Ecole Normale Superieure
Florent Bekerman

Introduction au Domaine de Recherche

Modèles d'actifs avec des sauts

Paris, le 7 novembre 2012

Table des matières

Introduction

La modélisation en mathématiques financières a été introduite avec les travaux de Louis Bachelier dans sa thèse *Théorie de la spéculation* en 1900. La problématique principale est d'étudier la valorisations d'options : on considère un sous-jacent et une fonction du cours du sous-jacent - le payoff - qui va être délivrée par un vendeur à une certaine échéance. Quel est le juste prix que doit payer l'acheteur de cette option aujourd'hui pour pouvoir bénéficier du payoff à l'échéance ? La branche des mathématiques financières a connu un véritable essor dans les années 1970 lors de l'introduction du calcul stochastique, notamment avec l'introduction du modèle de Black Sholes et Merton en 1973. Ce modèle sert encore de référence aujourd'hui lorsqu'on considère que le cours du sous-jacent suit une dynamique continue. La présence de certaines variations brusques du cours de sous-jacents, induites généralement par des événements macroéconomiques importants, a conduit Merton à étudier les modèles à sauts dans son article *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous.* Nous nous intéressons ici à la valorisation d'options lorsque le sous-jacent effectue des sauts et nous fournirons dans un premier temps le cadre théorique qui nous permettra de mener cette étude.

1 Nuages aléatoires Poissonniens

1.1 Définitions

On considère un espace mesurable (E,$\mathcal{E}$) régulier, i.e isomorphe à $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note $S_E = \{\pi \subset E \;,\; \pi \textit{ dénombrable}\}$ l'ensemble des nuages de points. On munit S_E de la tribu engendrée par les applications de comptage $N_B : \pi \mapsto \#(\pi \cap B)$, $B \in \mathcal{E}$. On considère ensuite un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un nuage aléatoire de points est alors une variable aléatoire de Ω dans S_E.

Définition 1.1.1 *On définit alors la mesure d'intensité μ sur (E,$\mathcal{E}$) d'un nuage aléatoire de points Π par*

$$\forall B \in \mathcal{E} \;,\; \mu(B) = \mathbb{E}(N_B(\Pi))$$

Définition 1.1.2 *On définit également, pour f :E $\to [0;\infty]$ mesurable, la fonction de comptage généralisée $N_f : S_E \to [0;\infty]$ par*

$$N_f(\pi) = \sum_{x\in\pi} f(x)$$

On vérifie que cette application est bien mesurable et on a, pour un nuage aléatoire de points Π d'intensité μ, $\mathbb{E}(N_f(\Pi)) = \int f(x)\mu(dx)$

Définition 1.1.3 *Un nuage aléatoire de points Π est dit Poissonnien si $\forall A_1, \ldots, A_n$ deux à deux disjoints dans $\mathcal{E}$, $N_{A_1}(\Pi), \ldots, N_{A_n}(\Pi)$ sont des variables de Poisson indépendantes. La loi d'un nuage aléatoire Poissonnien est alors entièrement déterminée par sa mesure d'intensité.*

1.2 Quelques formules

Théorème 1.2.1 ***Formule de Palm*** *On considère $\Pi : \Omega \to S_E$ un nuage Poissonnien d'intensité μ sigma finie, $(E_0,\mathcal{E}_0)$ un espace mesurable et une variable aléatoire $Z : \Omega \to E_0$ indépendante de Π. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $F : E_0 \times E^n \times S_E \to [0;\infty]$ on introduit :*

$$\Phi_F^{(n)}(Z,\Pi) = \sum_{\substack{X_1 \dots X_n \in \Pi \\ distincts}} F(Z, X_1, \dots, X_n, \Pi \backslash \{X_1, \dots, X_n\})$$

Alors $\Phi_F^{(n)}(Z,\Pi)$ est $\mathcal{F}$ mesurable et

$$\mathbb{E}(\Phi_F^{(n)}(Z,\Pi)) = \int_{E^n} \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n) \mathbb{E}(F(Z, x_1, \dots, x_n, \Pi))$$

