Stabilité des inégalités géométriques.
Introduction au domaine de recherche
Benoit Huou

1 Inégalité isopérimétrique

Le problème isopérimétrique est en fait une classe de problèmes de même nature géométrique, dont les premiers furent posés il y a déjà bien longtemps.

1.1 Origine du problème

Les premières traces que nous avons de ce problème sont posées dans le plan. Il semblerait qu'au moment de la fondation de Carthage, la reine Didon s'est posée la question de maximiser la surface d'une zone délimitée par un demi-plan d'un côté et par une courbe dont la longueur est fixée à l'avance de l'autre. La solution à ce problème est de prendre pour courbe un demi-cercle, c'est ce qui aurait décidé de la forme des fondations de la ville antique. Le problème était également connu des grecs au sujet des polygones, parmi tous les polygones, à nombre fixé de faces et à aire fixée, ce sont les polygones réguliers qui ont un périmètre minimal.

Le problème isopérimétrique dans le plan euclidien peut se formuler de la façon suivante :

Soit C une courbe de Jordan (simple et fermée) dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Supposons que C vérifie certains critères de régularité (par exemple, C est continue). Notons L la longueur de la courbe, et A l'aire de la composante connexe bornée de $\mathbb{R}^2 - C$ (la région intérieure de C). Quelles sont alors, pour une longueur L fixée, les courbes qui maximisent la valeur de l'aire A ? Ou, inversement, pour une aire A fixée, quelles sont les courbes de longueur L minimale ?

La solution à ce problème est connue, les minimiseurs sont les cercles, et on a l'inégalité

$$L^2 \geq 4\pi A.$$

1.2 Formulation générale du problème

Ce problème peut se généraliser de plusieurs façons, on peut augmenter la dimension de l'espace, changer la mesure, et même passer à un espace plus abstrait. Formulons le problème dans espace métrique mesuré général.

Soit (X, d, μ) un espace métrique mesuré (muni d'une ditance d et d'une mesure borélienne μ, pas nécessairement finie). Définissons la mesure de bord dérivée de μ : si A est un borélien de X, posons, pour $r > 0$:

$$A_r = \{x \in X; d(x, A) < r\},$$

le r-voisinage (ouvert) de A, puis :

$$\mu^+(A) = \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r}\mu(A_r - A).$$

Dans le cas d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, l'on peut définir la mesure de bord, ou μ-périmètre d'un ensemble de façon plus formelle : si E est un ensemble Lebesgue-mesurable (notant $d\mu(x) = h(x)dx$)

$$\mu^+(E) = \int_{\partial^M E} h(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

où $\mathcal{H}^{n-1}$ est la mesure de Hausdorff de dimension $n-1$, et $\partial^M E$ est le bord essentiel de E, c'est-à-dire, sans rentrer dans les détails, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ en lesquels la densité de l'ensemble E par rapport à la mesure de Lebesgue (quantité toujours comprise entre 0 et 1) n'est égale ni à 0 ni à 1.

La fonction isopérimétrique I_μ de μ est la plus grande fonction définie sur $[0, \mu(X))$ telle que l'inégalité

$$\mu^+(A) \geq I_\mu(\mu(A))$$

est vérifiée pour tout borélien A de X tel que $\mu(A) < \infty$. Les ensembles boréliens B tels que $\mu^+(B) = I_\mu(\mu(B))$, sont appelés ensembles extrémaux pour l'inégalité isopérimétrique, ils ont une mesure de bord minimale parmi tous les ensembles de même mesure. Ainsi, si A est un ensemble mesurable tel que $\mu(A) = \mu(B)$, alors $\mu^+(A) \geq \mu^+(B)$.

Il s'agit de trouver explicitement les ensembles extrémaux, malheureusement, cela s'avère dans la plupart des cas très ardu. D'ailleurs l'expression explicite de la fonction isopérimétrique n'est connue que dans quelques cas particuliers. Citons comme exemples marquants les espaces à courbure constante ($\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue ; la sphère $\mathbf{S}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, munie de sa métrique géodésique, grâce aux travaux de Lévy et Schmidt ; ou l'espace hyperbolique $\mathbf{H}^n$ de dimension n, munie de sa métrique hyperbolique). Dans ces cas, en considérant la mesure de volume riemannienne $d\mu$, normalisée dans le cas de $\mathbf{S}^n$, on note, pour $r > 0$, $v(r)$ la mesure de la boule de rayon r. Alors on a :

$$I = v' \circ v^{-1}.$$

En particulier, dans le cas euclidien, $I_{\mathcal{L}^n}(r) = n\kappa_n^{\frac{1}{n}} a^{\frac{(n-1)}{n}}$, où κ_n est le volume de la boule unité. Ce sont, dans ce cas, les boules euclidiennes qui minimisent la mesure de bord.

