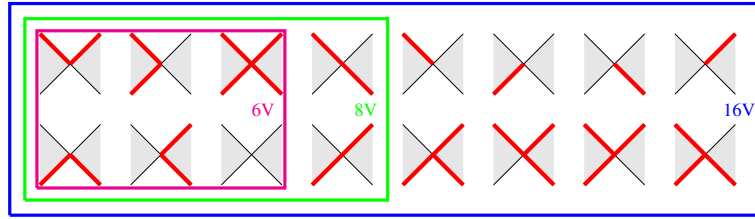


FIGURE 4 – Les poids non nuls pour différents modèles “vertex”.

1.3 Modèle de dimères

Commençons par construire, une fois de plus, une décoration de graphe. Soit G un graphe planaire, on commence par considérer son graphe médial G^M . Le graphe décoré G^Q est construit en remplaçant les sommets de G^M par des petits carrés, comme sur la figure 5. Le graphe G^Q est alors planaire et biparti.

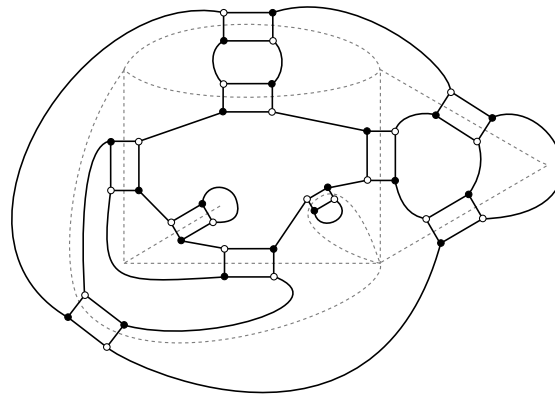


FIGURE 5 – Le graphe initial G (en pointillés) et le graphe G^Q en traits pleins.

Munissons G^Q de constantes réelles positives $(\mu_e)_{e \in E^Q}$ sur les arêtes. On partitionne V^Q en deux ensembles B^Q et N^Q (sommets blancs et noirs) qui correspondent à un 2-coloriage de G^Q . Une *configuration de dimères* est un sous-ensemble d’arêtes $m \subset E^Q$ tel que tout sommet $v \in V^Q$ soit adjacent à une et une seule arête de m . On munit ces configurations du poids

$$w(m) = \prod_{e \in m} \mu_e,$$

et le modèle a pour fonction de partition

$$Z_{dim}(G^Q, \mu) = \sum_m w(m).$$

La probabilité d’une configuration m est donc $\frac{w(m)}{Z}$.

Ce modèle, dit modèle de dimères, est très bien compris pour les graphes planaires bipartis. Donnons deux théorèmes de base pour justifier cette affirmation.

Théorème 1.1 (Kasteleyn [9]). *Il existe une orientation² (dite orientation de Kasteleyn) des arêtes de G^Q telle que*

$$Z_{\dim}(G^Q, \mu) = |\det K|$$

où $K = (K_{b,n})_{b \in B^Q, n \in N^Q}$, la matrice de Kasteleyn, est une matrice indexée par B^Q et N^Q définie par

$$K_{b,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } b \text{ et } n \text{ ne sont pas reliés,} \\ \mu(e) & \text{si } \begin{array}{c} b \circ \xrightarrow{e} \bullet n \\ \phantom{\xrightarrow{e}} \end{array}, \\ -\mu(e) & \text{si } \begin{array}{c} b \circ \xleftarrow{e} \bullet n \\ \phantom{\xleftarrow{e}} \end{array}. \end{cases}$$

Théorème 1.2 (Kenyon [10]). *Soit un ensemble d'arêtes $X = \{b_1 n_1, \dots, b_k n_k\}$. La probabilité que X soit inclus dans m vaut*

$$\left(\prod_{i=1}^k K(b_i, n_i) \right) \det(K^{-1}(n_i, b_j))_{1 \leq i, j \leq k}.$$

L'objectif est donc de décrire le modèle d'Ising comme un modèle de dimères, pour profiter de ce genre de théorèmes. On aura pour cela besoin de la notion de dualité.

2 Qu'est-ce qu'une relation de dualité ?

2.1 Exemple fondateur : la dualité de Kramers-Wannier

On reprend le modèle d'Ising défini précédemment, sur un graphe G planaire. Rappelons qu'on peut définir son graphe dual G^* , dont les sommets sont les faces de G , et les arêtes sont en bijection avec celles de G .