Théorème 1.2.2 ***Formule Exponentielle*** *Soit $\Pi : \Omega \to S_E$ un nuage Poissonnien d'intensité μ sigma finie et $f : E \to [0;\infty]$ une application mesurable. On a*

$$\mathbb{E}(exp(-N_f(\Pi))) = exp\left(-\int_E \mu(dx)(1 - exp(-f(x))\right)$$

Proposition 1.2.3 *Soit $\Pi : \Omega \to S_E$ un nuage Poissonnien d'intensité μ sigma finie et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. Alors*

- *Si $\int 1 \wedge f(x)\mu(dx) < \infty$ alors $\sum_{x\in\Pi} f(x) < \infty$ p.s*
- *Si $\int 1 \wedge f(x)\mu(dx) = \infty$ alors $\sum_{x\in\Pi} f(x) = \infty$ p.s*

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application mesurable. On peut alors définir N_f dès que $\int 1 \wedge |f|(x)\mu(dx) < \infty$. On peut alors étendre la formule exponentielle à cette forme :

Théorème 1.2.4 ***Formule Exponentielle*** *Soit $\Pi : \Omega \to S_E$ un nuage Poissonnien d'intensité μ sigma finie et $f : E \to \mathbb{R}$ une application mesurable vérifiant la condition précédente. On a*

$$\mathbb{E}(exp(iN_f(\Pi))) = exp\left(-\int_E \mu(dx)(1 - exp(if(x))\right)$$

Remarque 1 *Avec les hypothèses précédentes, et en supposant $\int |f|(x)\mu(dx) < \infty$ on a $\mathbb{E}(N_f(\Pi)) = \int f(x)\mu(dx)$. Si de plus $\int f^2(x)\mu(dx) < \infty$ alors $Var(N_f(\Pi)) = \int f^2(x)\mu(dx)$. Ces deux résultats découlent trivialement de la formule de Palm en écrivant $f = f^+ - f^-$.*

Proposition 1.2.5 *Soit $\Pi : \Omega \to S_E$ un nuage Poissonnien d'intensité μ sigma finie et $f : E \to \mathbb{R}$ une application mesurable telle que $\int 1 \wedge |f|(x)\mu(dx) = \infty$. On a vu que $N_f(\Pi) = \infty$ p.s . Si on suppose $\int f^2(x)\mu(dx) < \infty$ il est cependant possible de construire une somme compensée qui est une variable centrée dans $\mathbb{L}^2$ et que l'on notera $\tilde{N}_f(\Pi)$.*

La construction est la suivante : il existe une partition $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout i on ait $\mu(E_i) < \infty$. Les quantités $\sum_{x\in\Pi\cap E_i} f(x)$ sont bien finies p.s et les variables $N_f(\Pi\cap E_i) - \int_{E_i} f(x)\mu(dx)$ sont des variables dans $\mathbb{L}^2$ et indépendantes. De plus l'hypothèse d'intégrabilité de f garantit, par la Remarque 1, que $\sum_i \mathbb{E}\left(N_f(\Pi\cap E_i) - \int_{E_i} f(x)\mu(dx)\right)^2 < \infty$. On définit alors $\tilde{N}_f(\Pi)$ comme la limite dans $\mathbb{L}^2$ de la somme (qui ne dépend pas de la partition choisie). La convergence a également lieu p.s .

2 Processus de Lévy

On définit maintenant les processus de Lévy qui sont les processus à sauts habituellement utilisés en modélisation en mathématiques financières.

2.1 Définitions et Propriétés

On se fixe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un processus de Lévy lorsque :

1. $X_0 = 0$
2. $\forall s,t\ X_{t+s} - X_t \perp \sigma(X_u, u\leq t)$
3. $\forall s,t\ X_{t+s} - X_t$ a la même loi que X_s

Un processus de Lévy est un processus de Markov homogène et son semi-groupe associé est un semi-groupe de convolution. On montre que ce semi-groupe admet la propriété de Feller et donc que les processus de Lévy admettent des modifications càdlàg (continues à droite avec limite à gauche). Ils vérifient de plus la propriété de Markov forte.

