

PROPRIÉTÉS D'ISOPÉRIMÉTRIE ET DE CONCENTRATION GAUSSIENNES  
Introduction au domaine de recherche (Julien Bureaux)

L'isopérimétrie et le phénomène de concentration de la mesure sont deux notions mathématiques proches quoique singulièrement distinctes. Proches parce qu'elles s'intéressent toutes les deux à un même objet, l'espace métrique mesuré, avec l'objectif commun de mieux comprendre sa géométrie (au sens large). Pour cela, elles considèrent toutes les deux la mesure des boréliens en essayant de contrôler ses accroissements. Elles diffèrent cependant dans la taille des accroissements qui les préoccupent : l'isopérimétrie s'intéresse à des accroissements infinitésimaux (ce qui correspond au périmètre) tandis que la concentration de la mesure contrôle des accroissements suffisamment gros. Le fil conducteur de ce texte sera la mise en relation de ces deux approches dans le cadre du modèle gaussien, l'un des mieux compris et des plus intéressants du point de vue des applications. On sait en effet depuis les débuts de l'étude du phénomène de la concentration de la mesure qu'une inégalité isopérimétrique de type gaussien entraîne automatiquement une propriété de concentration gaussienne pour la mesure considérée. Des travaux récents ont par ailleurs montré que la réciproque est également vraie sous une certaine hypothèse de courbure de l'espace.

## 1 Mise en situation

On désigne sous le terme d'isopérimétrie une grande famille de problèmes partageant la même nature géométrique, dont les plus anciens et les plus célèbres intéressaient déjà les savants grecs.

### 1.1 Quelques mots sur l'isopérimétrie

Le problème « classique » consiste à déterminer, parmi toutes les formes du plan de même périmètre, celles qui possèdent la plus grande surface\*. Si des traces de ce problème et de sa solution apparaissent très tôt (on peut par exemple citer le mythe de la fondation de Carthage par la reine Didon), les premières démonstrations sont attribuées à Zénodore au II<sup>e</sup> siècle av. J.-C. qui montre que, parmi les polygones à  $n$  côtés de périmètre fixé, ce sont les polygones réguliers qui réalisent une surface maximale. Le problème plus général qui consiste à ne plus se restreindre aux polygones mais à considérer toutes les courbes fermées régulières, et dont les solutions sont données par les cercles, est resté longtemps hors de portée des mathématiciens, bien qu'intuitivement compris. Il faut attendre le XIX<sup>e</sup> siècle pour que les méthodes de symétrisation de Steiner d'une part, puis les travaux de Weierstrass sur le calcul variationnel et ceux de Minkowski sur la géométrie des convexes d'autre part, permettent enfin d'établir rigoureusement l'unicité et l'existence de la solution. D'autres démonstrations sont apparues par la suite (notamment celle de Hurwitz utilisant les séries de Fourier, bien connue des élèves de classes préparatoires et des agrégatifs), mais c'est une généralisation de l'approche de Minkowski qui permet en 1937 à Aleksandrov et Fenchel de prouver le théorème isopérimétrique général dans les espaces euclidiens de dimension arbitrairement grande munis de la mesure de Lebesgue :

Soit  $A$  un borélien de  $\mathbb{R}^d$  de bord  $\partial A$  suffisamment régulier, et soit  $B$  une boule de volume  $\text{Vol}(B) = \text{Vol}(A)$ . Alors les mesures de surfaces respectives vérifient l'inégalité  $\sigma(\partial A) \geq \sigma(\partial B)$ .

---

\*. De façon duale, il est bien sûr équivalent de chercher à minimiser le périmètre à surface constante. C'est d'ailleurs plutôt dans ce sens-ci qu'on travaillera ici.

Il est remarquable que ce théorème reste valable pour certaines géométries non euclidiennes. Le premier résultat de ce type est celui de P. Lévy et E. Schmidt sur la sphère  $\mathbb{S}^d$ , généralisé ensuite par Lévy aux surfaces à courbure positive. M. Gromov l'a finalement étendu au cadre de la géométrie riemannienne.

Alors que ces généralisations portent sur la géométrie de l'espace, on peut aussi être tenté de remplacer les considérations de volume et de surface opérées au moyen de la mesure de Lebesgue par d'autres idées de « masse ». Considérons par exemple une variable aléatoire  $X$  définie sur un espace abstrait de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et à valeurs dans un espace métrique  $(S, d)$  muni de sa tribu borélienne. La loi  $\mu$  de la variable aléatoire  $X$  fournit une mesure de probabilité sur l'espace  $S$  dont l'étude permet de mieux comprendre le phénomène aléatoire décrit par  $X$ . Nous adopterons ce point de vue en nous concentrant sur l'espace mesuré  $(S, \mu)$  et sans généralement faire référence à l'espace de probabilité initial. Avant de pouvoir parler d'isopérimétrie, une première question se pose :