Étant donné une configuration de spins σ sur G , on peut séparer les régions où σ vaut 1 de celles où σ vaut -1 , en dessinant les arêtes duales qui séparent ces régions. L'ensemble d'arêtes duales obtenu forme ce qu'on appelle un *polygone* sur G^* , c'est-à-dire un sous-ensemble d'arêtes tel que tout sommet soit de degré pair. Ce polygone est appelé *développement basse température* de σ .

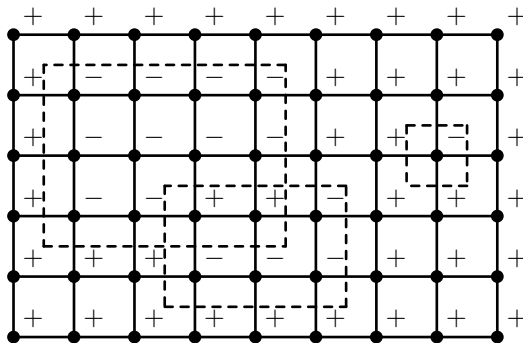


FIGURE 6 – Le graphe G en traits pleins, une configuration de spins et son développement basse température en pointillés

On a donc une fonction qui à une configuration de spins associe un polygone de G^* . Il est facile de voir que cette application est surjective, et que σ et σ' ont même image ssi $\sigma = -\sigma'$. De plus, deux configurations opposées ont même énergie. Cette énergie est une somme dont les termes valent $-J_e$ pour les arêtes e dont le spin est le même aux deux extrémités, J_e pour les autres. Le deuxième cas correspond exactement aux arêtes e telles que son arête duale e^* appartient au développement basse température de σ . On en déduit facilement la réécriture de la fonction de partition :

2. Il s'agit d'une orientation "clockwise-odd" : toute face doit avoir un nombre impair d'arêtes orientées dans le sens horaire.

Proposition 2.1 (Développement basse température [11]). Soit $\mathcal{P}(G^*)$ l'ensemble des polygones de G^* , alors

$$Z(J) = C(J) \sum_{P^* \in \mathcal{P}(G^*)} \left(\prod_{e^* \in P^*} \exp(-2J_{e^*}) \right),$$

où $C(J) = 2 \prod_{e \in E} \exp(J_e)$.

Par une transformation purement combinatoire sur la fonction de partition, on peut montrer un deuxième développement, qui fait intervenir les polygones sur le graphe initial :

Proposition 2.2 (Développement haute température [11]).

$$Z(J) = C'(J) \sum_{P \in \mathcal{P}(G)} \left(\prod_{e \in P} \tanh(J_e) \right),$$

où $C'(J) = (2^{|V|} \prod_{e=uv \in E} \cosh(J_e))$

Démonstration. On a

$$Z(J) = \sum_{\sigma: V \rightarrow \{\pm 1\}} \prod_{e=uv \in E} \exp(J_e \sigma_u \sigma_v).$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \exp(J_e \sigma_u \sigma_v) &= \cosh(J_e) + \sigma_u \sigma_v \sinh(J_e) \\ &= \cosh(J_e) (1 + \sigma_u \sigma_v \tanh(J_e)). \end{aligned}$$

Mettons en facteur les $\cosh(J_e)$ et on développons le produit sur e présent dans Z . Cela donne :

$$\begin{aligned} Z(J) &= \left(\prod_{e=uv \in E} \cosh(J_e) \right) \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^V} \sum_{E_0 \subset E} \prod_{e=uv \in E_0} \sigma_u \sigma_v \tanh(J_e) \\ &= \left(\prod_{e=uv \in E} \cosh(J_e) \right) \sum_{E_0 \subset E} \left(\prod_{e \in E_0} \tanh(J_e) \left(\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^V} \prod_{e=uv \in E_0} \sigma_u \sigma_v \right) \right). \end{aligned}$$

La somme $\sum_{\sigma \in \{-1,1\}^V} \prod_{e=uv \in E_0} \sigma_u \sigma_v$ est nulle dès qu'une variable σ_u a un degré impair dans le produit. Autrement dit, cette somme est nulle dès que E_0 n'est pas un polygone de G ; dans le cas où E_0 est un polygone, elle vaut $2^{|V|}$. On en déduit la formule sans peine. \square

On a donc une jolie formule qui lie les polygones d'un graphe et de son dual :

$$C(J) \sum_{P^* \in \mathcal{P}(G^*)} \left(\prod_{e^* \in P^*} \exp(-2J_{e^*}) \right) = C'(J) \sum_{P \in \mathcal{P}(G)} \left(\prod_{e \in P} \tanh(J_e) \right).$$

Cette formule peut être exploitée pour montrer que le modèle d'Ising a même fonction de partition qu'un modèle d'Ising sur le graphe dual G^* , pour des constantes $(J_{e^*})_{e^* \in E^*}$ correctement choisies, et que cette relation échange développement haute température et basse température. On constate même que la relation liant J_e et J_{e^*} est symétrique : elle s'énonce simplement par

$$\sinh(2J_e) \sinh(2J_{e^*}) = 1.$$

Cela signifie notamment que la relation de dualité est involutive. Pour ces raisons, le modèle d'Ising est dit *auto-dual*.