Théorème 2.1.1 ***Formule de Lévy-Khintchine*** *Soit X un processus de Lévy à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $\psi_X : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ telle que, pour tout u dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(exp(iu.X_t)) = exp(-t\psi_X(u))$. On a alors*

$$\forall u\in\mathbb{R}\quad \psi_X(u) = \frac{1}{2}\sigma u^2 - iu.b + \int_{\mathbb{R}} \left(1 - exp(iu.x) + iu.x\mathbf{1}_{|x|\leq 1}\pi(dx)\right)$$

Où $\sigma\in\mathbb{R}_+, b\in\mathbb{R}$, π est une mesure sur $\mathbb{R}$ ne chargeant pas 0 vérifiant $\int_{\mathbb{R}} 1\wedge x^2\pi(dx) < \infty$.

Étant donné un processus de Lévy X, on note $\Delta(X_t) = X_t - X_{t^-}$ le saut de X en t. On montre que $\Pi = \{(t,\Delta(X_t)), t\in\mathbb{R}_+\}$ est un nuage Poissonien sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ d'intensité $m = dl\otimes\pi$ où l est la mesure de Lebesgue et π vérifie $\int_{\mathbb{R}} 1\wedge x^2\pi(dx) < \infty$.

Théorème 2.1.2 ***Décomposition de Lévy-Itô*** *Soit X un processus de Lévy réel. Alors il existe $\sigma \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}, B$ un $(F_t)_{t\geq 0}$ mouvement Brownien tels que*

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$$

Avec

1. *$X^{(1)}$ mouvement Brownien avec drift : pour tout $t \geq 0$ $X_t^{(1)} = \sigma B_t + b$*
2. *$X^{(2)}$ processus de poisson composé : pour tout $t \geq 0$ $X_t^{(2)} = \sum_{(s,x)\in\Pi\cap([0;t]\times\{|x|\geq 1\})} x$*
3. *$X^{(3)}$ somme de Poisson compensée associée au nuage de points correspondant aux sauts de valeur absolue plus petite que 1.*
4. *$X^{(1)}$, $X^{(2)}$ et $X^{(3)}$ sont indépendants.*

On retrouve alors, grâce aux formules exponentielles, la formule de Lévy-Khintchine.

2.2 Éléments de Calcul Stochastique

A partir de la décomposition de Lévy-Itô, il est possible de définir l'intégrale stochastique de certains processus par rapport à un processus de Lévy. Nous ne détaillerons pas la classe de processus pour laquelle une telle intégrale est définie mais cette classe contient les processus adaptés, continus à gauche bornés.

On dispose alors d'une formule d'Itô pour les processus de Lévy :

Théorème 2.2.1 ***Formule d'Itô*** *Soit X un processus de Lévy admettant la décomposition précédemment énoncée.Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On a :*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\sigma^2 ds + \sum_{s\leq t} (\Delta(F(X_s)) - F'(X_{s-})\Delta(X_s))$$

Où la somme est absolument convergente. Ce théorème permet la résolution d'un certain type d'équations différentielles stochastiques très utilisées en modélisation financière que nous énonçons maintenant.

Théorème 2.2.2 ***Exponentielle de Doléans-Dade*** *Soit X un processus de Lévy admettant la décomposition précédemment énoncée. Etant donné $z_0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique processus cadlag adapté satisfaisant à l'équation*

$$\begin{cases} dZ_t = Z_{t-}dX_t \\ Z_0 = z_0 \end{cases}$$

De plus Z est donné par

$$Z_t = z_0 exp(X_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\prod_{s\leq t}(1 + \Delta(X_s))exp(-\Delta(X_s))$$

3 Application à la couverture d'options

On considère un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et un processus de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$X_t = \sigma B_t + \mu t + \sum_{1\leq n\leq N_t} U_n$$

Où B est un mouvement Brownien, N est un processus de Poisson de paramètre θ indépendant de B et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d de loi ν à support dans $]-1;\infty]$ indépendantes du reste. X est bien du type précédent. On note $(F_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par X, Y la partie processus de Poisson composé , $n_1 = \mathbb{E}(U_1)$ et $n_2 = \mathbb{E}(U_1^2)$.

