Partiel du 8 décembre 2010 : corrigé

"Intégration & Probabilités"

Exercice 1. Soit $\mathscr{G} := \{B \in \sigma(\mathscr{C}) : \exists\, \mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ dénombrable tel que $B \in \sigma(\mathscr{D})\}$. Montrons que $\mathscr{G}$ est une tribu.

Il est clair que $E \in \mathscr{G}$.

Si $A \in \mathscr{G}$, alors il existe $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ dénombrable tel que $A \in \sigma(\mathscr{D})$, et donc $A^c \in \sigma(\mathscr{D})$: on a $A^c \in \mathscr{G}$.

Si $(A_n) \subset \mathscr{G}$, alors pour tout n, il existe $\mathscr{D}_n \subset \mathscr{C}$ dénombrable tel que $A_n \in \sigma(\mathscr{D}_n)$, et donc $\cup_n A_n \in \sigma(\mathscr{D})$, où $\mathscr{D} := \cup_n \mathscr{D}_n \subset \mathscr{C}$ est dénombrable : on a $\cup_n A_n \in \mathscr{G}$.

En conclusion, $\mathscr{G}$ est une tribu, c'est à dire, $\mathscr{G} = \sigma(\mathscr{C})$: Michel a tout à fait raison. $\square$

Exercice 2. (i) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $(\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_{-A})(x) \neq 0$, c'est à dire, $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x-w)\,\mathbf{1}_{-A}(w)\,\mathrm{d}w \neq 0$. Il existe donc $w \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{1}_A(x-w)\,\mathbf{1}_{-A}(w) \neq 0$, c'est à dire, $x - w \in A$ et $w \in -A$. Il suffit alors de prendre $y := x - w \in A$ et $z := -w \in A$, de sorte que $x = y - z$.

(ii) Soient $f_n := (f \wedge n)\,\mathbf{1}_{[-n,\,n]} \in L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ et $g_n := (g \wedge n)\,\mathbf{1}_{[-n,\,n]} \in L^2(\mathbb{R}, \lambda)$, $n \geq 1$. D'après le rappel, $f_n * g_n$ est continue. Donc $\{x \in \mathbb{R} : (f_n * g_n)(x) \leq a\}$ est un fermé, $\forall n$.

Comme $0 \leq f_n \uparrow f$ et $0 \leq g_n \uparrow g$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_n * g_n)(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x-y) g_n(y)\,\mathrm{d}y \uparrow \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\,\mathrm{d}y = (f*g)(x)$ (par convergence monotone). Donc $\{x \in \mathbb{R} : (f*g)(x) \leq a\} = \cap_{n\geq 1}\{x \in \mathbb{R} : (f_n * g_n)(x) \leq a\}$ est un fermé.

(iii) Comme $\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_{-A} \geq 0$, il résulte de (ii) que $\{x \in \mathbb{R} : (\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_{-A})(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_{-A})(x) > 0\}$ est un ouvert, noté G.

Or, pour $x = 0$, $(\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_{-A})(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(-y)\,\mathbf{1}_{-A}(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{-A}(y)\,\mathrm{d}y = \lambda(-A) = \lambda(A) > 0$ par hypothèse, et donc $0 \in G$. Comme G est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $[-\delta,\,\delta] \subset G$.

Soit $x \in [-\delta,\,\delta]$. On a alors $x \in G$, c'est à dire, $(\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_{-A})(x) > 0$. D'après (i), il existe $\alpha \in A$ et $\beta \in A$ tels que $x = \alpha - \beta$, donc $x + \beta \in A$. On prend alors $y := \beta$.

(iv) Par définition, $q + F$, $q \in \mathbb{Q}$, sont disjoints, et $\mathbb{R} = \cup_{q\in\mathbb{Q}}(q+F)$. Donc

$$A = A \cap \mathbb{R} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (A \cap (q+F)).$$

Il résulte de la σ-additivité que $\lambda(A) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} \lambda(A \cap (q+F))$. Comme $\lambda(A) > 0$, il existe $q_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $\lambda(A \cap (q_0 + F)) > 0$.