Pour ce qui est de la mesure gaussienne, les minimiseurs sont les demi-espaces.

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^n$, que l'on munit de la norme euclidienne, notée $|.|$, et de la mesure gaussienne γ_n :

$$d\gamma_n(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} dx.$$

Pour $u \in \mathbf{S}^{n-1}$ et $r \in \mathbb{R}$, un demi-espace (ouvert) est défini ainsi :

$$H_{u,r} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \langle x, u \rangle < r\}.$$

Soit $\Phi : s \mapsto \int_{-\infty}^{s} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \gamma_1(]-\infty, s])$, la fonction de répartion de la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}$. La mesure gaussienne d'un demi-espace $H_{u,r}$ vaut alors $\gamma_n(H_{u,r}) = \Phi(r)$, et sa mesure de bord est égale à $\phi(r) := \Phi'(r) = \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$. La fonction isopérimétrique gaussienne est définie sur $[0,1]$ et a donc pour expression

$$I_{\gamma_n} = \phi \circ \Phi^{-1}$$

et l'inégalité isopérimétrique gaussienne s'écrit

$$\text{Pour tout ensemble } A \text{ mesurable de } \mathbb{R}^n, \ \gamma_n^+(A) \geq (\phi \circ \Phi^{-1})(\gamma_n(A)).$$

La fonction isopérimétrique gaussienne vérifie certaines propriétés remarquables :

- $I_{\gamma_n} = I_{\gamma_1}$ pour tout n ;
- I_γ est concave sur son support ;
- pour tout $s \in [0,1]$, $I_\gamma(s) = I_\gamma(1-s)$, en particulier $I_\gamma(0) = I_\gamma(1) = 0$;
- I_γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son support, $I_\gamma' = -\Phi^{-1}$ et $I_\gamma'' = -\frac{1}{I_\gamma}$;
- une estimation sur les distributions gaussiennes donne $I_\gamma(t) \underset{0}{\sim} t\sqrt{2 \log(\frac{1}{t})}$.

L'inégalité isopérimétrique peut être formulée d'une autre manière, cette fois pas infinitésimale, mais en utilisant la notion de r-voisinage, définie plus haut. Revenons à notre espace métrique mesuré général (X, d, μ) : si B est un ensemble extrémal pour l'isopérimétrie, et si A est un ensemble mesurable de même mesure que B ($\mu(A) = \mu(B)$) alors, pour tout $r > 0$, on a

$$\mu(A_r) \geq \mu(B_r).$$

Remarque : Le r-voisinage d'une boule géodésique de rayon s est encore une boule, de rayon $r + s$.

Cette inégalité, pouvant être vue comme une version macroscopique de l'isopérimétrie, est équivalente à l'inégalité isopérimétrique classique. En effet, partant de la seconde version, il suffit de prendre la limite inférieure. Pour obtenir cette version à partir de la première, c'est un peu plus compliqué. Pour simplifier les choses ici, plaçons-nous dans le cas où A est un borélien de X, alors la fonction $r \mapsto \mu(A_r)$ est dérivable de dérivée $\mu^+(A_r)$, et il suffit alors d'intégrer l'inégalité classique pour obtenir l'inégalité macroscopique.

Dans le cas gaussien, on remarque, que, pour $r, s \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbf{S}^{n-1}$, $(H_{u,s})_r = H_{u,r+s}$, l'inégalité macroscopique s'écrit

$$\text{Pour } A \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ on a } \gamma_n(A_r) \geq \Phi(\gamma_n(A) + r).$$

Il existe plusieurs démonstrations de l'inégalité isopérimétrique gaussienne, les premières qui furent publiées l'ont été indépendamment par C. Borell [8] d'une part, et V. Sudakov et B. Tsirel'son conjointement [14] d'autre part. Leurs preuves reposent toutes deux sur l'inégalité isopérimétrique sur la sphère, démontrée par Lévy, et sur l'approximation de la mesure gaussienne par une suite de projections orthogonales de mesures uniformes sur la sphère.