On considère un actif sans risque S^0 et un actif risqué S donnés par

$$\begin{cases} dS_t = S_{t-}dX_t \\ S_t^0 = exp(rt) \end{cases}$$

Où r représente le taux sans risque. S_0 représente l'évolution d'un investissement initial unitaire. Un acteur investit au temps t H_t^0 dans l'actif non risqué et H_t dans l'actif risqué. On suppose que les deux processus sont $(F_t)_{t\geq 0}$ adaptés, continus à gauche (donc prévisibles) et bornés. Ils satisfont donc à de bonnes propriétés d'intégrations par rapport aux processus de Lévy. A noter ici que l'intégrale n'a pas besoin d'être redéfinie car on intègre uniquement par rapport à un mouvement Brownien et un processus à variations bornées. La valeur de notre portefeuille au temps t est donnée par :

$$V_t = H_t^0 exp(rt) + H_t S_t$$

La stratégie est de plus dite autofinancée si on a

$$V_t = V_0 + \int_0^t rexp(rs)H_s^0 ds + \int_0^t H_s dS_s$$

On pose alors

$$\begin{cases} \tilde{V}_t = exp(-rt)V_t \\ \tilde{S}_t = exp(-rt)S_t \\ \tilde{Y}_t = Y_t - \theta n_1 t \end{cases}$$

On remarque que Y est une $(F_t)_{t\geq 0}$ martingale et, par la formule exponentielle, lorsque $\mu - r + \theta n_1 = 0$, $\tilde{S}$ est également une martingale.

De plus, après calcul

$$d\tilde{V}_t = H_t d\tilde{S}_t = H_t \tilde{S}_{t-} d\tilde{Y}_t + \sigma \tilde{S}_t dB_t$$

On vérifie, en passant par les sommes de Riemann, que les intégrales stochastiques de processus continus à gauches adaptés et bornés par rapport à des sommes de poissons compensées sont des martingales. $\tilde{V}$ est donc également une $(F_t)_{t\geq 0}$ martingale.

Maintenant que l'on a déterminé la dynamique des différents processus entrant en jeu, on peut calculer le prix d'un call ainsi que le défaut de couverture lorsque le sous-jacent comporte des sauts.

Un call sur le sous-jacent S, de Strike K et de maturité T est une option qui délivre à l'acheteur de l'option la quantité $f(S_T) = (S_T - K)_+$ en T. Le vendeur de l'option cherche alors à se couvrir en investissant dans un portefeuille $(V_t)_{t\geq 0}$ constitué d'actifs sans risque et d'actifs risqués. La prime, ou le prix que doit payer l'acheteur pour pouvoir bénéficier de l'option, correspond à la valeur initiale du portefeuille. Le vendeur cherche alors à minimiser la quantité $\mathbb{E}((f(S_T) - V_T)^2)$ i.e. il minimise le risque $R = \mathbb{E}((exp(-rT)f(S_T) - \tilde{V}_T)^2)$.

On note $C = \mathbb{E}(exp(-rT)f(S_T))$. Comme $\tilde{V}$ est une martingale, $\mathbb{E}(\tilde{V}_T) = V_0$ et on a donc :

$$R = (C - V_0)^2 + \mathbb{E}(exp(-rT)f(S_T) - C + \tilde{V}_T - V_0)$$

De plus, la quantité $\tilde{V}_T - V_0$ dépend uniquement de la stratégie de l'investisseur et pas de la valeur initiale du portefeuille (c'est une intégrale stochastique par rapport à $\tilde{S}$). Le risque est donc minimisé pour $V_0 = C = \mathbb{E}(exp(-rT)f(S_T))$. De même, le prix en t P_t est donné par

$$\begin{cases} P_t = \mathbb{E}(exp(-r(T-t))f(S_T)|F_t) \\ \tilde{P}_t = exp(-rt)P_t = \mathbb{E}(exp(-rT)f(S_T)|F_t) \\ \quad = G(t, \tilde{S}_t) \end{cases}$$

Avec

$$G(t,x) = \mathbb{E}\left(exp(-rT)f(x\ exp(rT)exp(-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t))exp(\sigma B_{T-t} \prod_{1\leq n\leq N_{T-t}} (1+U_n)) \right).$$