(v) Soit $A_0 := A \cap (q_0 + F)$. Alors A_0 est un élément de $\overline{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A_0) > 0$, on peut appliquer le résultat de (iii) à A_0 à la place de A pour voir qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta,\,\delta]$, il existe $y \in A_0$ tel que $x + y \in A_0$. En posant $u := y - q_0$, on a $u \in F$ et $v := x + u \in F$, ce qui est absurde si x est un rationnel non nul (et il y en a dans $[-\delta,\,\delta]$) car u et v sont des éléments de F tels que $v - u$ soit un rationnel non nul.

La contradiction provient de l'hypothèse $A \cap (q+F) \in \overline{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$, $\forall q \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $q \in \mathbb{Q}$ tel que $B := A \cap (q+F) \notin \overline{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$, et on a bien $B \subset A$. $\square$

Exercice 3. (A) Montrons par un argument par l'absurde. Supposons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(A_n) \subset \mathscr{A}$ tels que $\mu(A_n) < \frac{1}{n^2}$ et que $\int f\,\mathbf{1}_{A_n}\,\mathrm{d}\mu \geq \varepsilon_0$, $\forall n$.

Par Fubini–Tonelli, $\int \sum_n \mathbf{1}_{A_n}\,\mathrm{d}\mu = \sum_n \mu(A_n) < \infty$; donc $\sum_n \mathbf{1}_{A_n} < \infty$ p.p. A fortiori, $\mathbf{1}_{A_n} \to 0$ p.p. Comme $f \in \mathscr{L}^1$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour voir que $\int f\,\mathbf{1}_{A_n}\,\mathrm{d}\mu \to 0$, ce qui contredit $\int f\,\mathbf{1}_{A_n}\,\mathrm{d}\mu \geq \varepsilon_0$, $\forall n$.

(B1) Soit $n \geq 1$. Considérons $\mu_n^{(f)}(A) := \int_E f\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu$, $\mu_n(A) := \mu(A)$, pour $A \in \mathscr{B}_n$. On voit que $\mu_n^{(f)}$ et μ_n sont des mesures (positives) finies sur l'espace mesurable $(E, \mathscr{B}_n)$. Comme $\mu_n^{(f)} \ll \mu_n$, le théorème de Radon–Nikodym dit qu'il existe une fonction mesurable (par rapport à $\mathscr{B}_n$) positive f_n, qui est la dérivée Radon–Nikodym de $\mu_n^{(f)}$ rapport à μ_n, telle que $\mu_n^{(f)}(A) = \int f_n\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu_n$ (qui n'est autre que $\int f_n\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu$), $\forall A \in \mathscr{B}_n$.

(B2) Fixons $\varepsilon > 0$. D'après (i), il existe $\delta > 0$ tel que $\forall A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int f\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

Soit $M_0 > 0$ tel que $M\delta \geq \int f\,\mathrm{d}\mu$, et soit $M \geq M_0$. Posons $A_n := \{x \in E : f_n(x) > M\} \in \mathscr{B}_n$, $n \geq 1$. Par l'inégalité de Markov, $\mu(A_n) \leq \frac{1}{M}\int f_n\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{M}\int f\,\mathrm{d}\mu$ (par (ii) car $E \in \mathscr{B}_n$), et donc $\mu(A_n) \leq \delta$. Le choix de δ nous dit alors que $\int f\,\mathbf{1}_{A_n}\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$, $\forall n \geq 1$, $\forall M \geq M_0$.

Or, $A_n \in \mathscr{B}_n$; on a $\int f\,\mathbf{1}_{A_n}\,\mathrm{d}\mu = \int f_n\,\mathbf{1}_{A_n}\,\mathrm{d}\mu$. Par conséquent, $\int f_n\,\mathbf{1}_{\{f_n > M\}}\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$, $\forall n \geq 1$, $\forall M \geq M_0$. D'où $\sup_{n\geq 1}\int_E f_n\,\mathbf{1}_{\{f_n>M\}}\,\mathrm{d}\mu \to 0$ quand $M \to \infty$.