### Qu'est-ce qu'un périmètre ?

Si l'idée de périmètre est assez intuitive dans le plan euclidien, la notion correspondante de mesure de surface devient plus délicate en dimension supérieure ou dans un espace métrique abstrait  $(S, d)$ . Donnons-nous une mesure borélienne  $\mu$  sur  $S$ . Une démarche initiée par les travaux de Minkowski consiste à interpréter la surface d'un borélien  $A \subset S$  de mesure finie comme la zone de l'espace par laquelle il grandit. Plus précisément, si, pour  $r > 0$ , on considère  $A_r = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, A) < r\}$  son  $r$ -voisinage (ouvert), il est naturel d'assimiler le comportement des accroissements de  $\mu(A_r)$  à une certaine « mesure » de la taille du bord de  $A$ . On définit ainsi une notion faible de périmètre en considérant seulement les accroissements infinitésimaux, donnée par le contenu (inférieur) de Minkowski

$$\mu^+(A) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(A_r) - \mu(A)}{r}.$$

Hormis la présence d'une limite inférieure à la place d'une vraie limite, la *mesure de bord*  $\mu^+(A)$  est essentiellement la dérivée de  $\mu(A_r)$  en  $r = 0$  et doit être pensée comme telle (on peut faire l'analogie avec les formules donnant l'aire et le périmètre d'un disque ou d'un rectangle de  $\mathbb{R}^2$ ). On pourrait ainsi reformuler le théorème isopérimétrique euclidien en s'affranchissant des questions de régularité et de construction de la mesure de surface :

Si  $A$  est un borélien de  $\mathbb{R}^d$  et si  $B$  est une boule de mesure de Lebesgue  $\lambda(B) = \lambda(A)$ , alors on a l'inégalité  $\lambda^+(A) \geq \lambda^+(B)$ .

## 1.2 Isopérimétrie pour la mesure gaussienne

On se place désormais sur un espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ . On rappelle que la mesure gaussienne (standard) sur  $\mathbb{R}^d$ , notée  $\gamma_d$ , est la mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité

$$\frac{d\gamma_d(x)}{dx} = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2},$$

où  $|x|$  désigne la norme euclidienne standard du vecteur  $x \in \mathbb{R}^d$ . On notera  $\Phi$  la fonction de répartition de la mesure gaussienne sur  $\mathbb{R}$ , c'est à dire

$$\Phi(u) = \gamma_1([-\infty; u]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (u \in \mathbb{R}).$$

Avec les notations précédentes, la mesure  $\gamma_d$  vérifie l'inégalité isopérimétrique suivante :

**Théorème 1.** *Pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^d$ , on a  $\gamma_d^+(A) \geq (\Phi' \circ \Phi^{-1})(\gamma_d(A))$ .*

Dans la suite, on notera  $\mathcal{I} = \Phi' \circ \Phi^{-1}$  et on appellera cette fonction le *profil isopérimétrique gaussien*. Le théorème précédent a été démontrée indépendamment par C. Borell ([Bor75]) d'une part, V. Sudakov et B. Tsirel'son ([ST78]) d'autre part. De manière peut-être surprenante, leur preuves reposent en fait sur une utilisation astucieuse de l'inégalité isopérimétrique classique de Lévy sur la sphère, à laquelle ils associent un argument limite, dit de Poincaré, qui consiste à voir la mesure gaussienne comme une limite de projections orthogonales de mesures uniformes sur des sphères.

*Remarque.* Si  $H$  est un demi-espace affine de  $\mathbb{R}^d$ , on peut écrire  $H = \{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot u \leq h\}$  où  $h \in \mathbb{R}$  et  $u \in \mathbb{R}^d$  est pris unitaire. On vérifie alors facilement que  $\gamma_d(H) = \Phi(h)$  et  $\gamma_d^+(H) = \Phi'(h)$ , de sorte que les demi-espaces vérifient le cas d'égalité de l'isopérimétrie gaussienne (la réciproque est vraie mais plus délicate, voir [Ehr83]).

### Forme intégrée de l'isopérimétrie gaussienne

Au vu de l'interprétation qu'on a donné de la mesure de bord  $\gamma_d^+$ , il est naturel de considérer l'inégalité isopérimétrique gaussienne comme une inégalité infinitésimale et de chercher à l'intégrer. Soit donc  $A \subset \mathbb{R}^d$  un borélien de  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que la fonction  $r \mapsto \gamma(A_r)$  est dérivable sur  $]0; \infty[$  de dérivée  $\gamma^+(A_r)$  (ce serait le cas si la limite inférieure dans la définition de  $\gamma^+$  était une vraie limite), ce qui entraîne

$$\frac{d}{dr} [\Phi^{-1}(\gamma(A_r))] = \frac{\gamma^+(A_r)}{(\Phi' \circ \Phi^{-1})(\gamma(A_r))} \geq 1$$

pour tout  $r > 0$ . Comme  $\lim_{r \rightarrow 0} \gamma(A_r) = \gamma(\bar{A})$ , le théorème des accroissements finis montre alors que  $\Phi^{-1}(\gamma(A_r)) \geq \Phi^{-1}(\gamma(\bar{A})) + r$  d'où  $\gamma(A_r) \geq \Phi(a + r)$  pour  $a = \Phi^{-1}(\gamma(\bar{A}))$ . En fait cette inégalité reste vraie en général (mais la démonstration est plus technique).