A. Ehrhard [10] a de son côté proposé une démonstration géométrique, basée sur un argument de "symétrisation" pour la mesure gaussienne. Il a introduit une transformation d'ensembles sur $\mathbb{R}^n$, qui conserve la mesure mais diminue la mesure de bord, et a ainsi montré que les demi-espaces étaient extrémaux pour l'inégalité isopérimétrique, et étaient les seuls.
Plus récemment, F. Barthe et B. Maurey [3] en ont proposé une preuve par l'intermédiaire d'une technique de martingale.

1.3 Formulations fonctionnelles

Il existe des formulations fonctionnelles de l'inégalité isopérimétrique, formulations qui lui sont équivalentes.
Nous travaillons avec des applications localement lipschitziennes sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire des applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pour lesquelles la quantité

$$\limsup_{y\to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}$$

existe et est finie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On la note $|\nabla f|(x)$. Nous savons qu'en tout point où f est différentiable, on a l'égalité $|\nabla f|(x) = |\nabla f(x)|$, et que par ailleurs, d'après le théorème de Rademacher, f est presque-partout dérivable, c'est-à-dire que ces points sont de mesure totale dans $\mathbb{R}^n$.

Soit μ une mesure log-concave, $d\mu(x) = e^{-V(x)}dx$, avec l'hypothèse supplémentaire que $\mathrm{Hess}(V) \geq c^2 Id_{\mathbb{R}^n}$ au sens des matrices symétriques, où c est une constante strictement positive. Alors, il a été prouvé (par Bobkov [6]) que la condition qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{\epsilon|x|^2} d\mu(x) < \infty$ (condition de Herbst) est équivalente à une inégalité isopérimétrique pour la mesure μ :

$$\text{Pour tout } A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ borélien, } \mu^+(A) \geq cI_\mu(\mu(A)).$$

Il a également prouvé que ceci était équivalent à ce que, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ localement lipschitzienne,

$$I_\mu(\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu) \leq \int_{\mathbb{R}^n} (I_\mu \circ f + \frac{1}{c} |\nabla f|) d\mu.$$

Cette inégalité est encore équivalente, d'après les travaux de D. Bakry et M. Ledoux [4], à la suivante, avec les mêmes conditions sur f :

$$I_\mu(\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{(I_\mu \circ f)^2 + \frac{1}{c^2} |\nabla f|^2} d\mu.$$

Le cas de la mesure gaussienne se retrouve en prenant $c = 1$:

Théorème 1.1 *(Inégalité de Bobkov)*
Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne, on a les inégalités suivantes :

$$I_{\gamma_n}(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{(I_{\gamma_n} \circ f)^2 + |\nabla f|^2} d\gamma_n.$$

$$I_{\gamma_n}(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n) \leq \int_{\mathbb{R}^n} (I_{\gamma_n} \circ f + |\nabla f|) d\gamma_n.$$

Ces inégalités impliquent l'inégalité isopérimétrique gaussienne, en effet, pour un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (mesurable), en prenant une suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions affines par morceaux, qui convergent ponctuellement, (toutes localement lipschitziennes), nous obtenons les convergences suivantes :
- $I_\gamma(\int_{\mathbb{R}^n} h_k d\gamma_n) \underset{k\to+\infty}{\to} I_\gamma(\gamma_n(A))$,
- $I_\gamma(h_k) \underset{k\to+\infty}{\to} 0$,
- $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla h_k| \, d\gamma_n \underset{k\to+\infty}{\to} \gamma_n^+(A)$,

qui procurent l'inégalité isopérimétrique, $\gamma_n^+(A) \geq I_\gamma(\gamma_n(A))$.

