Introduction à un domaine de recherche: actions du groupe de Poincaré et principe de relativité

Olivier Peltre
sous la direction de Daniel Bennequin

octobre 2015

Le groupe de Poincaré $\mathfrak{P}$ est constitué d'isométries affines de l'espace de Minkowski W, modèle local de l'univers. On note :

$$\mathfrak{P} = W \rtimes \mathfrak{L}$$

où $\mathfrak{L}$ est le groupe de Lorentz restreint, défini comme la composante connexe de l'identité de $\mathrm{SO}(1,3)$.

Nous nous proposons ici de décrire les représentations irréductibles unitaires de $\mathfrak{P}$ ainsi que les géométries de Cartan modelées sur $\mathfrak{P}$. Elles induisent respectivement une action de son algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ sur un espace de Hilbert et sur le fibré des repères d'une variété lorentzienne. Physiquement, ces deux actions permettent de décrire les changements de référentiels de deux points de vue, l'un spectral et l'autre spatial.

Introduction

Le principe de relativité, énoncé par Galilée en 1632, marque le commencement de la Physique moderne. Il a depuis revêtu de nombreuses formes mathématiques différentes. En langage naturel, il exprime qu'un groupe abstrait de changements de référentiels inertiels préserve les lois physiques, chaque état de mouvement inertiel étant indiscernable par l'expérience. La forme concrète que prend ce principe dépend initimement de notre description de l'espace, du temps, et des êtres physiques qui l'habitent.

La mécanique newtonienne décrivait le mouvements de corps dans un univers plat où le temps était absolu : ses lois étaient invariantes sous le groupe de Galilée. Cette conception du temps a du être abandonnée, lorsque le groupe de Lorentz apparût comme groupe de symétrie des équations de Maxwell : le principe de relativité ne pouvait plus s'appliquer simultanément à la mécanique et à l'électrodynamique. La relativité restreinte d'Einstein les réconcilie en 1905 en décrivant l'univers par l'espace de Minkowski, dont le groupe de Poincaré constitue le groupe des isométries affines. Depuis 1915 l'espace de Minkowski n'est plus qu'un modèle local de l'univers et les relations entre référentiels inertiels sont étudiées à difféomorphismes près. Le principe de relativité devient ce qu'Einstein appelle la covariance générale des équations : elles doivent porter sur des objets géométriques définis intrinsèquement. Les équations de la gravitation portent sur l'analogue 4-dimensionnel d'un tenseur des contraintes [1], dont Cartan a montré qu'il était le seul tenseur covariant et conservé à vérifier les hypothèses physiques demandées par Einstein.

Au début du XX^{e} siècle apparaît aussi la mécanique quantique qui force à abandonner la description des électrons par des charges ponctuelles. Ils sont désormais décrits par des vecteurs normés d'un espace de Hilbert, appelés fonctions d'onde. La première équation dynamique relativiste pour l'électron a été introduite par Dirac en 1928 [5], le principe de relativité s'exprimant alors dans une représentation unitaire du groupe de Poincaré. Les représentations irréductibles correspondent à l'espace des états d'une particule élémentaire et leur classification, établie par Wigner, fait naturellement apparaître deux paramètres : la masse et le spin.

Toute théorie physique relativiste doit donc décrire d'une manière ou d'une autre les changements de référentiels inertiels, ne serait-ce que par une action des déplacements infinitésimaux de $\mathfrak{p}$, bien que l'on ne sache pas toujours comment faire communiquer ces différentes actions. Ainsi l'opérateur de Dirac peut se définir aussi bien du point de vue spatial, agissant sur les sections d'un fibré spinoriel au dessus d'un univers courbe, que du point de vue spectral, agissant sur une représentation de Wigner. La dualité entre les représentations en position et en impulsion se fait habituellement par la transformée de Fourier qui définit un isomorphisme $L^2(W^*) \to L^2(W)$. Cependant cette dualité tombe si l'univers n'est plus décrit par l'espace de Minkowski plat W, et c'est une question ouverte que de relier ces deux points de vue dans le cas général. La géométrie non-commutative s'y intéresse, Alain Connes montre par exemple dans [4] comment à une algèbre d'opérateurs munie d'un opérateur de Dirac on peut associer une variété riemannienne. L'approche spectrale fait appel à la théorie des algèbres d'opérateurs : les éléments infinitésimaux du groupe de Poincaré se représentent par des observables quantiques, ce que nous exposons dans la section 1. L'approche spatiale fait appel à la théorie des fibrés principaux : au dessus de chaque point de l'univers, la copie d'un groupe permet de décrire les rotations infinitésimales d'un observateur se déplaçant avec des repères tout comme les libertés de jauge d'un système quantique. Le fibré des repères d'une variété lorentzienne donne un bon cadre pour écrire les équations de la gravitation d'Einstein, tandis que les théories de jauge décrivent les interactions du modèle standard dont la dynamique est contrôlée par les équations de Yang-Mills : nous introduisons certaines de ces notions dans la section 2.