**Théorème 2.** *Pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^d$  et tout  $r > 0$ , on a  $\gamma_d(A_r) \geq \Phi(a + r)$  où  $\Phi(a) = \gamma_d(A)$ .*

*Remarque.* Il est en revanche facile de montrer que réciproquement, cette forme d'isopérimétrie gaussienne entraîne la forme infinitésimale.

### 1.3 Concentration gaussienne

Pour toute mesure borélienne de probabilité  $\mu$  sur un espace métrique  $(S, d)$ , et pour tout  $A \subset \mathbb{R}^d$  non vide, on a  $\lim_{r \rightarrow \infty} \mu(A_r) = 1$ . On parle de *concentration de la mesure* lorsque la vitesse de convergence est rapide (au moins exponentielle), uniformément pour tous les boréliens de mesure minorée par  $1/2$ . L'isopérimétrie gaussienne fournit un exemple important de concentration, avec des constantes optimales. En effet, pour tout borélien  $A$  de mesure  $\mu(A) \geq 1/2$ , puisque  $\Phi^{-1}(\mu(A)) \geq 0$ , on peut écrire  $\mu(A_r) \geq \Phi(r)$  d'après la forme intégrée de l'inégalité isopérimétrique. La majoration classique de la queue gaussienne donne alors

$$\forall r > 0, \quad 1 - \mu(A_r) \leq 1 - \Phi(r) \leq \frac{1}{r\sqrt{2\pi}} e^{-r^2/2}$$

et la première inégalité est une égalité pour les demi-espaces. Plus généralement, on dit que  $\mu$  vérifie une *propriété de concentration gaussienne* s'il existe une constante  $C > 0$  telle que la fonction de concentration  $\alpha_\mu$  vérifie

$$\forall r > 0, \quad \alpha_\mu(r) = \sup\{1 - \mu(A_r) : \mu(A) \geq 1/2\} \leq C e^{-r^2/C}.$$

Dans le même ordre d'idée, on dit que  $\mu$  vérifie une *inégalité isopérimétrique gaussienne* s'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\mu^+(A) \geq c\mathcal{I}(\mu(A))$ . Avec la même preuve que précédemment, on voit qu'une telle inégalité entraîne encore de la concentration gaussienne. De ce point de vue, la concentration de la mesure apparaît donc comme une forme affaiblie d'isopérimétrie (intégrée).

## Mesures de Boltzmann

L'approche de la concentration *via* l'isopérimétrie gaussienne que nous présentons ici est naturellement limitée par la classe des mesures de probabilité pour lesquelles on est capable de prouver une inégalité isopérimétrique de type gaussien. On appelle *mesure de Boltzmann* de potentiel  $W$  une mesure borélienne de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^d$  absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = Z^{-1}e^{-W(x)}, \quad \text{où } Z = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-W} dx < +\infty$$

et où  $W$  est une fonction positive de classe  $\mathcal{C}^2$ . Ces mesures fournissent une généralisation naturelle de la mesure gaussienne et on montre qu'elle vérifient une inégalité isopérimétrique gaussienne sous une certaine condition de convexité (voir [BL96]).

**Théorème 3.** *S'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\text{Hess}W \geq c^2$  en tant que matrice symétrique, alors pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^d$ , on a  $\mu^+(A) \geq c\mathcal{I}(\mu(A))$ .*

De manière remarquable, le théorème suivant dû à E. Milman [Mil10] montre que tant que le potentiel  $W$  est convexe, un contrôle de la concentration entraîne une inégalité isopérimétrique.

**Théorème 4.** *On suppose que  $\text{Hess}W \geq 0$ . Soit  $\alpha(r)$  une fonction décroissant vers 0 quand  $r$  décroît vers 0 telle que  $\alpha_\mu \leq \alpha$ . On pose  $r(v) = \inf\{r > 0 : \alpha(r) < v\}$  pour  $v \in [0; 1/2]$ , et  $I(v) = \frac{1}{r(v)}v \log \frac{1}{v}$ . Alors il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\mu^+(A) \geq cI(\mu(A))$  pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^d$  tel que  $\mu(A) \leq 1/2$ .*

En particulier, si  $\mu$  vérifie une propriété de concentration gaussienne, on peut prendre  $\alpha(r) = Ce^{-r^2/C}$  ce qui conduit à  $I(v) \geq c'v\sqrt{\log \frac{1}{v}} \geq c''\mathcal{I}(v)$ . En d'autres termes, on est remonté à une inégalité isopérimétrique gaussienne.

