Examen Partiel

Intégration , 25 Novembre 2008

(2 heures)

Exercice 1

Étudier la convergence des suites :

$$u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \mathrm{d}t \,,$$

$$v_n = n \int_{]0,1[} \ln\left(1 + \frac{1}{n(1-x)}\right) \mathrm{d}x \,.$$

Dans chacun des cas, on précisera la limite si elle existe et on justifiera soigneusement la réponse.

Exercice 2

(a) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $\varphi(t) := \sup\{|f'(x)| : x \geq t\}$ pour tout $t \geq 0$ et on suppose que $\int_0^\infty \varphi(t)\mathrm{d}t < \infty$.

Montrer que pour tout $a > 0$, la fonction $x \to \frac{f(ax)-f(x)}{x}$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.

(b) On note

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(x)}{x} \mathrm{d}x \,.$$

Montrer que la fonction $a \to I(a)$ est dérivable sur $]0, \infty[$, déterminez sa dérivee $I'(a)$ (en justifiant soigneusement les calculs), et en déduire la formule de Frullani

$$I(a) = (f(\infty) - f(0)) \ln a \,.$$

(c) On suppose maintenant seulement que

$$f(x) = f(0) + \int_{[0,x]} g(t)\mathrm{d}t \,, \qquad x \geq 0 \,,$$

où $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$. Montrez en appliquant le théorème de Fubini-Lebesgue que la formule de Frullani est toujours vérifiée.

Exercice 3

Soient $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $(F, \mathcal{F}, \nu)$ deux espaces mesurés, avec μ et ν mesures sigma-finies, et on se donne deux réels $p, r \geq 1$. Pour toute fonction $f : E \times F \to \mathbb{R}$ mesurable par rapport à la tribu produit

$\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, on pose

$$\|f\|_{p,r} = \left(\int_F \left(\int_E |f(x,y)|^p \mu(\mathrm{d}x) \right)^{r/p} \nu(\mathrm{d}y) \right)^{1/r} ,$$

et on note $\mathcal{L}^{p,r}$ l'espace des fonctions f pour lesquelles $\|f\|_{p,r} < \infty$.

(a) Montrer que $\mathcal{L}^{p,r}$ est un espace vectoriel et que $\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall f, g \in \mathcal{L}^{p,r}$, on a :

$$\begin{aligned} \|af\|_{p,r} &= |a| \|f\|_{p,r} , \\ \|f+g\|_{p,r} &\leq \|f\|_{p,r} + \|g\|_{p,r} , \\ \|f\|_{p,r} = 0 &\Rightarrow \quad f(x,y) = 0 \text{ pour } \mu \otimes \nu \text{ presque tout } (x,y) \in E \times F. \end{aligned}$$

(b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{L}^{p,r}$ telle que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{p,r}$ converge. On introduit

$$A = \left\{ (x,y) \in E \times F : \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x,y)| < \infty \right\}.$$

Montrer que le complémentaire A^c de A est de $\mu \otimes \nu$-mesure nulle, et que si on pose

$$g(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x,y) \qquad \forall (x,y) \in A$$

et $g(x,y) = 0$ pour $(x,y) \in A^c$, alors $g \in \mathcal{L}^{p,r}$ et

$$\|g\|_{p,r} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{p,r} .$$

(c) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| g - \sum_{i\leq n} f_i \right\|_{p,r} = 0 .$$

Que peut on en conclure ?