Le point essentiel de cette dualité est l'idée d'écrire $\exp(J_e \sigma_u \sigma_v)$ comme une fonction affine de $\sigma_u \sigma_v$. Comment généraliser cette idée ?

Chaque configuration est munie d'un poids (ici $\prod_{e \in E} \exp(J_e \sigma_u \sigma_v)$) qui s'écrit comme un produit de poids locaux. Chaque poids local est une application qui à une *interaction locale* (ici $\sigma_u \sigma_v$) associe, disons, un nombre complexe. L'interaction locale prend ses valeurs dans un groupe abélien fini G (ici $\{\pm 1\}$). Il s'agit donc d'effectuer la transformée de Fourier discrète de cette application, c'est-à-dire de décomposer la fonction de poids locale sur la base des caractères de G (qui sont ici la fonction constante égale à 1 et l'identité). C'est cette idée qui fournit le cadre théorique qui va suivre ; on le mentionne simplement pour donner une définition acceptable de la dualité dont on parle ici.

2.2 Dualité pour des modèles à valeurs dans un groupe abélien

Le but de cette partie est de donner une définition générale de la dualité des modèles, en utilisant le cadre dans lequel on sait adapter la transformée de Fourier, à savoir celui des groupes abéliens localement compacts. Les idées présentées sont reprises de Caracciolo et Sportiello[3].

Soit G un groupe topologique, abélien, localement compact. On utilisera la notation additive pour un tel groupe. Les faits suivants, essentiellement issus de l'algèbre, vont nous être utiles (voir par exemple [6]) :

1. Il existe une mesure μ sur G muni de sa tribu borélienne, qui est invariante par les applications de multiplications : pour toute partie borélienne $S \subset G$ et tout $g \in G$, $\mu(gS) = \mu(S)$. Elle est unique, à multiplication par un scalaire près. On l'appelle mesure de Haar sur G .

Lorsque G est compact, μ est finie. Lorsque G est σ -compact (*i.e.* union dénombrable de compacts) alors μ est σ -finie.

2. On définit \widehat{G} , appelé groupe *dual* de G , comme le groupe des morphismes continus de G vers le cercle-unité \mathbb{U} de \mathbb{C} . Alors \widehat{G} , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, est un groupe abélien localement compact.

3. Le groupe G est canoniquement isomorphe à son bidual $\widehat{\widehat{G}}$.

4. Soit $g \in G$ et $\rho \in \widehat{G}$. On note

$$\rho(g) = \exp(i \nu_G(\rho, g)).$$

Comme on a pris une notation additive pour G et \widehat{G} , ν_G est alors une application bilinéaire de $\widehat{G} \times G$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. De plus,

$$\nu_G(\rho, g) = -\nu_{\widehat{G}}(g, \rho)$$

en utilisant implicitement l'isomorphisme canonique entre G et $\widehat{\widehat{G}}$.

5. Soit F une application de G dans \mathbb{C} , continue et dans $L^1(\mu)$. Alors on peut définir sa transformée de Fourier $\widehat{F} : \widehat{G} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\widehat{F}(\rho) = \int_G F(g) \exp(i \nu_G(\rho, g)) \mu(dg).$$

La fonction \widehat{F} est continue et bornée ; si de plus elle est dans $L^1(\widehat{\mu})$, où $\widehat{\mu}$ est la mesure de Haar sur \widehat{G} , alors on a la formule d'inversion de Fourier :

$$F(g) = \int_{\widehat{G}} \widehat{F}(\rho) \exp(i \nu_{\widehat{G}}(g, \rho)) \widehat{\mu}(d\rho),$$

pour une renormalisation correcte de $\widehat{\mu}$. Cette formule signifie que $\widehat{\widehat{F}} = F$.

6. (*Adjonction*) Si G_1 et G_2 sont des groupes abéliens localement compacts, et $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ est un morphisme continu, alors il existe un unique morphisme continu $\phi^T : \widehat{G}_2 \rightarrow \widehat{G}_1$ tel que pour tous $g \in G_1$ et $\rho \in \widehat{G}_2$,

$$\nu_{G_2}(\rho, \phi(g)) = -\nu_{G_1}(\phi^T(\rho), g).$$

Le morphisme ϕ^T est appelé *adjoint* de ϕ .