Bobkov, dans sa preuve de l'inégalité fonctionnelle, donne d'abord une autre inégalité isopérimétrique, sur le cube discret $\{-1, 1\}^n$: il montre que, pour tous $a, b \in [0, 1]$, on a

$$I_\gamma(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{2}(\sqrt{I_\gamma^2(a) + (\frac{b-a}{2})^2} + \sqrt{I_\gamma^2(b) + (\frac{b-a}{2})^2}).$$

Cette inégalité est en fait une formule intégrale sur le cube discret $\{-1, 1\}$ de dimension 1. Rappelons que, pour une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mesurable, $\int_{\mathbb{R}^n} g d\gamma_n = \mathbf{E}(g(X))$, pour X vecteur gaussien standard (de $\mathbb{R}^n$). A partir de cette inégalité, il approxime le vecteur gaussien standard par une somme (normalisée) de variables de Bernoulli :

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$, alors la suite de variables aléatoires $(\frac{\sum_{i=1}^k X_i}{\sqrt{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

La version gaussienne de l'inégalité isopérimétrique est ainsi obtenue.

L'inégalité de Bobkov peut également se démontrer en passant par le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck, que nous introduisons plus bas.

1.4 Méthode de semi-groupe

Présentons ici le point de vue fonctionnel utilisé pour démontrer l'inégalité isopérimétrique ; pour des raisons de simplicité, nous nous restreignons au cas gaussien, mais cette méthode peut être utilisée, avec quelques variations sur les objets introduits, pour toutes les mesures à densité log-concaves (voir plus bas).

On considère l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n, \gamma_n)$, et l'opérateur suivant, défini d'abord sur la classe $\mathcal{A}$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à croissance lente et dont toutes les dérivées (partielles) sont à croissance lente : $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est à croissance lente si elle est dominée par une fonction polynômiale, c'est-à-dire s'il existe des constantes $C, k > 0$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|g(x)| \leq C(1 + |x|^k)$.
La classe $\mathcal{A}$ contient les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, donc elle est dense dans L^2. Pour $f \in \mathcal{A}$, on définit

$$L(f) : x \mapsto \Delta f(x) - \langle x, \nabla f(x) \rangle .$$

L'opérateur L est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2 qui est elliptique, qui stabilise $\mathcal{A}$. On a la formule d'intégration par parties :

$$\text{Pour } f, g \in \mathcal{A},\ \int_{\mathbb{R}^n} (Lf) g d\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} f L g d\gamma_n = -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f . \nabla g d\gamma_n .$$

Introduisons maintenant le semigroupe d'Ornstein-Uhlenbeck.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et à croissance lente, alors d'après la théorie des opérateurs différentiels elliptiques, l'EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = L(F(t, x)),\ t > 0 \\ F(0, .) = f \end{cases}$$

admet une solution, que l'on note $P_t(f) = F(t, .)$, on écrit également $P_t(f) = e^{tL} f$.

Remarque : Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors l'équation est également vérifiée en $t = 0$.

Il se trouve que la présentation précédente n'est pas nécessaire (dans le cas gaussien) : il est en fait possible de définir explicitement le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck (en donnant une solution explicite de l'EDP). Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et à croissance lente, on définit

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-t} x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y) d\gamma_n(y).$$

En posant, selon les notations habituelles, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $c_t = e^{-t}$ et $s_t = \sqrt{1 - e^{-2t}}$, $(c_t^2 + s_t^2 = 1)$, on peut écrire $P_t f$ sous plusieurs formes :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ P_t f(x) = \mathbf{E}(f(c_t x + s_t Y)),$$

où Y est un vecteur gaussien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathbf{P})$. Une autre écriture est :

$$\forall t > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-\frac{|z - c_t x|^2}{2 s_t^2}} \frac{dz}{(2\pi s_t^2)^{\frac{n}{2}}} .$$

Les opérateurs P_t se prolongent en des opérateurs bornés sur $L^2(\gamma_n)$.

Enonçons certaines propriétés marquantes de (P_t) :