Je tiens à remercier vivement M. Bennequin pour son accompagnement si précieux et profitable, ainsi que M. Zuk et M. Skandalis pour leurs cours grandement appréciés.

1 Représentations de Wigner

La mécanique quantique décrit l'état d'un système par un vecteur normé ψ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Une grandeur physique mesurable est alors décrite par un opérateur hermitien a appelé observable : son spectre correspond aux résultats possibles de la mesure et la décomposition diagonale de l'état du système donne la loi de probabilité d'observer ces résultats. Par exemple, si λ est une valeur propre de a et p_λ désigne le projecteur orthogonal sur l'espace propre $\mathcal{H}_\lambda$:

$$\mathbb{P}_\psi[a = \lambda] := \langle \psi, p_\lambda \psi \rangle$$

La condition de normalisation s'interprète naturellement comme :

$$\mathbb{P}_\psi[a \in \mathbb{R}] = \langle \psi, \psi \rangle = 1$$

elle doit être vérifiée par tous les observateurs et impose au groupe de Poincaré d'agir sur $\mathcal{H}$ par des opérateurs unitaires. L'unitarité des représentations est une contrainte très forte : les représentations unitaires de $\mathfrak{P}$ s'étendent en des représentations involutives de sa C^*-algèbre de groupe $\lambda(\mathfrak{P})$, qui est une clôture topologique de la représentation régulière gauche $\mathbb{C}[\mathfrak{P}] \subset B(L^2(\mathfrak{P}))$ en munissant $\mathfrak{P}$ de sa mesure de Haar.

Une C^*-algèbre est simplement définie comme une algèbre de Banach complexe $(A, ||\cdot||)$ munie d'une involution antilinéaire $*$ vérifiant l'axiome de C^*-norme :

$$\forall a \in A \quad ||a^* a|| = ||a||^2$$

Le prototype d'une C^*-algèbre est l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $B(\mathcal{H})$. La théorie des algèbres des opérateurs a été amorcée par Von Neumann qui cherchait à rendre plus rigoureuse notre description mathématique des phénomènes quantiques [11], en évitant notamment d'avoir recours aux "fonctions delta" de Dirac. Cette théorie présente l'avantage d'étudier une algèbre de manière intrinsèque indépendamment de ses représentations.

Le spectre de l'algèbre $\mathrm{Sp}\, A$ est défini comme l'ensemble des morphismes involutifs de A vers $\mathbb{C}$. La transformée de Gel'fand est alors définie comme :

$$\mathcal{G} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C(\mathrm{Sp}\, A) \\ a & \longmapsto & (\chi \mapsto \chi(a)) \end{array} \right.$$

$C(\mathrm{Sp}\, A)$ est une C^*-algèbre pour le produit des fonctions et la norme uniforme. La transformée de Gel'fand généralise la transformée de Fourier et définit un isomorphisme quand A est commutative : cela signifie que l'on peut diagonaliser simultanément des opérateurs qui commutent deux à deux. En particulier, on a :

$$\lambda(W) \sim C(W^*)$$

où $p \in W^*$ est identifié au caractère $(v \mapsto \mathrm{e}^{i\langle p, v\rangle}) \in \mathrm{Sp}\, \lambda(W)$. On a ainsi :

Théorème 1.1. *Les représentations de $\lambda(W)$ sont de la forme $\mathcal{H}_{\mu,n}$ avec :*

$$\mathcal{H}_{\mu,n} = \bigoplus_{k \geq 0} L^2(W^*, \mathbf{1}_{k \leq n} \cdot \mu)$$

où μ est appelée mesure spectrale et $n : W^* \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ fonction multiplicité.

En particulier, les représentations du groupe de Poincaré sont de cette forme. Les vecteurs de W agissent simplement par multiplication par des ondes planes dans $L^2(W^*)$, opération duale des translations dans $L^2(W)$ par la transformée de Fourier.

