EXAMEN DU 31 JANVIER 2011

"Intégration & Probabilités"

`180 minutes ; sans documents ni calculatrice`

Rappels : • $u^r v^{1-r} \le ru + (1-r)v$, *pour* $r \in]0, 1[$ *,* $u \ge 0$ *et* $v \ge 0$.

• *Densité de la loi gaussienne* $\mathscr{N}(\mathbb{E}(X), K_X)$*, qui correspond au cas où* K_X *est inversible :*

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\,[\det(K_X)]^{1/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\, {}^t(x-\mathbb{E}(X))\, K_X^{-1}\,(x-\mathbb{E}(X))\Big), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

• *On utilise* λ *pour désigner la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne et également la mesure de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue.*

• $\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \subset A \text{ compact}\} = \inf\{\lambda(G) : G \supset A \text{ ouvert}\}$, $A \in \overline{\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)}$.

• *On admet que si* A *et* B *sont des boréliens non-vides de* $\mathbb{R}^d$*, alors* $A+B := \{x+y : x \in A, y \in B\}$ *est Lebesgue-mesurable.*

Exercice (20 *points*)**.** Dans tout l'exercice, $d \ge 1$ est un entier fixé.

Question A (4 *points*)**.** Soit $\alpha \in]0, 1[$ un réel, et soit $\beta := 1 - \alpha$.

(A1) Soient K et $\widetilde{K}$ deux compacts non-vides de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(K)+\lambda(\widetilde{K}) \le \lambda(K+\widetilde{K})$.

(A2) Soient E et $\widetilde{E}$ deux boréliens non-vides de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(E)+\lambda(\widetilde{E}) \le \lambda(E+\widetilde{E})$.

(A3) Soient h, $\widetilde{h}$ et $\widehat{h}$ des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $h(\alpha x + \beta y) \ge \widetilde{h}(x)^\alpha\, \widehat{h}(y)^\beta$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Soit $s \in [0, 1]$, et soient $E_s := \{x \in \mathbb{R} : h(x) \ge s\}$, $\widetilde{E}_s := \{x \in \mathbb{R} : \widetilde{h}(x) \ge s\}$ et $\widehat{E}_s := \{x \in \mathbb{R} : \widehat{h}(x) \ge s\}$. Montrer que si $\widetilde{E}_s$ et $\widehat{E}_s$ sont non-vides, alors

$$\lambda(E_s) \ge \alpha\, \lambda(\widetilde{E}_s) + \beta\, \lambda(\widehat{E}_s),$$

(A4) Soient g, $\widetilde{g}$ et $\widehat{g}$ des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0, \infty[$ telles que $g(\alpha x + \beta y) \ge \widetilde{g}(x)^\alpha\, \widehat{g}(y)^\beta$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x \ge [\int_{\mathbb{R}} \widetilde{g}(x)\,\mathrm{d}x]^\alpha\, [\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x]^\beta$.

(A5) Soient f, $\widetilde{f}$ et $\widehat{f}$ des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $[0, \infty[$ telles que $f(\alpha x + \beta y) \ge \widetilde{f}(x)^\alpha\, \widehat{f}(y)^\beta$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x \ge [\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{f}(x)\,\mathrm{d}x]^\alpha\, [\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x)\,\mathrm{d}x]^\beta$.

(A6) Soient A et B deux boréliens de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $[\lambda(A)]^{1/d} + [\lambda(B)]^{1/d} \le [\lambda(A+B)]^{1/d}$.

Question B (2 *points*)**.** Soit $D \subset \mathbb{R}^d$ un borélien convexe, et symétrique (c'est à dire, $D = -D$). Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to [0, \infty[$ une fonction borélienne. On suppose que φ est symétrique (c'est à dire,

$\varphi(x) = \varphi(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$), et que pour tout réel $a > 0$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) \geq a\}$ est convexe. Soient $y \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [0, 1]$.

