Examen Intégration & Probabilités, Janvier 2008

Exercice 1

(a) On doit avoir $\int_0^1 \mathbb{P}_\beta(ds) = 1$ et $\int_0^\infty \mathbb{P}_\gamma(dt) = 1$, d'où on tire facilement

$$b = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 6 \quad , \quad c = \frac{1}{3!} = 1/6 .$$

(b) Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mesurable. On a

$$\mathbb{E}(f(\beta\gamma, (1-\beta)\gamma)) = \int_0^1 ds \int_0^\infty dt\, f(st, (1-s)t)\, s(1-s)\, t^3 e^{-t}$$

On effectue le changement de variable $x = st$, $y = (1-s)t$

avec pour Jacobien $\begin{vmatrix} t & -t \\ s & 1-s \end{vmatrix} = t = x+y$

($(s,t) \mapsto (x,y)$ est bien un difféomorphisme de $]0,1[\times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$)

On trouve

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy\, f(x,y)\, x\, y\, e^{-(x+y)} dx\, dy .$$

On conclut que la loi de (X,Y) a pour densité $xy\,e^{-(x+y)}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ (/. mesure de Lebesgue). C'est une densité produit donc X et Y sont $\perp\!\!\!\perp$ et chacune de ces v.a. a pour loi la mesure $z e^{-z} dz$, $z \geq 0$.

Exercice 2

(a) Les variables $1/\sqrt{U_1}, \ldots$ sont $\perp\!\!\!\perp$ et de même loi, donc

$$F_n(x) = \mathbb{P}(1/\sqrt{U} \leq x)^n = \mathbb{P}(U \geq x^{-2})^n = \begin{cases} (1 - 1/x^2)^n & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

En dérivant, on voit que $\mathbb{P}_{M_n}(dx) = 2n\, x^{-3} (1 - x^{-2})^{n-1}$ si $x \geq 1$

et donc $M_n \in L^p(\mathbb{P}) \iff \int_1^\infty x^{p-3} dx < \infty \iff p < 2$.

(b) $\mathbb{P}(n^{-1/2} M_n \leq x) = \mathbb{P}(M_n \leq \sqrt{n}\, x) = (1 - 1/nx^2)^n \sim \exp(-1/x^2)$

On conclut que $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers une v.a. dont la fonction de répartition est $\exp(-1/x^2)$ et la densité

$$\frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), \quad x > 0 .$$

(c) La fonction $x,y \to h(x)\, g\circ\phi(x,y)$ est continue et bornée, donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(h(X_n)\, g\circ\phi(X_n,Y_n)) = \mathbb{E}(h(c)\, g\circ\phi(c,Y)) = \mathbb{E}(g\circ\phi(c,Y)).$$

Par ailleurs, $g\circ\phi$ est bornée, et comme $X_n \to c$ & $h(c)=1$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}((1-h(X_n))\, g\circ\phi(X_n,Y_n)) \leq \|g\| \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(1-h(X_n)) = 0$$

On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g\circ\phi(X_n,Y_n)) = \mathbb{E}(g\circ\phi(c,Y)),$$

i.e. $\phi(X_n,Y_n) \Rightarrow \phi(c,Y)$.

(d) Par la loi des grands nombres, $\dfrac{\xi_1^2+\dots+\xi_n^2}{n} \to \mathbb{E}(\xi_1^2)$ p.s.

On sait que $E(\xi_1^2) = Var(\xi_1) := \sigma^2$ puisque ξ_1 est centrée.

Par le théorème central limite on a donc

$$\frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

On peut appliquer (c) avec $\phi(x,y) = y/\sqrt{x}$ et $I =]0,\infty[$.

$X_n = \dfrac{\xi_1^2+\dots+\xi_n^2}{n}$ et $Y_n = \dfrac{\xi_1+\dots+\xi_n}{\sqrt{n}}$.

On obtient que $Y_n/\sqrt{X_n} \Rightarrow \dfrac{1}{\sigma}\mathcal{N}(0,\sigma^2) \overset{(d)}{=} \mathcal{N}(0,1)$

Conclusion

$$\frac{\xi_1+\dots+\xi_n}{\sqrt{\xi_1^2+\dots+\xi_n^2}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Exercice 3

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ étant continue et à support compact, est uniformément continue. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x'| \leq \eta \text{ et } |y - y'| \leq \eta \implies |f(x,y) - f(x',y')| \leq \varepsilon.$$

Comme $X_n \to c$ p.s. il existe un événement Λ avec $\mathbb{P}(\Lambda) = 1$ tel que $\forall \omega \in \Lambda$, $\forall \eta > 0$ $\exists\, n_\eta(\omega) \in \mathbb{N}$ avec

$$n \geq n_\eta(\omega) \implies |X_n(\omega) - c| \leq \eta.$$

On a donc pour tout $\omega \in \Lambda$ et $\varepsilon > 0$ qu'il existe $n_\eta(\omega) \in \mathbb{N}$:

$$n \geq n_\eta(\omega) \implies |f(X_n(\omega), Y_n(\omega)) - f(c, Y_n(\omega))| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que $f(X_n, Y_n) - f(c, Y_n) \to 0$ p.s.