La relation de groupe dans $\mathfrak{P} = W \rtimes \mathfrak{L}$:

$$(0, g) \cdot (v, 1) \cdot (0, g)^{-1} = (g(v), 1)$$

permet, avec le résultat précédent, de caractériser la mesure spectrale des représentations de $\mathfrak{P}$:

Théorème 1.2. *Si μ est la mesure spectrale d'une représentation de $\mathfrak{P}$, on a pour tout $g \in \mathfrak{L}$:*

$$\mu \circ g \sim \mu$$

c'est-à-dire que le support de μ est une réunion d'orbites sous $\mathfrak{L}$ dans W^*.

En particulier, la mesure spectrale d'une représentation irréductible est à support sur une orbite.

C'est ainsi qu'apparaît la masse des particules élémentaires : elle caractérise les orbites du groupe de Lorentz dans W^*. Il y en a de trois types :

- les hyperboloïdes à deux nappes, de genre temps ;
- le cône isotrope, de genre lumière ;
- les hyperboloïdes à une nappe, de genre espace.

Pour $p \in W^*$ dans le support de μ, la masse m est définie par :

$$\langle p, p \rangle = m^2$$

Le théorème peut alors s'interpréter comme une équation de dispersion sur les vecteurs d'onde. La non-connexité des hyperboloïdes à deux nappes $m > 0, m < 0$ représente l'appariement particule/anti-particule. Le cas $m^2 < 0$ correspond aux *tachyons*, particules violant le principe de causalité.

La dernière étape dans la caractérisation des représentations irréductibles unitaires de $\mathfrak{P}$ consiste à montrer qu'elles proviennent toutes de l'induction d'un sous-groupe $\mathfrak{L}_0$ de $\mathfrak{L}$.

Définition 1.1. *Soient $H \subset G$ deux groupes finis et F une représentation complexe de H. L'induction de F est la représentation de G :*

$$\operatorname{Ind}_H^G F := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} F$$

où G agit par multiplication à gauche.

La représentation induite à G est une somme directe d'espaces isomorphes à F le long du quotient G/H :

$$\operatorname{Ind}_H^G F \sim \bigoplus_{g \in G/H} g \cdot F$$

Dans le cas qui nous intéresse, l'orbite de $p \in W^*$ est précisément le quotient de $\mathfrak{L}$ par le stabilisateur $\mathfrak{L}_0$ de p :

$$\mathfrak{L} \cdot p \sim \mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$$

Seulement l'induction à $\mathfrak{L}$ d'une représentation de $\mathfrak{L}_0$ devient une intégrale directe d'espaces de Hilbert le long du quotient $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$. Quand $H \subset G$ sont deux groupes de Lie, on peut définir une mesure G-invariante sur le quotient G/H et considérer pour toute représentation F de H le fibré associé :

$$G \times_H F \longrightarrow G/H$$

où $G \times_H F$ est le quotient de $G \times F$ par la relation d'équivalence :

$$(gh, f) \sim (g, hf)$$

Définition 1.2. *Soient $H \subset G$ deux groupes de Lie et F une représentation de H. L'induction de F est la représentation de G sur l'espace des sections de carré sommable :*

$$\mathrm{Ind}_H^G F := \Gamma^2_{G/H}(G \times_H F)$$

où $g \in G$ agit par :

$$g \cdot (\psi, f)(x) := (g\psi, f)(gx)$$

Dans le cas d'une particule massive, le stabilisateur $\mathfrak{L}_0$ est simplement le groupe compact SO_3 dont les représentations irréductibles sont de dimension finie et indexées par le demi-entier $\sigma \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$: c'est le spin. Le théorème de Wigner affirme que l'on peut obtenir toutes les représentations de $\mathfrak{P}$ par le procédé d'induction :

Théorème 1.3 (Wigner)**.** *Une représentation irréductible unitaire de $\mathfrak{P}$ dont la mesure spectrale est à support dans l'orbite $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0$ est l'induction d'une représentation de $\mathfrak{L}_0$ à $\mathfrak{L}$ étendue par l'action diagonale de W.*