Dans les deux sections qui suivent, nous introduisons des caractérisations et des outils importants pour établir des résultats d'isopérimétrie de type gaussien. On indiquera finalement des preuves partielles des théorèmes 3 et 4.

## 2 Formulations fonctionnelles

On peut changer légèrement de point de vue sur l'isopérimétrie et la concentration : plutôt que de regarder directement la mesure  $\mu$ , on s'intéresse aux mesures images  $\mu \circ f^{-1}$  où  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lipschitzienne. Cette façon de voir les choses est particulièrement pertinente en vue d'applications en théorie des probabilités :  $f$  est alors perçue comme une variable aléatoire à valeurs réelles de loi  $\mu \circ f^{-1}$ . Enfin, il est (au moins intuitivement) clair que ce point de vue n'est pas restrictif tant qu'on peut approcher de manière satisfaisante les indicatrices de suffisamment de boréliens par des fonctions lipschitziennes.

## 2.1 Inégalités de déviation et de concentration

La concentration pour la mesure  $\mu$  se traduit alors automatiquement en terme d'inégalités de déviation pour les fonctions lipschitziennes, et réciproquement ces inégalités caractérisent la fonction de concentration.

**Proposition 1.** *La fonction de concentration  $\alpha_\mu$  est la plus petite fonction positive  $\alpha$  définie sur  $]0; +\infty[$  vérifiant : pour toute  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  fonction  $K$ -lipschitzienne, et pour tout  $m$  tel que  $\mu\{f > m\} \leq 1/2$ , on a*

$$\forall r > 0, \quad \mu\{f \geq m + r\} \leq \alpha(r/K).$$

La preuve n'est pas difficile et on peut la trouver dans l'excellent ouvrage de référence [Led01]. En particulier, on a concentration gaussienne si et seulement s'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\mu\{f \geq m + r\} \leq Ce^{-r^2/C}$  pour toute  $f$  fonction 1-lipschitzienne et tout  $r > 0$ .

*Remarque.* Si  $m$  est une médiane, c'est à dire  $\mu\{f > m\} = \mu\{f < m\} = 1/2$ , on obtient en appliquant successivement l'inégalité à  $f$  et  $-f$  une inégalité de concentration pour  $f$  :

$$\mu\{|f - m| \geq r\} \leq 2\alpha(r/K).$$

Notons par ailleurs, que c'est ce genre d'inégalités de déviation et de concentration qui rend la concentration intéressante dans les applications.

### Un exemple standard

Soient  $X_1, \dots, X_d$  des variables aléatoires indépendantes de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  et soit  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $K$ -lipschitzienne telle que  $Z = f(X_1, \dots, X_d)$  vérifie  $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$ . Alors le vecteur

$$\left( \frac{X_1 - m}{\sigma}, \frac{X_2 - m}{\sigma}, \dots, \frac{X_d - m}{\sigma} \right)$$

est un vecteur gaussien de loi  $\gamma_d$ . On obtient donc une inégalité de concentration pour la loi de  $Z$  (on admet ici qu'on peut remplacer la médiane par la moyenne [Led01]) :

$$\mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq r) \leq 2 \exp\left(-\frac{r^2}{2K^2\sigma^2}\right), \quad r > 0$$

ce qu'on peut traduire en intervalle de confiance pour  $Z$  :

$$\mathbb{P}\left(|Z - \mathbb{E}[Z]| < \sigma K \sqrt{2 \log \frac{2}{\alpha}}\right) \geq 1 - \alpha, \quad \alpha \in ]0; 1[.$$

En particulier pour la moyenne empirique  $Y = (X_1 + \dots + X_d)/d$ ,

$$\mathbb{P}(|Y - m| \geq r) \leq 2 \exp\left(-\frac{r^2 d}{2\sigma^2}\right), \quad r > 0$$

$$\mathbb{P}\left(|Y - m| < \sigma \sqrt{\frac{2}{d} \log \frac{2}{\alpha}}\right) \geq 1 - \alpha, \quad \alpha \in ]0; 1[.$$

De telles inégalités sont à mettre en parallèle avec les résultats asymptotiques fournis par la loi des grands nombres ou le théorème central limite. À leur différence, on a ici un contrôle précis, et à *temps fini*. Notons qu'on aurait pu obtenir l'inégalité pour la moyenne empirique de manière plus élémentaire avec la méthode de Chernoff.