- Pour tout $t \geq 0$, P_t est un opérateur linéaire.
- (P_t) possède la propriété de semi-groupe : pour tous $s, t \geq 0$, $P_t \circ P_s = P_{t+s}$ et $P_0 = I$.
- Pour toute fonction de $L^2(\gamma_n)$, par convergence dominée, $P_t f \underset{t \to +\infty}{\to} \int f d\gamma_n$.
- P_t préserve les fonctions constantes : pour tout $t \geq 0$, $P_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.
  Remarque : Un ensemble d'opérateurs vérifiant les trois propriétés précédentes est appelé un semi-groupe markovien.
- $f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0$.
- La mesure γ_n est invariante par (P_t) : pour tout $f \in L^2(\gamma_n)$, $\int P_t f d\gamma_n = \int f d\gamma_n$.
- La mesure γ_n est réversible pour (P_t) : pour tous $f, g \in L^2(\gamma_n)$, $\int f P_t g d\gamma_n = \int g P_t f d\gamma_n$. C'est dire que P_t est un opérateur autoadjoint de $L^2(\gamma_n)$. La propriété précédente se déduit en fait de celle-ci.
- Pour tout $t \geq 0$, P_t est une contraction de $L^p(\gamma_n)$: pour tout $f \in L^p(\gamma_n)$, $\|P_t f\|_{L^p(\gamma_n)} \leq \|f\|_{L^p(\gamma_n)}$, et donc $\|P_t\|_{L^p(\gamma_n) \to L^p(\gamma_n)} = 1$.
- Pour tout $f \in L^2(\gamma_n)$, pour tout $t \geq 0$, $\nabla P_t f = e^{-t} P_t(\nabla f)$.

Pour une mesure à densité log-concave générale, $d\mu(x) = e^{-V(x)}dx$, telle qu'il existe des constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$ pour lesquelles, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $V(x) \geq \alpha + \beta |x|$, on peut définir un opérateur différentiel L_μ (du second ordre) ayant des propriétés similaires de la façon suivante, pour tout $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne :

$$L_\mu f = \Delta f - \langle \nabla V, \nabla f \rangle .$$

On obtient ainsi la même propriété d'intégration par parties dans $L^2(\mu)$ que plus haut dans $L^2(\gamma_n)$. On peut également définir un semi-groupe à partir de l'EDP associée à L_μ, semi-groupe qui est encore markovien, vérifie encore la propriété de réversibilité (et donc d'invariance), dont les éléments sont de norme 1 en tant qu'opérateurs de $L^p(\mu)$. En revanche, on n'a en général pas de formule explicite pour $P_t f$ (lorsque V n'est pas une forme quadratique), et pas de formule pour calculer $\nabla P_t f$.

Pour démontrer la forme fonctionnelle de Bobkov de l'inégalité isopérimétrique gaussienne, on définit, pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne, la fonction

$$\begin{aligned} Q(f) : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{I_\gamma^2(P_t f) + |\nabla P_t f|^2} d\gamma_n. \end{aligned}$$

Or, comme $P_0 f = f$ et $P_t f \underset{t\to+\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n$, on a :

$$Q(f)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{I_\gamma^2(f) + |\nabla f|^2} d\gamma_n \text{ et } Q(f)(t) \underset{t\to+\infty}{\to} I_\gamma(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n).$$

Il suffit de montrer ensuite que la fonction $Q(f)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ pour conclure.

2 Inégalités de Brunn-Minkowski et Prékopa-Leindler

2.1 Inégalité de Brunn-Minkowski pour la mesure de Lebesgue

Nous travaillons ici dans $\mathbb{R}^n$.

Pour $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, définissons la somme ensembliste (de Minkowski) de A et B par

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^n ; \exists (a, b) \in A \times B \ x = a + b\}$$

et, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda A = \{\lambda a ; a \in A\}.$$

La somme $A + B$ n'est pas un ensemble facile à décrire analytiquement, puisqu'un élément de $A + B$ peut admettre de nombreuses décompositions en somme d'un élément de A et d'un élément de B. Cependant, pour faciliter la représentation de cet ensemble, nous pouvons écrire

$$A + B = \bigcup_{a\in A} (a + B).$$

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$ et $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ on a

$$\beta(\frac{\alpha}{\beta} A) = \alpha A, \text{ et } \alpha A + \alpha B = \alpha(A + B),$$

mais en général, $(\alpha + \beta)A \subsetneq \alpha A + \beta A$.

De plus, la somme de Minkowski de deux ensembles n'est pas une opération très régulière, le fait que A et B soient boréliens n'entraîne pas que $A + B$ est borélien, cela dit, dans ce cas, $A + B$ est néanmoins Lebesgue-mesurable. En fait, la régularité intérieure de la mesure permet de se restreindre au cas où les ensembles sont compacts : le cas général s'obtient par limite, puisque pour toute partie A Lebesgue-mesurable

$$|A| = \mathrm{Sup}\{|K| ; K \subseteq A, \ K \text{ compact }\},$$

où l'on note ici la mesure de Lebesgue d'un ensemble A $|A|$

Nous supposerons pour simplifier les choses que A et B sont σ-compacts, ce qui entraîne que $A + B$ l'est aussi. Ces questions de mesurabilité seront laissées de côté par la suite.

