Examen du 31 janvier 2011 : corrigé

"*Intégration & Probabilités*"

Exercice. (A1) La mesure de Lebesgue étant invariante par translation, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\sup K = \inf \widetilde{K} = 0$. On a alors $K \cup \widetilde{K} \subset K + \widetilde{K}$, et donc $\lambda(K) + \lambda(\widetilde{K}) = \lambda(K \cup \widetilde{K}) \le \lambda(K) + \lambda(\widetilde{K})$.

(A2) Sans perte de généralité, on suppose que $\lambda(E) + \lambda(\widetilde{E}) < \infty$ (car sinon, il n'y a rien à prouver). L'inégalité cherchée découle alors de la question précédente et du fait que $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subset A \text{ compact}\}$, $\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, rappelé au début de l'énoncé.

(A3) [La mesurabilité des fonctions implique que E_s, $\widetilde{E}_s$ et $\widehat{E}_s$ sont des boréliens.] Par hypothèse, $h(\alpha x + \beta y) \ge \widetilde{h}(x)^\alpha \widehat{h}(y)^\beta$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, ce qui implique que $\alpha \widetilde{E}_s + \beta \widehat{E}_s \subset E_s$. Il suffit alors d'utiliser l'inégalité prouvée dans la question précédente.

(A4) On suppose que les fonctions ne sont pas identiquement nulles, car sinon il n'y a rien à démontrer. Quitte à remplacer g, $\widetilde{g}$ et $\widehat{g}$, par $\min\{g, n\}$, $\min\{\widetilde{g}, n\}$ et $\min\{\widehat{g}, n\}$, respectivement, et utiliser le théorème de convergence monotone, on peut supposer, sans perte de généralité, que g, $\widetilde{g}$ et $\widehat{g}$ sont des fonction bornées, et que $\sup \widetilde{g} = \sup \widehat{g} = 1$ (sinon, on divise ces fonctions par une constante). Il suffit alors d'appliquer l'inégalité prouvée dans la question précédente, de remarquer que $\int \psi \, \mathrm{d}\lambda = \int_0^1 \lambda(E_s(\psi)) \, \mathrm{d}s$ avec $E_s(\psi) := \{x : \psi(x) \ge s\}$, où ψ peut être $\widetilde{g}$ ou $\widehat{g}$, et d'utiliser le fait que $\alpha u + \beta v \ge u^\alpha v^\beta$, $\forall u, v \ge 0$.

(A5) On utilise un argument par récurrence sur d. Pour $d = 1$, l'inégalité cherchée est déjà démontrée dans la question précédente. Supposons qu'elle est prouvée pour $d - 1$. Pour tout $x := (x_1, \cdots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$, on définit $f_1(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x, z) \, \mathrm{d}z$, et de façon similaire, $\widetilde{f}_1$ et $\widehat{f}_1$. D'après la question précédente, on a $f_1(\alpha x + \beta y) \ge \widetilde{f}_1(x)^\alpha \widehat{f}_1(y)^\beta$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^{d-1}$. Donc, par hypothèse de récurrence, cela donne $\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_1(x) \, \mathrm{d}x \ge [\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \widetilde{f}_1(x) \, \mathrm{d}x]^\alpha \, [\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \widehat{f}_1(x) \, \mathrm{d}x]^\beta$, ce qui, par Fubini–Tonelli, n'est autre que l'inégalité cherchée.

(A6) On suppose que $0 < \lambda(A) < \infty$, $0 < \lambda(B) < \infty$ (sinon il n'y a rien à prouver). Posons $\alpha := \frac{[\lambda(A)]^{1/d}}{[\lambda(A)]^{1/d} + [\lambda(B)]^{1/d}}$, $\beta := 1 - \alpha$, $\widetilde{f} := \mathbf{1}_{A_1}$, $\widehat{f} := \mathbf{1}_{B_1}$ et $f := \mathbf{1}_{\alpha A_1 + \beta B_1}$, avec $A_1 := \frac{A}{[\lambda(A)]^{1/d}}$ et $B_1 := \frac{B}{[\lambda(B)]^{1/d}}$, on a $f(\alpha x + \beta y) \ge \widetilde{f}(x)^\alpha \, \widehat{f}(y)^\beta$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$. D'après la question précédente, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, \mathrm{d}x \ge [\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{f}(x) \, \mathrm{d}x]^\alpha \, [\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) \, \mathrm{d}x]^\beta$, c'est à dire, $\lambda(\alpha A_1 + \beta B_1) \ge \lambda(A_1)^\alpha \, \lambda(B_1)^\beta = 1$. C'est l'inégalité cherchée.