## 2.2 Inégalités isopérimétriques de Bobkov

On va voir que l'approche fonctionnelle est également très féconde dans le cas de l'isopérimétrie gaussienne, et permet de la caractériser entièrement. Soit  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne. On a besoin d'un contrôle optimal de la constante de Lipschitz de  $f$  au voisinage de chaque point : on définit la *norme de gradient* de  $f$  par

$$|\nabla f|(x) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Et on vérifie que  $|\nabla f|(x) = |\nabla f(x)|$  en tout point de différentiabilité de  $f$ , ces points étant par ailleurs de mesure totale d'après le théorème de Rademacher.

**Théorème 5.** *Une mesure de probabilité borélienne  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^d$  vérifie une inégalité isopérimétrique gaussienne si et seulement s'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour toute fonction lipschitzienne  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0; 1]$ ,*

$$\mathcal{I} \left( \int f d\mu \right) \leq \int \left[ \mathcal{I}(f) + \frac{1}{c} |\nabla f| \right] d\mu.$$

Sans entrer dans les détails de la preuve, il est intéressant de noter que le lien entre  $|\nabla f|$  et  $\mu^+$  est donné par l'inégalité\* de la *co-aire*

$$\int |\nabla f| d\mu \geq \int_0^1 \mu^+ \{f > t\} dt.$$

On obtient alors la condition suffisante en approchant les fonctions indicatrices des fermés de  $\mathbb{R}^d$  à l'aide de fonctions lipschitziennes. La preuve de la condition nécessaire donnée par [BM00] est également intéressante : elle consiste à se ramener à la mesure gaussienne sur  $\mathbb{R}$  et à utiliser l'inégalité fonctionnelle correspondante pour cette mesure (que l'on admet temporairement).

*Remarque.* Cette preuve permet également de caractériser les mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient une inégalité isopérimétrique gaussienne : ce sont les images de la mesure gaussienne  $\gamma_1$  par les applications lipschitziennes.

On peut donner une autre inégalité fonctionnelle plus robuste qui entraîne également l'isopérimétrie gaussienne, et même la caractérise :

**Théorème 6.** *Une mesure borélienne de probabilité  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^d$  vérifie une inégalité isopérimétrique gaussienne si et seulement s'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour toute fonction  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne, on a*

$$\mathcal{I} \left( \int f d\mu \right) \leq \int \sqrt{\mathcal{I}(f)^2 + \frac{1}{c^2} |\nabla f|^2} d\mu.$$

Cette inégalité possède une importante propriété de tensorisation : si elle est vérifiée sur  $(S_1, d_1, \mu_1)$  et sur  $(S_2, d_2, \mu_2)$ , alors elle est automatiquement vérifiée sur  $(S_1 \times S_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$  pour la distance  $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$ . En particulier, il suffit de prouver la condition suffisante du théorème sur  $\mathbb{R}$ . Bobkov a utilisé ces propriétés de tensorisation pour établir une version discrète de cette inégalité fonctionnelle sur l'hypercube  $\{-1, 1\}^d$ , puis en déduire le cas de la mesure gaussienne  $\gamma_d$  à l'aide du théorème central limite (voir [Bob97], et [BM00] pour la condition nécessaire).

---

\*. On a même une égalité sous des hypothèses supplémentaires [BH97].

## Résumé

À ce stade, on a dégagé quatre formes équivalentes d'isopérimétrie gaussienne sur  $\mathbb{R}^d$ , la dernière étant *a priori* la plus forte :

- (i) Pour tout  $A \subset \mathbb{R}^d$  borélien,  $\mu^+(A) \geq c \mathcal{I}(\mu(A))$ .
- (ii) Pour tout  $A \subset \mathbb{R}^d$  borélien et tout  $r > 0$ ,  $\mu(A_r) \geq \mathcal{I}(\Phi^{-1}(\mu(A)) + cr)$ .
- (iii) Pour toute  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0; 1]$  lipschitzienne,

$$\mathcal{I} \left( \int f d\mu \right) \leq \int \left[ \mathcal{I}(f) + \frac{1}{c} |\nabla f| \right] d\mu.$$

- (iv) Pour toute  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0; 1]$  lipschitzienne,

$$\mathcal{I} \left( \int f d\mu \right) \leq \int \sqrt{\mathcal{I}(f)^2 + \frac{1}{c^2} |\nabla f|^2} d\mu.$$

Par ailleurs, en utilisant les arguments d'approximations standards par convolution et troncature, il suffit de prouver (iii) ou (iv) pour des fonctions régulières, par exemple de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact.