Enonçons alors l'inégalité de Brunn-Minkowski pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$:

Théorème 2.1 *(Inégalité de Brunn-Minkowski)*
Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ non vides. On a :

$$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}.$$

En utilisant l'homogénéité du volume, on peut réécrire l'inégalité de Brunn-Minkowski sous la forme suivante, équivalente : pour tout $t \in [0,1]$ et tous $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ non vides,

$$|(1-t)A + tB|^{\frac{1}{n}} \geq (1-t)\,|A|^{\frac{1}{n}} + t\,|B|^{\frac{1}{n}}.$$

Ceci montre que la fonctionnelle $A \mapsto |A|^{\frac{1}{n}}$ est concave, c'est-à-dire que le volume est $\frac{1}{n}$-concave sur $\mathbb{R}^n$. On utilise ensuite l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+ \ \forall t \in [0,1], \ a^{1-t} b^t \leq (1-t)a + tb.$$

On en déduit une forme multiplicative de l'inégalité de Brunn-Minkowski :

Théorème 2.2 *(Inégalité de Brunn-Minkowski) Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ non vides et $t \in [0,1]$. On a :*

$$|(1-t)A + tB| \geq |A|^{1-t}\,|B|^t.$$

Remarques :
- Cette forme est "'adimensionnelle"', au sens où l'expression de l'inégalité ne dépend pas de la dimension.
- L'inégalité exprime que le volume est log-concave sur $\mathbb{R}^n$.

Cette forme de l'inégalité est également équivalente à la forme "'additive"' : il suffit de poser, pour $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ non vides, $t = \frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}}$, on a alors $1 - t = \frac{|A|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}}$, puis on applique la forme multiplicative de Brunn-Minkowski aux ensembles $\tilde{A} = \frac{1}{|A|^{\frac{1}{n}}} A$ et $\tilde{B} = \frac{1}{|B|^{\frac{1}{n}}} B$.

2.2 Inégalité de Prékopa-Leindler

L'inégalité de Prékopa-Leindler est une forme fonctionnelle de l'inégalité de Brunn-Minkowski, elle date des années 1970. A la base il s'agit d'une version réciproque de l'inégalité de Hölder, Prékopa la démontre d'abord pour $p = q = 2$ [13], puis Leindler la généralise à $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ [11] . En voici l'énoncé :

Théorème 2.3 *(Inégalité de Prékopa-Leindler)*
Soient $t \in [0,1]$ et $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ trois fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ h((1-t)x + ty) \geq f(x)^{1-t} g(y)^t \qquad (1)$$

Alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq (\int_{\mathbb{R}^n} f)^{1-t} (\int_{\mathbb{R}^n} g)^t.$$

L'inégalité de Brunn-Minkowski sous sa forme multiplicative peut se retrouver directement à partir de cette inégalité en l'applicant à $f = 1_A$, $g = 1_B$ et $h = 1_{(1-t)A+tB}$, fonctions d'indicatrices d'ensembles dans $\mathbb{R}^n$, avec A et B non vides, bien sûr.

Cette inégalité permet de généraliser en quelque sorte l'inégalité de Brunn-Minkowski à la classe composée des mesures sur $\mathbb{R}^n$ à densité log-concaves. Une fonction $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est dite log-concave si la fonction $log(\psi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est concave, c'est-à-dire si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\psi((1-t)x + ty) \geq \psi(x)^{1-t} \psi(y)^t.$$

C'est-à-dire que la fonction ψ est log-concave si et seulement s'il existe une fonction convexe $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $\psi = e^{-V}$.

Une mesure borélienne μ sur $\mathbb{R}^n$ est alors dite (à densité) log-concave si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et si $d\mu(x) = \psi(x)dx$, avec ψ une fonction log-concave. Par exemple, la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^n$ est une mesure log-concave.

Ainsi, en prenant μ log-concave, de densité ψ, pour toutes fonctions $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ vérifiant l'hypothèse du théorème, on peut appliquer l'inégalité de Prékopa-Leindler (pour la mesure de Lebesgue) aux fonctions $f\psi$, $g\psi$ et $h\psi$ (qui vérifient elles aussi l'hypothèse du théorème), et obtenir le résultat suivant.