(B1) Soient $x \in D_{1,b}$ et $\widetilde{x} \in D_{-1,b}$. Par définition, $x + y \in D$ et $\widetilde{x} - y \in D$. Donc $\frac{1+t}{2} x + \frac{1-t}{2} \widetilde{x} = \frac{1+t}{2}(x + y) + \frac{1-t}{2}(\widetilde{x} - y) - ty \in D - ty$ par la convexité de D. D'autre part, $\frac{1+t}{2} x + \frac{1-t}{2} \widetilde{x} \in \{\varphi \ge b\}$ car x et $\widetilde{x}$ sont des éléments de l'ensemble $\{\varphi \ge b\}$ qui est supposé convexe. Donc $\frac{1+t}{2} x + \frac{1-t}{2} \widetilde{x} \in D_{t,b}$. Par conséquent, $\frac{1+t}{2} D_{1,b} + \frac{1-t}{2} D_{-1,b} \subset D_{t,b}$.

D'après (A6), ceci implique que $[\lambda(D_{t,b})]^{1/d} \ge \frac{1+t}{2}[\lambda(D_{1,b})]^{1/d} + \frac{1-t}{2}[\lambda(D_{-1,b})]^{1/d}$. Il suffit alors de remarquer que $\lambda(D_{1,b}) = \lambda(D_{-1,b})$, car $D_{1,b}$ est l'image de $D_{-1,b}$ par l'application $x \mapsto -x$ (en utilisant l'hypothèse de symétrie de D et de φ).

(B2) Il suffit de remarquer (par Fubini–Tonelli) que $\int_D \varphi(x + ty) \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \lambda(D_{t,b}) \, \mathrm{d}b$ (pour tout t) et d'utiliser l'inégalité prouvée dans la question précédente.

(C1) Si $k = n$, on a $\mathbb{E}[S_k(S_n - S_k) \, \mathbf{1}_{A_k}] = 0$.

On suppose maintenant $n > k$. Le vecteur aléatoire (A_k, S_k) est $\sigma(X_1, X_2, \cdots, X_k)$-mesurable, tandis que $S_n - S_k$ est $\sigma(X_{k+1}, \cdots, X_n)$-mesurable. Donc $S_n - S_k$ est indépendante de $S_k \, \mathbf{1}_{A_k}$. Par conséquent, $\mathbb{E}[S_k(S_n - S_k) \, \mathbf{1}_{A_k}] = \mathbb{E}(S_k \, \mathbf{1}_{A_k}) \mathbb{E}(S_n - S_k) = 0$, car $\mathbb{E}(S_n - S_k) = 0$.

Conclusion: si $n \ge k$, alors $\mathbb{E}[S_k(S_n - S_k) \, \mathbf{1}_{A_k}] = 0$.

(C2) On a $\mathbb{E}(S_n^2\,\mathbf{1}_{A_k}) = \mathbb{E}(S_k^2\,\mathbf{1}_{A_k}) + 2\mathbb{E}(S_k(S_n - S_k)\,\mathbf{1}_{A_k}) + \mathbb{E}((S_n - S_k)^2\,\mathbf{1}_{A_k})$. Regardons les trois termes à droite. Le deuxième s'annule (voir la question précédente), tandis que le troisième est non-négatif. Donc $\mathbb{E}(S_n^2\,\mathbf{1}_{A_k}) \geq \mathbb{E}(S_k^2\,\mathbf{1}_{A_k})$. Or, sur A_k, on a $|S_k| \geq c$, ce qui implique que $\mathbb{E}(S_n^2\,\mathbf{1}_{A_k}) \geq \mathbb{E}(c^2\,\mathbf{1}_{A_k}) = c^2\,\mathbb{P}(A_k)$.