## 3 Méthodes de semi-groupes

On présente maintenant une méthode développée par D. Bakry et M. Ledoux [BL96] et qui permet d'établir des inégalités de Bobkov du type (iv) pour certaines mesures de Boltzmann, et *a fortiori* de la concentration gaussienne. Soit donc  $\mu$  une mesure de Boltzmann sur  $\mathbb{R}^d$  de potentiel  $W$ . On se donne par ailleurs un mouvement brownien standard  $(B_t)$  dans  $\mathbb{R}^d$  défini sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ . Sous certaines conditions techniques sur  $W$  que l'on suppose remplies, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  on peut construire un unique processus stochastique  $(X_t^x)_{t \geq 0}$  à trajectoires continues sur  $[0; +\infty[$  appelé *processus de Kolmogorov* tel que

$$\forall t \geq 0, \quad X_t^x = B_t - \frac{1}{2} \int_0^t \nabla W(X_s^x) ds, \quad X_0^x = x.$$

Intuitivement,  $(X_t^x)$  est un mouvement brownien issu de  $x$  soumis à une force de rappel  $\frac{1}{2} \nabla W(X_t^x)$  qui dépend de sa position. De plus,  $(X_t)$  hérite de la propriété de Markov du mouvement brownien : la famille d'opérateurs linéaires continus  $(P_t)$  sur l'espace des fonctions  $f$  boréliennes bornées sur  $\mathbb{R}^d$  définie par  $P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t^x)]$  vérifie la propriété de semi-groupe  $P_{t+s} = P_t \circ P_s$ .

En fait, on peut généralement définir  $P_t$  sur une classe de fonctions beaucoup plus large. Dans le cas gaussien par exemple,  $W(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ , et on montre facilement (avec un peu de calcul stochastique par exemple) que pour tout  $f \in L^1(\gamma)$  on a

$$\mathbb{E}[f(X_t^x)] = \int f(xe^{-t/2} + (1 - e^{-t})^{1/2}y) d\gamma(y),$$

et on appelle dans ce cas  $(P_t)$  le *semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck*. Dans le cas général, on fait l'hypothèse suivante qui est vérifiée ici.

**Hypothèse de l'algèbre standard :** on suppose qu'il existe une algèbre de  $\mathcal{A}$  de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  stables par  $P_t$  et par composition avec des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ , qui soit incluse et dense dans  $L^p(\mu)$  pour tout  $p \in ]1; +\infty[$  et qui contient les constantes. On suppose de plus que pour tout  $f \in \mathcal{A}$ , la limite

$$Lf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t f - f}{t} = \frac{1}{2} [\Delta f - \nabla W \cdot \nabla f]$$

existe pour la norme uniforme et soit dans  $\mathcal{A}$ .

À partir de là, on se place sur l'algèbre  $\mathcal{A}$  afin de justifier tous les calculs. On vérifie notamment que la mesure  $\mu$  est *symétrique* par rapport au semi-groupe  $(P_t)$ , c'est à dire que pour tout  $f, g \in \mathcal{A}$ ,

$$\int f P_t g d\mu = \int g P_t f d\mu,$$

ce qui correspond à la formule d'intégration par parties suivante, utile pour les calculs :

$$\int f Lg d\mu = -\frac{1}{2} \int \nabla f \cdot \nabla g d\mu.$$

### 3.1 Cas d'une mesure log-concave, Hess $W \geq 0$

Comme cas particulier du critère de courbure-dimension pour les diffusions de Bakry et Emery, on a une très importante propriété de *sous-commutativité* (qui caractérise en fait ce cas).

**Théorème 7.** *Pour tout  $f \in \mathcal{A}$ , on a  $|\nabla P_t f| \leq P_t |\nabla f|$ .*

Une des conséquences de ce résultat est l'existence d'inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmiques locales bilatérales pour  $P_t$  :

$$\begin{aligned} t|\nabla P_t f|^2 &\leq P_t f^2 - (P_t f)^2 \leq t P_t |\nabla f|^2 && \text{(Poincaré),} \\ \frac{t}{2} \frac{|\nabla P_t f|^2}{P_t f} &\leq P_t f \log \frac{1}{P_t f} - P_t (f \log \frac{1}{f}) \leq \frac{t}{2} P_t \left( \frac{|\nabla f|^2}{f} \right) && \text{(Sobolev logarithmique).} \end{aligned}$$

On déduit notamment des deux minoration, que certaines fonctionnelles en  $P_t f$  sont automatiquement lipschitziennes : pour toute fonction  $f \in \mathcal{A}$

- si  $0 \leq f \leq 1$ , on a  $|\nabla P_t f| \leq t^{-1/2}$  (en particulier  $\lim_{t \rightarrow \infty} \nabla P_t f = 0$ );
- si  $0 < f \leq 1$ , on a  $|\nabla (-\log P_t f)^{1/2}| \leq (2t)^{-1/2}$ .