Théorème 2.4 *(Inégalité de Prékopa-Leindler) Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$, à densité log-concave, soit $t \in]0,1[$ et soient $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ vérifiant la condition (1). Alors on a :*

$$\int h d\mu \geq (\int f d\mu)^{1-t} (\int g d\mu)^t.$$

En particulier, on a, pour tous $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ non vides

$$\mu((1-t)A + tB) \geq \mu(A)^{1-t} \mu(B)^t,$$

ce qui est l'inégalité de Brunn-Minkowski pour la mesure μ.

La démonstration de l'inégalité de Prékopa-Leindler peut se faire en passant par la dimension 1 : on démontre l'inégalité de Brunn-Minkowski dans $\mathbb{R}$, puis on applique l'inégalité démontrée les ensembles de niveau (dans $\mathbb{R}$) des fonctions f, g et h. On passe ensuite aux dimensions supérieures en remarquant que l'inégalité de Prékopa-Leindler se tensorise.

Une autre démonstration utilise quant à elle un outil appelé le transport monotone de mesure (on peut utiliser le transport dit de Brenier).

3 Stabilité des inégalités

La plupart des inégalités géométriques caractérisent des objets qui en réalisent les cas d'égalité. Il convient de se poser alors la question de la stabilité de ces inégalités : que se passe-t-il pour les objets qui ne réalisent pas forcément l'égalité, mais qui en sont proches ? De quelle manière diffèrent-ils des premiers ? On peut ainsi, en considérant ces problèmes, être amenés à se restreindre à une certaine classe d'objets (ensembles vérifiant certaines conditions de régularité, corps convexes...).

3.1 Exemple dans le plan

Un exemple est celui de l'inégalité isopérimétrique pour la mesure de Lebesgue dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Il s'agit d'un résultat de Bonnesen, notons E^2 l'ensemble des corps convexes de $\mathbb{R}^2$ (convexes compacts). Alors, on a le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Inégalités de Bonnesen Pour tout $K \in E^2$, soient $P(K)$ la mesure de bord de K, $A(K)$ son aire. Notons également $\rho^0(K)$ et $\rho_0(K)$ les rayons extérieur et intérieur d'un anneau de largeur minimal contenant ∂K, le bord de K, on a :*

$$P(K)^2 - 4\pi A(K) \geq 4\pi(\rho^0(K) - \rho_0(K))^2.$$

D'autre part, si l'on note respectivement $R(K)$ et $r(K)$ les rayons des cercles circonscrit et inscrit, on a :

$$P(K)^2 - 4\pi A(K) \geq \pi^2(R(K) - r(K))^2.$$

Il y a plusieurs façons de mesurer la déviation d'un ensemble par rapport aux minimiseurs, on peut par exemple utiliser la différence symétrique d'ensembles et prendre la quantité suivante comme référence :

$$\lambda_\mu(A) := \inf\{\mu(A\Delta B);\ \text{B est un ensemble extrémal pour l'inégalité isopérimétrique}\ \}$$

Notons également $\delta_\mu(A) = \mu^+(A) - I_\gamma(\gamma_n(A))$.

3.2 Quelques résultats récents et perspectives

Des progrès significatifs ont été réalisés ces dernières années au sujet de la stabilité. Dans le cas gaussien, Cianchi, Fusco, Maggi et Pratelli [9] ont réussi à contrôler cette quantité par la racine carrée de la différence isopérimétrique :

Théorème 3.2 *(i) Soit $n \geq 2$. Pour tout $r \in]0,1[$, il existe une constante strictement positive $C(n,r)$ dépendant seulement de n et r telle que, pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable et tel que $\gamma_n(A) = r$, on a :*

$$\lambda_{\gamma_n}(A) \leq C(n,r)\sqrt{\delta_{\gamma_n}(A)}.$$

(ii) Pour $n = 1$, pour tout $r \in]0,1[$, il existe une constante strictement positive $C(r)$ dépendant seulement de r telle que, pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ mesurable et tel que $\gamma_1(A) = r$, on a :

$$\lambda_{\gamma_1}(A)\sqrt{log(\frac{1}{\lambda_{\gamma_1}(A)})} \leq C(r)\delta_{\gamma_1}(A)$$

De plus, ces résultats sont optimaux, au sens où la dépendance de la déviation gaussienne en fonction de la différence isopérimétrique ne peut pas être remplacée par des fonctions plus proches.