On montre que G est une fonction C^∞. Par la formule d'Itô (que l'on peut étendre a notre application) on a

$$\begin{aligned} \tilde{P}_t = P_0 + \int_0^t \partial_s G(s,\tilde{S}_s)ds + \int_0^t \partial_x G(s,\tilde{S}_s)\tilde{S}_s\sigma dBs + \int_0^t \partial^2_{x^2} G(s,\tilde{S}_s)\tilde{S}_s\sigma^2 ds \\ -\theta n_1 \int_0^t \partial_x G(s,\tilde{S}_s)\tilde{S}_s ds + \sum_{s\leq t} G(s,\tilde{S}_{s-}(1+U)) - G(s,\tilde{S}_{s-}) \end{aligned}$$

Les termes en $\partial_x G(s,\tilde{S}_{s-})\Delta(\tilde{S}_s)$ se compensent.

D'autre part :

$$\tilde{V}_t = V_0 - \theta n_1 \int_0^t H_s \tilde{S}_s ds + \int_0^t H_s \tilde{S}_s \sigma dBs + \sum_{s\leq t} H_s \tilde{S}_{s-} U$$

On pose :

$$\begin{cases} L_t = \displaystyle\int_0^t (\partial_x G(s,\tilde{S}_s) - H_s)\tilde{S}_s \sigma dBs \\ K_t = \displaystyle\sum_{s\leq t} G(s,\tilde{S}_{s-}(1+U)) - G(s,\tilde{S}_{s-}) - H_s\tilde{S}_{s-}U \\ C_t = \theta \displaystyle\int_0^t ds \int \nu(du) G(s,\tilde{S}_s(1+u)) - G(s,\tilde{S}_s) - H_s\tilde{S}_s u \end{cases}$$

On obtient :

$$\tilde{P}_t - \tilde{V}_t = P_0 - V_0 + L_t + K_t - C_t + \int_0^t Z_s ds$$

L est clairement une martingale. On a par ailleurs vu que l'intégrale stochastique d'un processus prévisible borné par rapport à une somme de Poisson compensée était était également une martingale. $K - C$ est donc une martingale. On en déduit $Z \equiv 0$

Nous avons les égalités suivantes :

$$\mathbb{E}(L_T^2) = \mathbb{E}\left(\int_0^T (\partial_x G(s,\tilde{S}_s) - H_s)^2 \tilde{S}_s^2 \sigma^2 ds\right)$$
$$\mathbb{E}((K_T - C_T)^2) = \mathbb{E}\left(\theta \int_0^T ds \int \nu(du)(G(s,\tilde{S}_s(1+u)) - G(s,\tilde{S}_s) - H_s\tilde{S}_s u)^2\right)$$
$$\mathbb{E}(L_T(K_T - C_T)) = 0$$

On a alors :

$$\begin{aligned} R &= \mathbb{E}((L_T + (K_T - C_T))^2) \\ &= \int_0^t ds \mathbb{E}\left((\partial_x G(s,\tilde{S}_s) - H_s)^2 \tilde{S}_s^2 \sigma^2 + \theta \int \nu(du)(G(s,\tilde{S}_s(1+u)) - G(s,\tilde{S}_s) - H_s\tilde{S}_s u)^2\right) \end{aligned}$$

Minimiser le risque revient à minimiser le terme intégré par rapport à ds. En dérivant, on voit que le processus H défini par

$$H_s = \frac{1}{\sigma^2 + \theta n_2}\left(\sigma^2 \partial_x G(s,\tilde{S}_{s-}) + \theta \int \nu(du) u \frac{(G(s,\tilde{S}_{s-}(1+u)) - G(s,\tilde{S}_{s-}))}{\tilde{S}_{s-}}\right)$$

est continu à gauche et minimise le risque. Il définit alors la stratégie de couverture optimale.

Références

[1] R. Cont and P. Tankov. *Financial Modelling with Jump Processes.* Chapman and Hall, 2004.

[2] H. Föllmer. *Calcul d'Itô sans Probabilités.* 1981.

[3] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* North Holland, 1981.

[4] J.F.C Kingman. *Poisson Processes.* Oxford Studies in Probability, 1993.

[5] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance.* Ellipses, 2000.