Nous montrons comment établir l'inégalité de Poincaré afin d'illustrer le schéma général de preuve de ce genre d'inégalité : dériver, pour exprimer la quantité d'intérêt comme une intégrale,

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 = \int_0^t \frac{d}{ds} P_s(P_{t-s} f)^2 ds.$$

En dérivant, on voit alors que

$$\frac{d}{ds} P_s(P_{t-s} f)^2 = P_s L(P_{t-s} f)^2 - 2P_s [(P_{t-s} f) \times (L P_{t-s} f)] = P_s(\Gamma(P_{t-s} f)),$$

où on a noté  $\Gamma(g) = L(g^2) - 2g Lg = |\nabla g|^2$ . En utilisant la propriété de sous-commutativité, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la propriété de semi-groupe de  $P_t$ , on obtient

$$\int_0^t P_s |\nabla P_{t-s} f|^2 ds \leq \int_0^t P_s (P_{t-s} |\nabla f|)^2 ds \leq \int_0^t P_{s+(t-s)} |\nabla f|^2 ds = t P_t |\nabla f|^2.$$

La minoration s'obtient de manière analogue. □

### 3.2 Indications pour la preuve du théorème 3

On cherche à montrer l'inégalité de Bobkov (iv) pour en déduire le théorème. Fixons  $f \in \mathcal{A}$  lipschitzienne telle que  $0 \leq f \leq 1$ , et posons

$$J(t) = \int \sqrt{\mathcal{I}^2(P_t f) + \frac{1}{c^2} |\nabla P_t f|^2} d\mu.$$



En remarquant que

$$J(0) = \int \sqrt{\mathcal{I}^2(f) + \frac{1}{c^2} |\nabla f|^2} d\mu \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = \mathcal{I} \left( \int f d\mu \right),$$

il suffit de montrer que  $J$  est décroissante en  $t$ . Pour cela on calcule sa dérivée et on montre qu'elle se met sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= -\frac{1}{2} \int \frac{A_t}{K_t^{3/2}} d\mu \quad \text{où} \quad K_t = \mathcal{I}^2(P_t f)^2 + \frac{1}{c^2} |\nabla P_t f|^2 \quad \text{et,} \\ A_t &= K_t \left[ {}^t \nabla P_t f \left( \frac{\text{Hess } W}{c^2} - I_d \right) \nabla P_t f \right] + B_t \quad \text{avec} \quad B_t \geq 0. \end{aligned}$$

### 3.3 Indications pour la preuve du théorème 4

La démonstration qu'on esquisse ici est due à M. Ledoux ([Led11]). Elle se découpe en trois étapes principales :

1. On établit en guise de lemmes préliminaires des inégalités de déviation pour  $P_t$  de manière à relier le semi-groupe et la fonction de concentration.
2. On montre que si on a une inégalité isopérimétrique pour tout  $v$  dans un voisinage de 0, on peut l'étendre à tout  $v \in [0; 1/2]$ .
3. On vérifie qu'on a effectivement une inégalité isopérimétrique au voisinage de 0.

En guise d'exemple d'utilisation de la concentration, on détaille la première étape.

**Lemme 1.** *Pour toute fonction  $f \in \mathcal{A}$  telle que  $0 \leq f \leq 1$ , pour tous  $t > 0$  et  $r > 0$ ,*

$$\mu \left\{ P_t f \geq 2 \int f d\mu + \frac{r}{\sqrt{t}} \right\} \leq \alpha_\mu(r).$$

*Démonstration.* Soit  $m = 2 \int f d\mu$  supposé non nul (sinon  $\mu\{P_t f > 0\} = 0$ ). D'après l'inégalité de Markov et en utilisant l'invariance de  $\mu$  par rapport au semi-groupe  $(P_t)$ , on voit que

$$\mu\{P_t f > m\} \leq \frac{1}{m} \int P_t f d\mu = \frac{1}{2}.$$

Comme de plus, la fonction  $x \mapsto P_t f(x)$  est  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ -lipschitzienne, le phénomène de concentration de la mesure peut s'exprimer sous la forme donnée par l'énoncé.  $\square$

**Lemme 2.** *Pour toute fonction  $f \in \mathcal{A}$  telle que  $0 < f \leq 1$  et  $\int f d\mu \leq 1/2$ , pour tous  $t > 0$  et  $r > 0$ ,*

$$\mu \left\{ P_t f \geq \left( 2 \int f d\mu \right)^{\frac{1}{2}} e^{r^2/2t} \right\} \leq \alpha_\mu(r).$$

*Démonstration.* On va utiliser le fait que  $\phi_t = \sqrt{-\log P_t f}$  est  $\frac{1}{\sqrt{2t}}$ -lipschitzienne. On a nécessairement  $\int f d\mu > 0$  car sinon  $\mu\{f > 0\} = 0$ . Posons  $m = \left( \log \frac{1}{2 \int f d\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$ . En utilisant l'inégalité de Markov et l'invariance de  $\mu$  par rapport au semi-groupe  $(P_t)$  on vérifie que

$$\mu\{\phi_t < m\} = \mu\{P_t f > e^{-m^2}\} \leq e^{m^2} \int f d\mu = \frac{1}{2}.$$

