Partiel du 8 Décembre 2010

"Intégration & Probabilités"

`120 minutes ; sans documents ni calculatrice`

Rappel : Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \lambda)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^d, \lambda)$ *avec* $1 \le p < \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, alors* $(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$, $x \in \mathbb{R}^d$*, est bornée et uniformément continue sur* $\mathbb{R}^d$*.*

Exercice 1 (3 *points*)**.** Soit $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable. Soit $\mathscr{C}$ une famille de parties de E, et soit $B \in \sigma(\mathscr{C})$. Michel dit : alors nécessairement, il existe une famille dénombrable $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathscr{D})$. A-t-il raison ?

Exercice 2 (6 *points*)**.** Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) > 0$.

(i) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $(\mathbf{1}_A * \mathbf{1}_{-A})(x) \neq 0$, alors il existe $y \in A$ et $z \in A$ tels que $x = y - z$.

(ii) Soient f, g des fonctions boréliennes positives sur $\mathbb{R}$. Soit $a \ge 0$ un réel. Montrer que $\{x \in \mathbb{R} : (f * g)(x) \le a\}$ est un fermé.

Indication : on pourra considérer, dans un premier temps, $(f \wedge n)\,\mathbf{1}_{[-n,\,n]}$ et $(g \wedge n)\,\mathbf{1}_{[-n,\,n]}$.

(iii) En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$, on peut trouver $y \in A$ tel que $x + y \in A$.

(iv) Rappelons que l'ensemble $F := \{x_a,\ a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$, où x_a est un représentant de $a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ dans l'intervalle $[0, 1]$, n'est pas un élément de la tribu complétée $\overline{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$. Constatons (a) que $q + F$, $q \in \mathbb{Q}$, sont disjoints ; (b) que $\cup_{q\in\mathbb{Q}}(q + F) = \mathbb{R}$; et (c) que pour tous u, $v \in F$, $u - v$ ne peut être un rationnel non nul.

Montrer que si $A \cap (q + F) \in \overline{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$, $\forall q \in \mathbb{Q}$, alors il existe $q_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $\lambda(A \cap (q_0 + F)) > 0$.

(v) En déduire qu'il existe $B \subset A$ tel que $B \notin \overline{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (11 *points*)**.** Soit μ une mesure finie sur $(E, \mathscr{A})$. Soit $f \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ telle que $f \geq 0$. Soit $(\mathscr{B}_n, \ n \geq 1)$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathscr{A}$.

Question (A) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int f \, \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

Question (B1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction $f_n : \ E \to \mathbb{R}_+$ qui est $\mathscr{B}_n$-mesurable, telle que

$$\int_E f_n \, \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu, \qquad \forall A \in \mathscr{B}_n.$$

Question (B2) Montrer que

$$\lim_{M \to \infty} \sup_{n \geq 1} \int_E f_n \, \mathbf{1}_{\{|f_n| > M\}} \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Question C. On suppose désormais qu'il existe une fonction mesurable g telle que $f_n \to g$ simplement.

Question (C1) Montrer que $g \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ et $f_n \to g$ dans L^1.
Indication : on pourra considérer, dans un premier temps, $f_n \wedge k$ et $g \wedge k$.

Question (C2) Montrer que $g = f$ p.p., si f est $\mathscr{B}_\infty$-mesurable, où $\mathscr{B}_\infty := \sigma(\mathscr{B}_n, \ n \geq 1)$.

Question (C3) Donner une expression p.p. de g en termes de f (et de μ et de $\mathscr{B}_\infty$) sans l'hypothèse que f soit $\mathscr{B}_\infty$-mesurable.

`- fin -`