Les travaux de Mackey [7, 8] généralisent le théorème de Wigner et clarifient la structure des représentations induites. La preuve de ces résultats reposent sur des méthodes de théorie spectrale : une difficulté est que l'on ne peut pas réaliser la représentation de $\mathfrak{L}_0$ comme sous-espace de la représentation induite à $\mathfrak{L}$. La construction de Gel'fand-Naimark-Segal permet par exemple de mieux comprendre les représentations d'une C^*-algèbre A en les associant à des *états* de A, c'est-à-dire des formes linéaires positives qui peuvent alors se mettre sous la forme :

$$a \longmapsto \langle \xi, a\xi \rangle$$

où ξ est un vecteur normé d'une représentation de A. Les états de A forment un convexe dont les points extrémaux correspondent aux représentations irréductibles de A. Dans le cas fini, l'opération d'induction de H à G consiste simplement à étendre par zéro un état de $\mathbb{C}[H]$ en un état de $\mathbb{C}[G]$, et il pourrait être intéressant d'étudier l'induction par les états dans le cas général.

2 Géométries de Cartan

La relativité générale décrit l'univers par une variété lorentzienne $(\mathcal{W}, g)$ dont la courbure rend compte des phénomènes gravitationnels. En s'inspirant de la méthode du repère mobile [3] telle que développée par Frenet pour l'étude des chemins et par Darboux pour l'étude des surfaces, Cartan propose de caractériser $\mathcal{W}$ par le recollement de repères plutôt que par le tenseur métrique. Ce point de vue très naturel l'amène à définir ce qu'il appelle alors les *espaces généralisés* : les géométries de Cartan généralisent les géométries de Klein et les géométries de Riemann.

Une géométrie de Cartan consiste d'abord en un fibré principal P : c'est une variété sur laquelle agit à droite un groupe de Lie H appelé groupe structural. On note $\rho : H \to \mathrm{Diff}(P)$ cette action. On a alors en tout point de la variété quotient P/H une copie du groupe H appelée fibre. L'action de H sur les fibres de P induit naturellement un champ de vecteur $\xi^* \in \chi(P)$ vertical pour tout $\xi \in \mathfrak{h}$:

Définition 2.1. *Pour tout $\xi \in H$, on appelle champ de vecteur fondamental associé à ξ le champ $\xi^* \in \chi(P)$ induit par l'action de H sur P.*

Le prototype des fibrés principaux sont les espaces homogènes ou espaces de Klein $G \to G/H$, avec G un groupe de Lie. Klein avait fait remarquer que la géométrie euclidienne était l'étude du fibré :

$$\mathrm{Euc}_n \xrightarrow{\mathrm{SO}_n} \mathbb{R}^n$$

Si l'on fait maintenant intervenir le temps, on peut dire que la géométrie d'un univers plat est l'étude du fibré :

$$\mathfrak{P} \xrightarrow{\mathfrak{L}} W$$

Le groupe de Poincaré est le *fibré des repères* d'un univers plat.

Définition 2.2. *Un repère orthonormé de $(\mathcal{W}, g)$ au point $x \in \mathcal{W}$ est une isométrie :*

$$r : W \longrightarrow T_x\mathcal{W}$$

Le groupe de Lorentz agit à droite sur les repères et l'on note $R(\mathcal{W})$ le fibré $\mathfrak{L}$-principal des repères orthonormés de $\mathcal{W}$.

L'action de $\mathfrak{L}$ sur les repères identifie les vecteurs verticaux de $TR(\mathcal{W})$ à des rotations infinitésimales de $\mathfrak{l}$. Pour mesurer dans $\mathfrak{p} = W \oplus \mathfrak{l}$ le changement de référentiel subi lors d'un déplacement dans $R(\mathcal{W})$, il manque donc seulement la donnée d'une application qui aux vecteurs horizontaux de $R(\mathcal{W})$ associe un élément de $\mathfrak{p}$:

Définition 2.3. *Une géométrie de Cartan (P, ω) modelée sur $\{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}\}$ est la donnée du fibré H-principal P et d'une connexion de Cartan $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ satisfaisant aux axiomes :*

- *$\omega_p : T_pP \longrightarrow \mathfrak{g}$ est un isomorphisme pour tout $p \in P$;*
- *$\omega(\xi^*) = \xi$ pour tout $\xi \in \mathfrak{h}$;*
- *$\rho_h^*\omega = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \circ \omega$ pour tout $h \in H$.*

Le dernier axiome est appelé axiome d'équivariance, il assure que ω se transforme comme des endomorphismes affines de W sous les changements de référentiels dans le cas des repères de l'univers. Le prototype d'une géométrie de Cartan est un groupe de Lie $G \to G/H$ muni de sa forme de Maurer-Cartan ω_G, qui identifie $\mathfrak{g}$ aux champs de vecteurs invariants à gauche.