(C1) Comme $\int f_n\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu < \infty$, le lemme de Fatou implique que $g \in L^1$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la Question B2, il existe k_1 suffisamment grand tel que $\int f_n\,\mathbf{1}_{\{f_n>k_1\}}\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$, $\forall n \geq 1$. D'autre part, comme $\mu(\{x \in E : g(x) > k\}) \to 0$, $k \to \infty$ (inégalité de Markov), il existe k_2 tel que $\int g\,\mathbf{1}_{\{g>k_2\}}\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$. On prend désormais $k_0 := k_1 \vee k_2$.

Soit $\varphi(x) := |x| \wedge k_0$, $x \in \mathbb{R}$. Comme φ est une fonction continue, on a $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ g$ simplement quand $n \to \infty$; par convergence dominée (car φ est bornée), $\int |(\varphi\circ f_n) - (\varphi\circ g)|\,\mathrm{d}\mu \to 0$, $n \to \infty$: il existe donc n_0 tel que $\int |(\varphi \circ f_n) - (\varphi \circ g)|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

On a alors, pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\int |f_n - g|\,\mathrm{d}\mu &\leq \int |f_n - (\varphi\circ f_n)|\,\mathrm{d}\mu + \int |(\varphi\circ f_n) - (\varphi\circ g)|\,\mathrm{d}\mu + \int |g - (\varphi\circ g)|\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \int f_n\,\mathbf{1}_{\{f_n>k_0\}}\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon + \int g\,\mathbf{1}_{\{g>k_0\}}\,\mathrm{d}\mu \leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Autrement dit, $f_n \to g$ dans L^1.

(C2) Soit $n \geq 1$ et soit $A \in \mathscr{B}_n$. D'après la Question B1, on a $\int f_n\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu$, tandis que d'après la Question C1, $\int f_n\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu \to \int_E g\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu$, car $|\int (f_n - g)\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu| \leq \int |f_n - g|\,\mathrm{d}\mu \to 0$. Donc $\int f\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu = \int g\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu$. La classe

$$\mathscr{M} := \{A \in \mathscr{B}_\infty : \int f\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu = \int g\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu\},$$

est une classe monotone (le fait que $E \in \mathscr{M}$ provient du fait que $\int g\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu$) contenant $\mathscr{C} := \cup_{n\geq 1}\mathscr{B}_n$, et cette dernière classe est stable par intersections finies (grâce à l'hypothèse que $n \mapsto \mathscr{B}_n$ soit croissante). Par le théorème de classe monotone, $\mathscr{M} \supset \sigma(\mathscr{C})$, c'est à dire, $\mathscr{M} = \mathscr{B}_\infty$: on a $\int (f - g)\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu = 0$, $\forall A \in \mathscr{B}_\infty$.

En prenant $A := \{x \in E : f(x) \neq g(x)\} \in \mathscr{B}_\infty$ (car f et g sont $\mathscr{B}_\infty$ mesurables, g étant limite simple d'une suite de fonctions $\mathscr{B}_\infty$-mesurables), on voit que $f = g$ p.p.

(C3) On enlève maintenant l'hypothèse que f soit $\mathscr{B}_\infty$ mesurable.

On a, d'après la question précédente, $\int f\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu = \int g\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu$, $\forall A \in \mathscr{B}_\infty$. Considérons les mesures (positives) finies $\mu_\infty^{(f)}$ et μ_∞ sur $(E, \mathscr{B}_\infty)$ définies par $\mu_\infty(A) := \mu(A)$ et $\mu_\infty^{(f)}(A) := \int f\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu$, $A \in \mathscr{B}_\infty$. On a $\mu_\infty^{(f)} \ll \mu_\infty$. Donc $f_\infty := \frac{\mathrm{d}\mu_\infty^{(f)}}{\mathrm{d}\mu_\infty}$ est une fonction positive $\mathscr{B}_\infty$-mesurable telle que $\int f_\infty\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu = \int g\,\mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu$, $\forall A \in \mathscr{B}_\infty$. En prenant $A := \{x \in E : f_\infty(x) \neq g(x)\} \in \mathscr{B}_\infty$, on voit que $g = f_\infty := \frac{\mathrm{d}\mu_\infty^{(f)}}{\mathrm{d}\mu_\infty}$ p.p. □