(B1) Soit $b > 0$ un réel. En comparant $\frac{1+t}{2} D_{1,b} + \frac{1-t}{2} D_{-1,b}$ avec $D_{t,b}$, montrer que $\lambda(D_{t,b}) \geq \lambda(D_{1,b})$, où $D_{s,b} := \{x \in D - sy : \varphi(x) \geq b\}$, pour $s \in \mathbb{R}$.

(B2) Montrer que $\int_D \varphi(x + ty)\,\mathrm{d}x \geq \int_D \varphi(x + y)\,\mathrm{d}x$.

Question C (3 *points*)**.** Soit $(X_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et $\mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$, pour tout $n \geq 1$. On pose $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, $n \geq 1$.

(C1) Soit $c > 0$ un réel strictement positif. Soient $M_n := \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$, $n \geq 1$, $A_1 := \{M_1 \geq c\}$ et $A_j = \{M_{j-1} < c \leq M_j\}$, $j \geq 2$. Calculer $\mathbb{E}[S_k(S_n - S_k)\,\mathbf{1}_{A_k}]$ pour $n \geq k \geq 1$.

(C2) En déduire que $\mathbb{E}(S_n^2\,\mathbf{1}_{A_k}) \geq c^2\,\mathbb{P}(A_k)$ pour $n \geq k \geq 1$.

(C3) Montrer que $\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(S_n^2)}{c^2}$.

`Les Questions D et E suivantes sont indépendantes.`

Question D (4 *points*)**.** Soit $(X_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telle que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = 1$. Soit $(N_n,\, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 2, \cdots\}$. On suppose que $N_n \geq n$, $\forall n \geq 1$, et que $\frac{N_n}{n} \to 1$ en probabilité (quand $n \to \infty$).

Posons $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ et $T_n := S_{N_n}$ (c'est à dire, $T_n(\omega) := S_{N_n(\omega)}(\omega)$), $n \geq 1$.

(D1) Soit $0 < \varepsilon < 1$, et soit $k_n := \lfloor (1 + \varepsilon^3)n \rfloor$. Montrer qu'il existe $n_0 = n_0(\varepsilon) < \infty$ tel que $\mathbb{P}(N_n > k_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

(D2) Montrer que $\mathbb{P}(|T_n - S_n| \geq \varepsilon n^{1/2}) \leq \mathbb{P}(\max_{n \leq j \leq k_n} |S_j - S_n| \geq \varepsilon n^{1/2}) + \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

(D3) En déduire que $\frac{T_n}{n^{1/2}}$ converge en loi vers une loi limite que l'on précisera.

Question E (7 *points*)**.** Soient $X_1, X_2, \cdots$ des variables aléatoires réelles indépendantes, suivant toutes la loi gaussienne $\mathscr{N}(0, 1)$. On pose $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$.

(E1) (3 *points*) À l'aide de l'une des questions précédentes, montrer que pour tout réel $a > 0$ et tous entiers $m, n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1 \leq i \leq m+n} |S_i| \leq a\Big) \leq \mathbb{P}\Big(\max_{1 \leq i \leq m} |S_i| \leq a\Big)\,\mathbb{P}\Big(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \leq a\Big).$$

(E2) Montrer que pour tout $a > 0$, $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \leq a n^{1/2}) < 1$ et que pour tout $a > 0$ suffisamment grand, $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \leq a n^{1/2}) > 0$.

(E3) On admet désormais que pour tout $a > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \leq a n^{1/2}) = F(a)$, où $F :]0, \infty[\to]0, 1[$ est telle que $F(\varepsilon) = \exp[-(1 + o(1))\frac{\pi^2}{8\varepsilon^2}]$, $\varepsilon \to 0$.

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $a_n \to \infty$ et que $\frac{a_n}{n^{1/2}} \to 0$, $n \to \infty$. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{n} \ln \mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \leq a_n) \leq -\frac{\pi^2}{8}$.

(E4) Montrer que $\liminf_{n\to\infty} \frac{(\ln \ln n)^{1/2}}{n^{1/2}} \max_{1 \leq i \leq n} |S_i| \geq \frac{\pi}{8^{1/2}}$, p.s.