Soient G_1 et G_2 deux groupes abéliens localement compacts, σ -compacts. On note μ_1 et μ_2 leurs mesures de Haar respectives. Soient $F_1 \in L^1(\mu_1)$ et $F_2 \in L^1(\mu_2)$ des applications continues à valeurs dans \mathbb{C} . Soit enfin un morphisme continu ϕ de G_1 dans $\widehat{G_2}$. On considère la quantité

$$Z = \int_{G_1} F_1(x) \widehat{F_2}(\phi(x)) \mu_1(dx).$$

Pour nous, Z représente la fonction de partition d'un modèle de mécanique statistique défini sur $\Omega = G_1$ muni de sa mesure de Haar, avec pour fonction de poids $w(x) = F_1(x) \widehat{F_2}(\phi(x))$. Ici, cette fonction est à valeurs dans \mathbb{C} , mais dans le cas particulier où elle est à valeurs réelles positives, cela correspond bien à un modèle de mécanique statistique comme on l'a défini précédemment ; on parlera toujours de modèle, de fonctions de poids et de fonction de partition quand w est à valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}}$, bien qu'on perde l'interprétation directe en termes de probabilités.

Le poids $w(x) = F_1(x) \widehat{F_2}(\phi(x))$ est assez général³. Son interprétation physique est la suivante : imaginons que G_1 est un groupe produit, alors l'état $x \in G_1$ a plusieurs composantes, qu'on appelle des *degrés de libertés* (par exemple, les spins $\sigma(v)$ où $v \in V$ dans le modèle d'Ising). Le poids d'une configuration est un produit portant d'une part sur les degrés de libertés (comme le terme de champ magnétique $\prod_{v \in V} \exp(H_v \sigma_v)$) et sur des interactions entre ces degrés de libertés (comme le terme $\prod_{uv \in E} \exp(J_e \sigma_u \sigma_v)$). Le terme $F_1(x)$ sert à retranscrire le premier type de dépendance, et le terme $\widehat{F_2}(\phi(x))$ le second. Cela signifie que les interactions sont à valeurs dans $\widehat{G_2}$; le choix d'un groupe dual pour ces-dernières est justifié par des raisons esthétiques dans le calcul qui va suivre :

$$\begin{aligned} Z &= \int_{G_1} F_1(x) \widehat{F_2}(\phi(x)) \mu_1(dx) \\ &= \int_{G_1} F_1(x) \int_{G_2} F_2(y) \exp(i\nu_{G_2}(\phi(x), y)) \mu_2(dy) \mu_1(dx) \\ &= \int_{G_1} \int_{G_2} F_1(x) F_2(y) \exp(i\nu_{G_1}(\phi^T(y), x)) \mu_2(dy) \mu_1(dx) \\ &= \int_{G_2} F_2(y) \widehat{F_1}(\phi^T(y)) \mu_2(dy). \end{aligned}$$

Ainsi, le modèle d'ensemble d'états G_1 et de fonction de poids $F_1(x) \widehat{F_2}(\phi(x))$ a même fonction de partition que le modèle d'ensemble d'états G_2 et de fonction de partition $F_2(y) \widehat{F_1}(\phi^T(y))$. On dit que ces modèles sont en dualité.

Le fait que la dualité des modèles de mécanique statistique provienne d'une notion de dualité algébrique permet d'expliquer certaines coïncidences apparentes de calcul, comme l'apparition de matrices orthogonales.

En pratique, on retiendra que pour trouver le dual d'un modèle, on commence toujours par écrire la transformée de Fourier de la fonction qui associe un poids aux interactions.

2.3 Dualité du modèle 8V symétrique

Prenons un modèle 8V symétrique, et cherchons s'il a un dual agréable. Les interactions locales sont à valeurs dans $G = \{\pm 1\}^4$: il s'agit des $(\nu(e^1), \nu(e^2), \nu(e^3), \nu(e^4))$ pour $e \in E$. Toutefois, on ne considère que des configurations de degré pair en chaque sommet, donc les interactions sont à valeurs dans le sous-groupe $H \subset G$ des quadruplets $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in G$ vérifiant $\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 = 1$. De plus, l'hypothèse de symétrie fait que l'interaction ne dépend que de la classe de $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ dans le quotient $\overline{H} = H / \pm 1$. On obtient ainsi un groupe \overline{H} isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, et il est facile de voir que le dual de \overline{H} est formé des quatre éléments suivants (on note $(\overline{\nu_1}, \overline{\nu_2}, \overline{\nu_3}, \overline{\nu_4})$ la classe de