(C3) D'après la question précédente, on a $\mathbb{E}(S_n^2 \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}) \geq c^2 \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$. Les A_k étant deux-à-deux disjoints, on a $\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k} \leq 1$, et $\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = \mathbb{P}(M_n \geq c)$, ce qui donne l'inégalité cherchée.

(D1) Il est clair que $\frac{N_n+1}{n} \to 1$ en probabilité. D'où $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\frac{N_n+1}{n} - 1| > \varepsilon^3) = 0$. On peut donc trouver n_0 tel que $\mathbb{P}(|\frac{N_n+1}{n} - 1| > \varepsilon^3) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. D'autre part, par définition, $k_n > (1+\varepsilon^3)n - 1$, ce qui implique que, pour $n \geq n_0$, $\mathbb{P}(N_n > k_n) \leq \mathbb{P}(N_n > (1+\varepsilon^3)n - 1) = \mathbb{P}(\frac{N_n+1}{n} - 1 > \varepsilon^3) \leq \mathbb{P}(\,|\frac{N_n+1}{n} - 1| > \varepsilon^3) < \varepsilon$.

(D2) On a $\mathbb{P}(|T_n - S_n| \geq \varepsilon n^{1/2}) \leq \mathbb{P}(|T_n - S_n| \geq \varepsilon n^{1/2},\ N_n \leq k_n) + \mathbb{P}(N_n > k_n)$.

D'après la question précédente, $\mathbb{P}(N_n > k_n) \leq \mathbb{P}(N_n > k_n) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. D'autre part, si $|T_n - S_n| \geq \varepsilon n^{1/2}$ et $N_n \leq k_n$, alors $\max_{n\leq j\leq k_n} |S_j - S_n| \geq \varepsilon n^{1/2}$ (car $N_n \geq n$) ; donc $\mathbb{P}(|T_n - S_n| \geq \varepsilon n^{1/2},\ N_n \leq k_n) \leq \mathbb{P}(\max_{n\leq j\leq k_n} |S_j - S_n| \geq \varepsilon n^{1/2})$. D'où la conclusion désirée.

(D3) Soient $\widetilde{X}_k = X_{n+k}$ $(k = 1, 2, \cdots)$, qui sont encore des variables indépendantes et identiquement distribuées, avec $\mathbb{E}(\widetilde{X}_k) = 0$ et $\mathbb{E}(\widetilde{X}_k^2) = 1$. Posons $\widetilde{S}_k = \sum_{i=1}^k \widetilde{X}_i = S_{n+k} - S_n$. D'après (C3), $\mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq m} |\widetilde{S}_k| \geq c) \leq \mathbb{E}(\widetilde{S}_m^2)/c^2 = \frac{m}{c^2}$ pour tout $m \geq 1$ et tout $c > 0$. Appliquons ceci à $m = k_n - n$ et $c = \varepsilon n^{1/2}$, et on obtient:

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq k\leq k_n-n} |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon n^{1/2}\Big) \leq \frac{k_n - n}{\varepsilon^2 n} \leq \frac{(1+\varepsilon^3)n - n}{\varepsilon^2 n} = \varepsilon.$$

Or, $\{\max_{1\leq k\leq k_n-n} |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon n^{1/2}\} = \{\max_{n<j\leq k_n} |S_j - S_n| \geq \varepsilon n^{1/2}\}$, on peut utiliser le résultat de la question précédente pour vour que $\mathbb{P}(|T_n - S_n| \geq \varepsilon n^{1/2}) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Soit $\delta \in (0,1)$. Pour tout $\varepsilon \in (0, \delta)$, on a $\mathbb{P}(|\frac{T_n - S_n}{n^{1/2}}| \geq \delta) \leq \mathbb{P}(|\frac{T_n - S_n}{n^{1/2}}| \geq \varepsilon) \leq 2\varepsilon$ dès que $n \geq n_0$. Donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\frac{T_n - S_n}{n^{1/2}}| \geq \delta) = 0$. Par conséquent, $\frac{T_n - S_n}{n^{1/2}} \to 0$ en probabilité.