Leur démonstration utilise des estimations analytiques de la distribution gaussienne, la formule de la co-aire dans $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'une technique de symétrisation qu'ils introduisent, et qui leur sert à se ramener à ne considérer que des ensembles particuliers (symétriques par rapport à $n-1$ hyperplans mutuellement orthogonaux).

La dépendance en la dimension de la constante $C(n,r)$ du précédent théorème est polynômiale, or on sait que la fonction isopérimétrique est 'adimensionnelle', au sens où son expression ne dépend pas de la dimension de l'espace ambiant. Partant de ce constat, Mossel et Neeman [12] ont récemment publié un résultat de stabilité dans l'inégalité isopérimétrique gaussienne qui est indépendant de la dimension :

Théorème 3.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante numérique C telle que pour tout ensemble mesurable $A \subseteq \mathbb{R}^n$, on a :*

$$\lambda_{\gamma_n(A)} \leq C\frac{1}{log^{\frac{1}{6}}(\frac{1}{\delta_{\gamma_n(A)}})}.$$

On constate cependant que la dépendance en δ dans l'inégalité obtenue est loin d'être optimale.

Leur démonstration, à l'opposé de Cianchi et al., repose entièrement sur l'approche fonctionnelle, notamment l'inégalité de Bobkov.

Ces résultats peuvent encore être améliorés : l'approche fonctionnelle n'a pas encore porté ses fruits, la dépendance dans l'inégalité isopérimétrique robuste semble ne pas être optimale. Peut-être peut-on, pour en arriver à ce résultat, travailler sur la deuxième forme de l'inégalité de Bobkov dont la preuve par semi-groupe est plus simple. Un autre objectif actuellement est de développer des versions quantitatives de l'inégalité de Brunn-Minkowski par l'approche semi-groupe. Certains progrès récents ont déjà été réalisés sur l'inégalité de Prékopa-Leindler (forme fonctionnelle de Brunn-Minkowski) par Ball et Boroczky [1, 2], mais en dimension 1, ou avec un résultat partiel en dimension quelconque, en utilisant le transport de mesures. Il est tentant de chercher une preuve de la stabilité reposant sur la preuve par semi-groupe initiée par Borell [7].

Références

[1] K. M. Ball and K. J. Böröczky. Stability of the Prékopa-Leindler inequality. *Mathematika*, 56(2) :339–356, 2010.

[2] K. M. Ball and K. J. Böröczky. Stability of some versions of the Prékopa-Leindler inequality. *Monatsh. Math.*, 163(1) :1–14, 2011.

[3] F. Barthe and B. Maurey Some remarks on isoperimetry of Gaussian type. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 36(4) :419–434, 2000.

[4] D. Bakry and M. Ledoux Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator. *Invent. Math.* 123(2) :259–281, 1996.

[5] S. G. Bobkov An isoperimetric inequality on the discrete cube, and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space. *Ann. Probab.* 25(1) :206–214, 1997.

[6] S. G. Bobkov Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures. *Ann. Prob.*, 27(4) :1903–1921, 1999.

[7] C. Borell Diffusion equations and geometric inequalities. *Potential Anal.* 12(1) :49–71, 2000.

[8] C. Borell The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space. *Invent. Math.*, 30(2) :207–216, 1975.

[9] A. Cianchi, N. Fusco, F. Maggi, and A. Pratelli. On the isoperimetric deficit in Gauss space. *Amer. J. Math.*, 133(1) :131–186, 2011.

[10] A. Ehrhard. Symétrisation dans l'espace de Gauss. *Math. Scand.*, 53 :281–301, 1983.

[11] L. Leindler On a certain converse of Hölder's inequality. II. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 33(3-4) :217–223, 1972.

[12] E Mossel and J. Neeman. Robust dimension free isoperimetry in Gaussian space, arXiv :1202.4124v1.

[13] A. Prékopa Logarithmic concave measures with application to stochastic programming. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 34 :335–343, 1973.

[14] V. N. Sudakov and B. Tsirel'son Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures. *J. of Math. Sci.*, 32 :301–316, 1971.