Un repère permet de ramener naturellement à ses axes les composantes d'un vecteur tangent à $\mathcal{W}$, ce qui définit la forme de soudure :

$$\theta : TR(\mathcal{W}) \longrightarrow W$$

Dans une géométrie de Cartan (P, ω) modelée sur $\{\mathfrak{p}, \mathfrak{l}\}$, la projection θ de ω sur W qui identifie les points de P à des repères et munit l'espace de base $\mathcal{W} := P/\mathfrak{L}$ d'un tenseur métrique : on retrouverait ainsi la géométrie riemannienne si W était euclidien.

C'est la courbure d'une géométrie de Cartan qui la distingue d'une géométrie de Klein, sa définition fait apparaître une structure sur les formes qui généralise le calcul différentiel usuel :

Définition 2.4. *Une super-algèbre de Lie L est une algèbre graduée sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour le crochet bilinéaire $[\cdot,\cdot]$ satisfaisant aux axiomes :*
- *super-symétrie : $[a, b] + (-1)^{|a||b|}[b, a] = 0$*
- *identité de Jacobi : $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{|a||b|}[b, [a, c]]$*

En notant C le crochet de $\mathfrak{g}$, on définit pour $\alpha, \beta \in \Omega^{\cdot}(P, \mathfrak{g})$:

$$[\alpha, \beta] = C(\alpha \wedge \beta)$$

Ce crochet munit $\Omega^{\cdot}(P, \mathfrak{g})$ d'une structure de super-algèbre de Lie.

L'identité de Jacobi exprime que la multiplication $[\omega, \cdot]$ est une dérivation graduée. Elle correspond à une opération fondamentale, ω décrivant comment transporter parallèlement les formes de $\Omega^{\cdot}(P, \mathfrak{g})$.

Définition 2.5. *On appelle dérivation covariante sur (P, ω) la dérivation de degré 1 définie par :*

$$\delta\alpha := d\alpha + [\omega, \alpha]$$

pour tout $\alpha \in \Omega^{\cdot}(P, \mathfrak{g})$.

On appelle courbure de ω la 2-forme :

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

Si l'on peut décomposer $\mathfrak{g}$ en deux $\mathfrak{h}$ sous-modules $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} + \mathfrak{h}$, on appelle torsion de ω la projection de Ω sur $\mathfrak{t}$.

Les résultats suivants découlent alors simplement de l'identité de Jacobi :

Théorème 2.1. *La courbure et la dérivation covariante sont reliées par :*

$$\delta^2 = [\Omega, \cdot]$$

Le résultat suivant exprime en un certain sens que l'intégrale de la courbure sur une surface fermée est nulle.

Théorème 2.2. *La courbure est conservée :*

$$\delta\Omega = 0$$

c'est l'identité de Bianchi.

Dans le cas des espaces de Cartan métriques, on peut construire simplement la connexion de Levi-Civitā en restant dans les repères. L'existence et l'unicité proviennent de ce que ω est à valeurs dans $\mathfrak{so}(W)$, endomorphismes anti-auto-adjoints : la preuve repose sur ces propriétés de symétrie.

Théorème 2.3. *Soit $\mathcal{W}$ une variété lorentzienne et θ la forme de soudure sur son fibré des repères. Il existe une unique connexion de Cartan sans torsion $\omega = \theta \oplus \alpha$ sur $R(\mathcal{W})$ appelée connexion de Levi-Civitā :*

$$\delta\theta = d\theta + [\alpha, \theta] = 0$$

La connexion de Levi-Civitā permet de plus de caractériser simplement les géodésiques, chemins de longueur extrémale :

Théorème 2.4. *Soit ω la connexion de Levi-Civitā sur $R(\mathcal{W})$. Les géodésiques sont les projections dans $\mathcal{W}$ des courbes intégrales des champs de vecteurs v^* définis par :*

$$\omega(v^*) = v$$

pour $v \in W$.