Or, d'après le théorème central limite, $\frac{S_n}{n^{1/2}}$ converge en loi vers la gaussienne $\mathscr{N}(0,\,1)$; il résulte donc du théorème de Slutsky que $\frac{T_n}{n^{1/2}} = \frac{S_n}{n^{1/2}} + \frac{T_n - S_n}{n^{1/2}}$ converge en loi vers $\mathscr{N}(0,\,1)$.

(E1) Fixons m et n. Soient $Y_i := S_{m+i} - S_m$, $1 \leq i \leq n$. Alors $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est indépendante de $(S_1, \cdots, S_m)$, et a la même loi que $(S_1, \cdots, S_m)$. Le vecteur aléatoire gaussien $(S_1, \cdots, S_m)$ a une densité, notée p_S, car sa loi est la mesure image de $P_{(X_1,\cdots,X_m)}$ (qui a une densité) par l'application $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + \cdots + x_m)$. De même, $(Y_1, \cdots, Y_n)$ a une densité, notée p_Y. Par l'indépendance, $(S_1, \cdots, S_m, Y_1, \cdots, Y_n)$ a pour densité $p_S(x)p_Y(y)$ pour $x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Posons $M_j := \max_{1\leq i\leq j} |S_i|$ pour tout $j \geq 1$.

Par Fubini–Tonelli, $\mathbb{P}(M_{m+n} \leq a) = \int_{B_m} p_S(x)[\int_{B_n} p_Y(y - x_m\,\mathbf{1})\,\mathrm{d}y]\,\mathrm{d}x$, où $\mathbf{1} := (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$, et pour tout d, $B_d := \{z = (z_1, \cdots, z_d) \in \mathbb{R}^d : |z_i| \leq a, \forall i\}$. D'après (B2) avec $D := B_n$, $\varphi := p_Y$ et $t := 0$, on a $\int_{B_n} p_Y(y - x_m\,\mathbf{1})\,\mathrm{d}y \leq \int_{B_n} p_Y(y)\,\mathrm{d}y$. D'où $\mathbb{P}(M_{m+n} \leq a) = [\int_{B_m} p_S(x)\,\mathrm{d}x]\,[\int_{B_n} p_Y(y)\,\mathrm{d}y]$, ce qui équivaut à l'inégalité cherchée.

(E2) Majoration : triviale car $\max_{1\leq i\leq n} |S_i| \geq |S_n|$. Minoration : (C3).

(E3) Soit $\delta > 0$. D'après (E1), $\mathbb{P}(M_n \leq a_n) \leq \theta_n^{\lfloor n/\lfloor \delta a_n^2 \rfloor \rfloor}$, où $\theta_n = \theta_n(\delta) := \mathbb{P}(M_{\lfloor \delta a_n^2 \rfloor} \leq a_n)$. On fait $n \to \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\limsup_{n\to\infty} \theta_n \leq F(\frac{1+\varepsilon}{\delta^{1/2}})$. D'où la conclusion cherchée.

(E4) Soient $a > 1$ et $0 < b < \frac{\pi}{8^{1/2}}$. Soit $n_k := \lfloor a^k \rfloor$. Soit $C_k := \{M_{n_k} \leq b\frac{n_k^{1/2}}{(\ln\ln n_k)^{1/2}}\}$. D'après la question précédente, $\sum_k \mathbb{P}(C_k) < \infty$ (car $b < \frac{\pi}{8^{1/2}}$). Il résulte alors du lemme de Borel–Cantelli que, p.s. pour tout k suffisamment grand, $M_{n_k} > b\frac{n_k^{1/2}}{(\ln\ln n_k)^{1/2}}$. La monotonie de $n \mapsto M_n$ permet de déduire que $\liminf_{n\to\infty} \frac{(\ln\ln n)^{1/2}}{n^{1/2}} M_n \geq \frac{b}{a^{1/2}}$ p.s. Comme $a > 1$ et $0 < b < \frac{\pi}{8^{1/2}}$ sont arbitraires, on obtient l'inégalité cherchée. $\square$