3. La principale restriction étant que le modèle doit avoir pour espace d'états un groupe abélien localement compact

$(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ dans \overline{H} :

$$\begin{aligned}\chi_1(\overline{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}) &= \frac{1 + \nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4}{2} \\ \chi_2(\overline{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}) &= \frac{\nu_1 \nu_2 + \nu_3 \nu_4}{2} \\ \chi_3(\overline{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}) &= \frac{\nu_1 \nu_3 + \nu_2 \nu_4}{2} \\ \chi_4(\overline{\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4}) &= \frac{\nu_1 \nu_4 + \nu_2 \nu_3}{2}\end{aligned}$$

La transformée de Fourier consiste à écrire

$$w_e = c_e \chi_1 + b_e \chi_2 + d_e \chi_3 + a_e \chi_4.$$

La donnée de w_e est équivalente à la donnée de quatre nombres complexes, $\alpha_e, \beta_e, \gamma_e, \delta_e$, qui sont les poids associés aux configurations locales représentées sur la figure 7 (une configuration et son complémentaire ont même poids, par exemple $w_e(-1, +1, +1, -1) = w_e(+1, -1, -1, +1) = \alpha_e$).

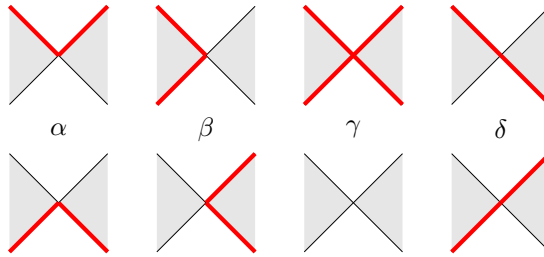


FIGURE 7 – Les 8 configurations locales du modèle 8V.

Alors le calcul permet de trouver la relation entre $(\alpha_e, \beta_e, \gamma_e, \delta_e)$ et (a_e, b_e, c_e, d_e) :

$$\begin{pmatrix} \alpha_e \\ \beta_e \\ \gamma_e \\ \delta_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_e \\ b_e \\ c_e \\ d_e \end{pmatrix}.$$

La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique et, à un facteur près, orthogonale. Le système s'inverse :

$$\begin{pmatrix} a_e \\ b_e \\ c_e \\ d_e \end{pmatrix} = \frac{1}{4} M \begin{pmatrix} \alpha_e \\ \beta_e \\ \gamma_e \\ \delta_e \end{pmatrix}.$$

Pour se débarrasser du facteur $\frac{1}{4}$, on définit $(a'_e, b'_e, c'_e, d'_e) = 2(a_e, b_e, c_e, d_e)$ et $N = \frac{1}{2}M$. Notons aussi $X_e = (\alpha_e, \beta_e, \gamma_e, \delta_e)$ et $X'_e = (a'_e, b'_e, c'_e, d'_e)$. Alors la transformation est involutive :

$$X_e = NX'_e \text{ et } X'_e = NX_e.$$

On notera simplement $X = NX'$, ce qui signifie que pour tout $e \in E$, $X_e = NX'_e$.

Proposition 2.3 (Dualité ; Baxter [1]). Si $X = NX'$ (i.e $X' = NX$), alors

$$Z(X) = Z(X').$$

Autrement dit, le modèle 8V symétrique est auto-dual, ce qui veut dire que les coefficients de Fourier a'_e, b'_e, c'_e, d'_e peuvent s'interpréter comme des nouveaux poids locaux pour les configurations locales $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (cf figure 7). La preuve de cette proposition est très semblable au développement haute température du modèle d'Ising : après avoir écrit w_e comme transformée de Fourier, on développe le produit sur $e \in E$ dans Z , puis on intervertit les sommes, et un petit raisonnement combinatoire montre que les termes qui contribuent correspondent à des configurations 8V pour ces nouveaux poids X' . Voir le mémoire pour une preuve complète.

La proposition précédente signifie que Z est invariante sous l'action de multiplication par N .

Remarque. Par ailleurs, on peut montrer que dans une configuration 8V quelconque, le nombre de configurations locales de type δ est pair. Ainsi, multiplier les poids δ_e par -1 ne change pas la fonction de partition ; Z est donc également invariante pour l'action de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donc Z est invariante par le groupe engendré par N et A . Il se trouve que ce groupe est isomorphe à \mathfrak{S}_3 , et qu'on peut même trouver un changement de base pour lequel N corresponde à la permutation (12) et A à la permutation (13).