On peut le prouver en relevant une géodésique en un chemin γ dans le fibré $Stab_v$ principal des repères de Frenet, c'est-à-dire pour lequel $\theta(\dot{\gamma}) = v$. On peut alors approximer à l'ordre un la longueur d'un chemin infiniment proche de γ par l'intégrale de la 1-forme :

$$\phi = \langle v, \theta(\cdot) \rangle$$

Puisque γ réalise un extremum de la longueur, on a :

$$\iota_{\dot{\gamma}} d\phi = 0$$

Et la connexion de Levi-Civitā étant sans torsion, on obtient que $\alpha(\dot{\gamma}) \in \mathfrak{stab}_v$. Ceci montre que l'on aurait pu choisir un autre chemin dans les repères de Frenet pour lequel $\alpha(\dot{\gamma}) = 0$.

Un autre aspect intéressant des géométries de Cartan est ce que Sharpe appelle le développement de Cartan [10, 9], qui consiste à associer à un chemin dans un espace de Cartan un chemin dans le groupe sur lequel il est modelé. Ce procédé généralise l'intégration de fonctions à valeurs réelles, l'intégration se faisant maintenant dans un groupe *a priori* non commutatif. La courbure mesure un défaut d'intégrabilité. Le résultat suivant est ce que Sharpe appelle le théorème fondamental du calcul différentiel :

Théorème 2.5. *Soit M une variété et $\omega \in \Omega(M, \mathfrak{g})$ telle que :*

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

Il existe $f : M \to G$ telle que :

$$\omega = f^* \omega_G$$

Sa preuve repose sur le théorème de Frobenius. Il implique en particulier qu'une géométrie de Cartan sans courbure est un groupe de Lie.

On peut se demander, comme Einstein et Cartan l'on fait, si le choix de la connexion de Levi-Cività est physiquement justifié : ils ont tenté de produire une théorie unitaire du champ gravitationnel et électromagnétique dans des espaces à *parallélisme absolu*, dont la courbure est de la torsion pure [2]. Il se trouve que l'on peut retrouver la contrainte de torsion nulle à partir d'une formulation variationnelle des équations d'Einstein. Plus encore, une formulation multisymplectique des équations d'Einstein sur une variété P de dimension $10 = \dim(\mathfrak{P})$ munie d'une forme $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{p})$ contraint P à admettre une fibration locale au dessus d'une variété de dimension 4 et contraint ω à satisfaire aux axiomes d'une connexion de Cartan sans torsion [6].

Conclusion

Le langage des géométries de Cartan est très adapté à l'étude d'une variété lorentzienne, il présente aussi l'avantage de faire correspondre aux déplacements d'un observateur des éléments du groupe d'isométries du modèle plat, qui peuvent eux-mêmes être vus comme des opérateurs d'évolution sur un espace de Hilbert. Nous avons présenté ici deux actions de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, l'une sur un espace de Hilbert et l'autre sur une variété. Elles décrivent des changements de référentiel infinitésimaux pour deux théories physiques encore non réconciliées, la mécanique quantique et la relativité générale, entre lesquelles les liens sont encore à rechercher.

Références

[1] Elie Cartan. *Sur les équations de la gravitation d'Einstein.* Gauthier-Villars éditeurs, 1922.

[2] Elie Cartan. Le parallélisme absolu et la théorie unitaire du champ. *Actualités scientifiques et industrielles*, 44(5), 1932.

[3] Elie Cartan. La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés. *Actualités scientifiques et industrielles. Exposés de géométrie*, 194(5), 1935.

[4] Alain Connes. Gravity coupled with matter and the foundations of non-commutative geometry. *Commun. Math. Phys.*, 182 :155–176, 1996.

[5] Paul A.M. Dirac. *The principles of quantum mechanics.* Cambridge University Press, 1930.

[6] Frédéric Hélein and Dimitri Vey. Curved space-times by cristallisation of liquid fiber bundles. *arXiv :1508.07765*, sep 2015.

[7] George W. Mackey. Induced representations of locally compact groups I. *Annals of Mathematics, Second series*, 55(1) :101–139, jan 1952.

[8] George W. Mackey. Induced representations of locally compact groups II. The Frobenius reciprocity theorem. *Annals of Mathematics, Second series*, 58(2) :193–221, sep 1953.

[9] Richard W. Sharpe. *Differential Geometry : Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program.* Springer - Graduate texts in Mathematics 166, 1997.

[10] Richard W. Sharpe. An introduction to Cartan geometries. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 2(69) :61–75, 2002.

[11] John Von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Berlin : Verlag von Julius Springer, 1932.