Dès lors, le phénomène de concentration de la mesure s'exprime pour  $\phi_t$  sous la forme

$$\mu \left\{ \phi_t \leq m - \frac{r}{\sqrt{2t}} \right\} \leq \alpha_\mu(r).$$

Ce n'est pas tout à fait l'inégalité voulue, mais elle l'implique. Afin que l'événement considéré ne soit pas vide (l'inégalité serait trivialement vérifiée), on peut en effet supposer que

$$\frac{r^2}{2t} - \frac{m^2}{2} = \log \left[ \left( 2 \int f d\mu \right)^{\frac{1}{2}} e^{r^2/2t} \right] \leq 0$$

et sous cette hypothèse, on a par concavité de la racine carrée

$$\sqrt{\frac{m^2}{2} - \frac{r^2}{2t}} \leq m - \frac{r}{\sqrt{2t}},$$

de sorte qu'après une rapide réécriture

$$\mu \left\{ P_t f \geq \left( 2 \int f d\mu \right)^{\frac{1}{2}} e^{r^2/2t} \right\} \leq \mu \left\{ \phi_t \leq m - \frac{r}{\sqrt{2t}} \right\} \leq \alpha_\mu(r).$$

□

## 4 Perspectives

Nous avons vu, au moins rapidement, comment les notions d'isopérimétrie gaussienne et de concentration de la mesure pouvaient s'imbriquer. Pour cela, nous avons donné une caractérisation robuste de l'isopérimétrie sous la forme d'inégalités fonctionnelles de Bobkov. Dans le cadre de mesures Boltzmann, nous avons développé à l'aide des semi-groupes associés aux processus de Kolmogorov une gamme d'outils efficaces pour manier l'isopérimétrie gaussienne fonctionnelle. À partir de là, plusieurs remarques s'imposent.

Premièrement, il ne faudrait pas croire que l'isopérimétrie gaussienne est la seule voie d'accès vers les propriétés de concentration de la mesure. Sans chercher à être absolument exhaustif, on peut citer l'utilisation d'inégalités fonctionnelles de Cheeger, de Poincaré ou de Sobolev logarithmiques, les méthodes de transport de la mesure, les méthodes de symétrisation de Steiner, ou encore les travaux de Talagrand dans les espaces produits. De plus, d'autres formes d'isopérimétrie peuvent aussi entraîner d'autres formes de concentration (par exemple exponentielle).

Deuxièmement, comme on l'a déjà noté, cette approche de la concentration est limitée par la taille de la classe de mesures pour lesquelles on sait prouver un inégalité isopérimétrique gaussienne. Le théorème de Milman montre notamment que la condition  $\text{Hess } W \geq c^2 > 0$  est *a priori* trop forte. En fait, on peut même sortir de la condition de convexité  $\text{Hess } W \geq 0$  en ajoutant une perturbation tout en conservant l'isopérimétrie (voir les travaux récents de Bobkov). Plus généralement, on ne sait pas aujourd'hui caractériser les mesures de probabilités, qui ne seraient par exemple pas de Boltzmann, pour lesquelles il y a isopérimétrie (gaussienne).

# Bibliographie

- [BH97] Serguei BOBKOV et Christian HOUDRÉ. *Some Connections between Isoperimetric and Sobolev-type Inequalities*. T. 129. Memoirs of the American Mathematical Society 616. American Mathematical Society, 1997.
- [BL96] Dominique BAKRY et Michel LEDOUX. « Lévy-Gromov’s isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator ». Dans : *Inventiones mathematicae* 123 (1996), p. 259–281.
- [BM00] Frédéric BARTHE et Bernard MAUREY. « Some remarks on isoperimetry of Gaussian type ». Dans : *Annales de l’Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques* 36.4 (2000), p. 419–434.
- [Bob97] Sergey G. BOBKOV. « An isoperimetric inequality on the discrete cube and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space ». Dans : *The Annals of Probability* 25.1 (1997), p. 206–214.
- [Bor75] Christer BORELL. « The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space ». Dans : *Inventiones mathematicae* 30.2 (1975), p. 207–216.
- [Ehr83] Antoine EHRHARD. « Symétrisation dans l’espace de Gauss ». Dans : *Mathematica Scandinavica* 53.2 (1983), p. 281–301.
- [Led01] Michel LEDOUX. *The concentration of measure phenomenon*. Mathematical Surveys and Monographs 89. American Mathematical Society, 2001.
- [Led11] Michel LEDOUX. « From concentration to isoperimetry: semigroup proofs ». Dans : *Concentration, Functional Inequalities and Isoperimetry*. Sous la dir. de Christian HOUDRÉ et al. American Mathematical Society, 2011.
- [Mil10] Emanuel MILMAN. « Isoperimetric and concentration inequalities : equivalence assuming curvature lower bound ». Dans : *Duke Mathematical Journal* 154.2 (2010), p. 207–239.
- [ST78] V. N. SUDAKOV et B. TSIREL’SON. « Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures ». Dans : *Journal of Mathematical Science* 9.1 (1978), p. 9–18.