Remarque. On peut se demander ce que devient dans la dualité pour un modèle 8V non symétrique. La dualité oblige alors à considérer des caractères du style $\chi_1 = \frac{\nu_1 + \nu_2 \nu_3 \nu_4}{2}$, et que la dualité envoie ce modèle non pas sur un modèle 8V, mais sur un modèle 16V symétrique. Résumons les groupes des interactions locales pour tous ces modèles :

- $G = \{\pm 1\}^4$ pour le modèle 16V général,
- $\overline{G} = G / \pm 1$ pour le modèle 16V symétrique,
- H le sous-groupe de G formé des quadruplés dont le produit vaut 1 pour le modèle 8V général,
- $\overline{H} = H / \pm 1$ pour le modèle 8V symétrique.

Les relations de dualité sont résumées dans le diagramme de la figure 8.

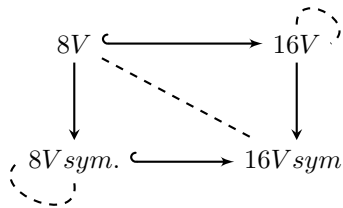


FIGURE 8 – Modèles “vertex” duaux : les pointillés représentent les modèles en dualité.

On voit à l'œuvre la dualité entre sous-groupes et quotients, qui provient du théorème suivant :

Proposition 2.4 ([6]). Soit G un groupe abélien localement compact et H un sous-groupe fermé de G . On note $p : G \rightarrow G/H$ la projection.

Alors $\widehat{p} : \widehat{G/H} \rightarrow \widehat{G}$ définit un isomorphisme de $\widehat{G/H}$ sur H^\perp (qui est défini comme le sous-groupe formé des éléments \widehat{G} qui valent 1 sur H).

3 Du modèle d'Ising aux dimères

Reprenons notre modèle d'Ising planaire. Le but de cette partie est de décrire ce modèle comme un modèle de dimères sur un graphe planaire biparti. On va donner les grandes étapes de cette correspondance due à Dubédat [5] et basée sur des idées de Nienhuis [12].

3.1 Du modèle d'Ising au modèle 8V

On a vu que la fonction de partition $Z(J)$ du modèle d'Ising avec constantes $J = (J_e)_{e \in E}$ sur les arêtes s'écrivait, par développement basse température,

$$Z(J) = C(J) \sum_{P^* \in \mathcal{P}(G^*)} \left(\prod_{e^* \in P^*} \exp(-2J_e) \right),$$

et par développement haute température,

$$Z(J) = C'(J) \sum_{P \in \mathcal{P}(G)} \left(\prod_{e \in P} \tanh(J_e) \right),$$

pour des constantes explicites $C(J)$ et $C'(J)$.

Ainsi,

$$Z(J)^2 = cste \sum_{P \in \mathcal{P}(G), P^* \in \mathcal{P}(G^*)} \left(\prod_{e \in P} \tanh(J_e) \prod_{e^* \in P^*} \exp(-2J_e) \right)$$

Autrement dit, un couple de modèles d'Ising a même fonction de partition qu'un modèle de couples de polygones indépendants, l'un sur G , l'autre sur G^* .

Prenons un modèle 8V symétrique sur le graphe médial G^M . Alors on peut associer à toute configuration de 8V un tel couple de polygones, l'un sur G et l'autre sur G^* , de la façon illustrée dans la figure 9. Remarquons qu'une configuration de 8V et son complémentaire ont même image, mais elles ont aussi même poids.

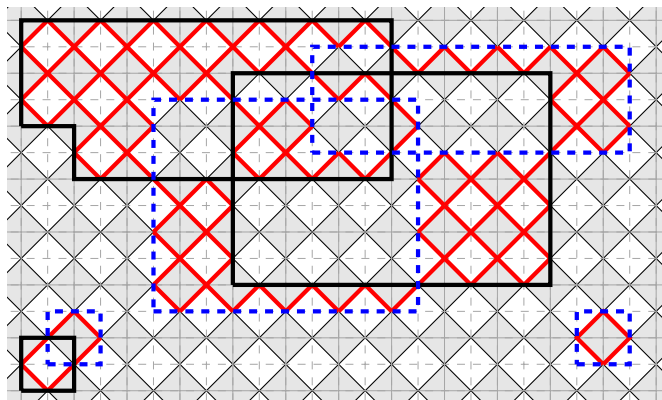


FIGURE 9 – Le graphe initial (en traits gris fins), son dual (en pointillés), une configuration 8V (en rouge) et son image (en noir et bleu).