(b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue à support compact. La fonction $y \to f(c,y)$ est continue et à support compact. Donc d'après la première question

$$\mathbb{E}(f(X_n, Y_n)) \sim \mathbb{E}(f(c, Y_n)) \to \mathbb{E}(f(c, Y)),$$

et donc $(X_n, Y_n) \Rightarrow (c, Y)$.

Exercice 4

(a) $t \to t^\alpha - \alpha t$ a pour dérivée $\alpha t^{\alpha-1} - \alpha$, ≥ 0 si $t<1$ et ≤ 0 si $t>1$

Le maximum est donc pour $t=1$, i.e. $t^\alpha - \alpha t \leq 1-\alpha$

Pour $\alpha = 1/p$ et $t = \lambda^{p+q} a^p b^{-q}$, on trouve alors

$$\left(\lambda^{p+q} a^p b^{-q}\right)^{1/p} \leq \frac{1}{p} \lambda^{p+q} a^p b^{-q} + \frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow \quad a\, b^{-q/p} \leq \frac{1}{p} \lambda^{(p+q)(1-1/p)} a^p b^{-q} + \frac{1}{q} \lambda^{-(p+q)/p}$$

Or $(p+q)/p = q$ et $1 - 1/p = 1/q$, d'où finalement

$$ab \leq \frac{1}{p} \lambda^p a^p + \frac{1}{q} \lambda^{-q} b^q .$$

(b) En utilisant (a)

$$\int_{E\times E} k(x,y) |u(y)| |v(x)| \mu(dx)\mu(dy) \leq \frac{1}{p} \lambda^p \int_{E\times E} k(x,y) |u(y)|^p \mu(dx)\mu(dy)$$
$$+ \frac{1}{q} \lambda^{-q} \int_{E\times E} k(x,y) |v(x)|^q \mu(dx)\mu(dy)$$

$$\leq \frac{1}{p} \lambda^p \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \lambda^{-q} \|v\|_q^q$$ en utilisant l'hypothèse et le théorème de Fubini-Tonelli.

En prenant $\lambda = \|u\|_p^{-1/q} \|v\|_q^{1/p}$, on trouve

$$\int_{E\times E} \text{---} \leq \frac{1}{p} \|v\|_q \|u\|_p + \frac{1}{q} \|u\|_p \|v\|_q$$

(c) D'après (b) $|\Phi(v)| < \infty$ (Inégalité triangulaire) et plus précisément $|\Phi(v)| \leq \|u\|_p \|v\|_q$. On déduit que Φ est bien une forme linéaire continue sur $L^q(\mu)$, de norme majorée par $\|u\|_p$.

Comme le dual de $L^q(\mu)$ est $L^p(\mu)$, on a qu'il existe $f \in L^p(\mu)$ telle que

$$\Phi(v) = \int_E v(x) f(x) \mu(dx) \quad \text{avec} \quad \|f\|_p \leq \|u\|_p$$

Or, par le théorème de Fubini: $\Phi(v) = \int_E \mu(dx)\, v(x) \left(\int_E k(x,y) u(y) \mu(dy) \right)$

d'où l'on déduit $f(x) = Ku(x)$ μ-p.p. On a donc bien

$$\|Ku\|_p \leq \|u\|_p$$

(d) On prend μ = mesure de Lebesgue et $k(x,y) = f(x-y)$. Les hypothèses sont vérifiées puisque $\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\,dz = 1$, et on a $Ku = f*u$. D'après (c), on a bien $\|f*u\|_p \leq \|u\|_p$

(e) On applique l'inégalité de Jensen pour voir que

$$|u*\nu(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} |u(x-y)|^p \,\nu(dy)$$

d'où on tire

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u*\nu(x)|^p \,dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} dx \int_{\mathbb{R}^d} |u(x-y)|^p \,\nu(dy)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \nu(dy) \int_{\mathbb{R}^d} dx\, |u(x-y)|^p \quad \text{(Fubini-Tonelli)}$$

$$= \|u\|_p^p \quad (\nu(\mathbb{R}^d) = 1 \text{ et mesure de Lebesgue invariante par translation}).$$