Examen Partiel (Décembre 2007)

Intégration et Probabilités

Exercice 1

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

(a) On suppose $f \in L^1(\mu)$. Etudier la convergence de la suite

$$I_n = n \int_E \ln\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)\right) \mathrm{d}\mu$$

lorsque $n \to \infty$.

(b) Même question lorsque $\int_E f \mathrm{d}\mu = \infty$.

Exercice 2

Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et $r > s > t > 0$ trois nombres réels.

(a) Montrer que pour toute fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}_+$, on a l'inégalité suivante (dûe à Lyapunov):

$$\left(\int_E f^s \mathrm{d}\mu\right)^{r-t} \leq \left(\int_E f^r \mathrm{d}\mu\right)^{s-t} \left(\int_E f^t \mathrm{d}\mu\right)^{r-s}.$$

(b) On suppose maintenant que $f \in L^p(\mu)$ pour tout $p > 1$. Justifier l'inégalité

$$\left(\int f^p \ln f \mathrm{d}\mu\right)^2 \leq \left(\int f^p \mathrm{d}\mu\right) \left(\int f^p \ln^2 f \mathrm{d}\mu\right),$$

puis en déduire que l'application $p \to p \ln ||f||_p$ est convexe sur $]1, \infty[$.

(Indication : on calculera la dérivée seconde de cette fonction en justifiant soigneusement les arguments).

Exercice 3

On considère la demi-droite $\mathbb{R}_+^* =]0, \infty[$ munie de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$ et une mesure finie μ sur $\mathbb{R}_+^*$. On considère également l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et une mesure finie ν sur $\mathbb{R}^d$.

Pour toute partie $A \subseteq \mathbb{R}^d$ et tout réel $r > 0$, on pose $rA = \{ra : a \in A\} \subseteq \mathbb{R}^d$.

(a) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Montrer que l'application

$$r \to \int_{\mathbb{R}^d} f(r^{-1}y)\nu(\mathrm{d}y)$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

En déduire que si $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ est un ouvert, alors l'application $r \to \nu(r\Theta)$ est mesurable sur $\mathbb{R}_+^*$

(Indication : on pourra utiliser l'existence d'une suite croissante de fonctions continues $f_n : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(y) = \mathbf{1}_\Theta(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$).

(b) On note $\mathcal{M}$ la famille des boréliens $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour lesquels l'application $r \to \nu(rA)$ est mesurable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Vérifier que si $A, A' \in \mathcal{M}$ avec $A \subseteq A'$, alors $A' \backslash A \in \mathcal{M}$.

Montrer ensuite que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante dans $\mathcal{M}$, alors $\bigcup A_n \in \mathcal{M}$.

En conclure que $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)$.

(c) On définit pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\mu \odot \nu(A) = \int_{\mathbb{R}_+^*} \nu(rA)\mu(\mathrm{d}r)\,.$$

Montrer que $\mu \odot \nu$ est une mesure finie sur $\mathbb{R}^d$.

(d) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ définie par $F(r,y) = f(r^{-1}y)$ est elle aussi mesurable, et qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\mathrm{d}(\mu \odot \nu) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d} F\mathrm{d}(\mu \otimes \nu)\,.$$

(e) On suppose maintenant que la mesure ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^d$, et on note $\varphi \in L_+^1(\mathbb{R}^d)$ sa densité. Autrement dit, on suppose que $\nu = \varphi\lambda$.

Montrer que la mesure $\mu \odot \nu$ est elle aussi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ, et exprimer sa densité en fonction de φ et μ.