Pour de bons choix de poids pour le modèle 8V, cette application préserve les poids : le poids de l'image est égal à la somme des poids des antécédents. Cela montre que les modèles au départ et à l'arrivée ont même fonction de partition.

Plus précisément, en prenant $(X_e)_{e \in E} = (\alpha_e, \beta_e, \gamma_e, \delta_e)_{e \in E}$ définis par

$$\begin{aligned}\alpha_e &= \tanh(J_e) \\ \beta_e &= \exp(-2J_e) \\ \gamma_e &= 1 \\ \delta_e &= \alpha_e \beta_e\end{aligned}$$

on a la formule

$$Z(J)^2 = cste Z_{8Vsym}(X).$$

3.2 Du 8V au 6V

On fait agir les matrices A puis N de la section 2.3 ce modèle 8V. Le modèle obtenu est essentiellement le dual du modèle 8V symétrique précédent. C'est donc un modèle 8V symétrique, et le calcul montre qu'il correspond aux nouvelles constantes $(X'_e)_{e \in E} = (\alpha'_e, \beta'_e, \gamma'_e, \delta'_e)$ définies par

$$\begin{aligned}\alpha'_e &= 1 - \exp(-2J_e) \\ \beta'_e &= 1 - \tanh(J_e) \\ \gamma'_e &= 1 - \exp(-2J_e) \tanh(J_e) \\ \delta'_e &= 0.\end{aligned}$$

Comme $\delta'_e = 0$, c'est un modèle 6V symétrique. Si on multiplie tous les poids $(\alpha'_e, \beta'_e, \gamma'_e, \delta'_e)$ par une même constante, l'effet sur la fonction de partition est simplement une multiplication par cette même constante. Or en divisant tous les poids précédents par γ'_e , on trouve des formules plus jolies :

$$\begin{aligned}\alpha''_e &= \tanh(2J_e) \\ \beta''_e &= \cosh(2J_e)^{-1} \\ \gamma''_e &= 1 \\ \delta''_e &= 0.\end{aligned}$$

On a donc maintenant

$$Z(J)^2 = cste Z_{6Vsym}(X'')$$

3.3 Du 6V aux dimères

Prenons maintenant un modèle de dimères sur G^Q . À une configuration de dimères, on fait correspondre une configuration de 6V sur G^M par la transformation locale de la figure 10.

Pour un bon choix de poids $(\mu_{e^Q})_{e^Q \in E^Q}$ du modèle de dimères, cette application préserve les poids. Les poids appropriés sont représentés sur la figure 11.

On a donc $Z(J)^2 = cste Z_{dim}(G^Q, \mu)$.

Finalement, il vient :

Théorème 3.1 (Dubédat [5], Boutillier-de Tilière [2]). *Pour un modèle d'Ising (G, J) , il existe des poids (explicites) $(\mu_e)_{e \in E^Q}$ sur G^Q tels que*

$$Z(J)^2 = CZ_{dim}(G^Q, \mu)$$

où $C = 2^{|V|} \prod_{e \in E} \cosh(2J_e)$.

Toutes les étapes de cette approche sont des transformations locales de nos configurations, à l'exception de la dualité du 8V. C'est un problème, car même si on garde la même fonction de partition, on aimerait conserver d'autres structures (par exemple les corrélations entre spins), et cela n'est pas possible *a priori* lorsqu'on effectue une manipulation combinatoire sur la fonction de partition comme la dualité. Dans [2], il est démontré que certaines structures, à savoir les interfaces du XOR des deux modèles d'Ising, sont tout de même préservées.

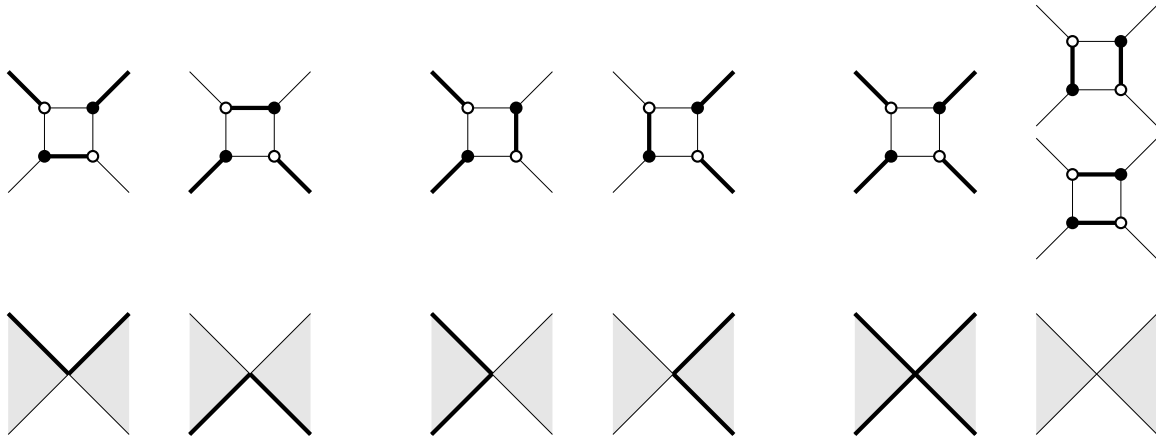


FIGURE 10 – La transformation des dimères en configurations 6V.

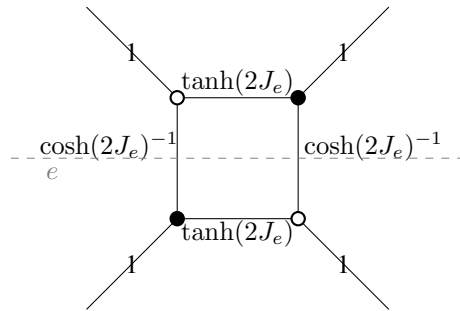


FIGURE 11 – Constantes pour le modèle dimères sur G^Q .

4 Problèmes ouverts

Listons ici quelques questions liées aux notions introduites dans cette introduction au domaine de recherche.

1. En se souvenant du théorème de Kasteleyn, qui exprimait Z_{dim} comme un déterminant, on voit que le théorème final ressemble à la formule de Kac-Ward. Existe-t-il un moyen simple de passer de l'une à l'autre ?
2. Est-il possible de passer du modèle d'Ising à ce modèle de dimères sans aucune relation de dualité ?
3. Peut-on élaborer une théorie plus complète de la dualité, qui permettrait de faire passer plus d'information que la fonction de partition ?
4. On commence à connaître quelques théorèmes qui donnent la limite d'échelle des modèles de dimères, notamment sur des graphes périodiques. Peut-on en déduire des limites d'échelle pour le modèle d'Ising ? En particulier, on aimerait pouvoir étudier l'invariance conforme du modèle d'Ising (voir [4],[13]) par ces techniques.
5. La dualité entre le modèle 8V asymétrique et le modèle 16V permet-elle de comprendre des généralisations du modèle d'Ising ?

Références

- [1] R. J. BAXTER : *Exactly solved models in statistical mechanics*. Academic Press, London, 1982.
- [2] C. BOUTILLIER et B. de TILIÈRE : Height representation of XOR-Ising loops via bipartite dimers. *Electron. J. Probab.*, 19:no. 80, 33, 2014.
- [3] S. CARACCILO et A. SPORTIELLO : General duality for abelian-group-valued statistical-mechanics models. *J. Phys. A*, 37(30):7407–7432, 2004.
- [4] D. CHELKAK et S. SMIRNOV : Universality in the 2d ising model and conformal invariance of fermionic observables. *Inventiones mathematicae*, 189(3):515–580, 2012.
- [5] J. DUBÉDAT : Exact bosonization of the ising model. *arXiv e-print*, 2011. <http://arxiv.org/abs/1112.4399>.
- [6] E. HEWITT et R. KENNETH : *Abstract Harmonic Analysis, Volume I Structure of Topological Groups Integration Theory Group Representations*, volume 115 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, Verlag New York, 1979.
- [7] E. ISING : Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Zeitschrift für Physik*, 31(1):253–258, 1925.
- [8] M. KAC et J. C. WARD : A combinatorial solution of the two-dimensional ising model. *Phys. Rev.*, 88:1332–1337, Dec 1952.
- [9] P. W. KASTELEYN : The statistics of dimers on a lattice : I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica*, 27:1209–1225, décembre 1961.
- [10] R. KENYON : Local statistics of lattice dimers. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 33(5):591–618, 1997.
- [11] H. A. KRAMERS et G. H. WANNIER : Statistics of the two-dimensional ferromagnet. part i. *Phys. Rev.*, 60:252–262, Aug 1941.
- [12] B. NIENHUIS : Critical behavior of two-dimensional spin models and charge asymmetry in the coulomb gas. *Journal of Statistical Physics*, 34(5-6):731–761, 1984.
- [13] S. SMIRNOV : Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model. *Ann. of Math. (2)*, 172(2):1435–1467, 2010.