Introduction à un domaine de recherche : Estimations de Strichartz et résonances en espace-temps pour des équations dispersives : le cas particulier de l'équation de Schrödinger avec une nonlinéarité quadratique en dimension 3.

Nicolas Laillet

encadré par Pierre Germain

Table des matières

Motivations

L'étude de phénomènes dispersifs est intimement liée avec celle des ondes de surface et de la mécanique des fluides : une vague doit, par nature physique, s'« affaisser » au cours du temps [1]. De manière plus générale, une équation présentant des solutions ondulatoires doit d'une manière ou d'une autre avoir des solutions présentant une décroissance en temps.

Très utile lorsqu'il s'agit de prouver des théorèmes d'existence pour certaines EDP nonlinéaires, les effets dispersifs ont d'abord été étudiés dans des EDP de type « ondes » ou « Schrödinger » (citons le travail de Strichartz [Str77] qui a révolutionné l'étude des EDP dispersives) ou Korteweg-de Vries (dans [KPV93] ou [CM78] par exemple).

Le but de cette introduction est de présenter la notion de dispersion et les arguments permettant de prouver l'existence locale de solutions pour certaines EDP. On remarquera déjà que si la méthode permet d'obtenir de manière systématique des théorèmes d'existence locale – sous réserve d'hypothèses de régularité –, l'existence globale ne sera assurée que dans certains cas bien précis. Cependant ces méthodes, très à la mode, ont encore de beaux jours devant elles puisqu'elles s'introduisent dans de plus en plus d'équations de la mécanique des fluides ([CDGG06]).

1. Pas nécessairement diront les spécialistes des solitons, dont un des exemples les plus célèbres est le mascaret, cette vague qui semble ne pas subir l'effet de la dispersion. Mais ceci est une autre histoire.

Afin de pallier les lacunes que nous avons exposées, on présentera enfin une méthode développée dans [GMS09b] et [GMS09a] : les résonances en espace et en temps. Partant de principes physiques très simples, elle permet d'établir de très beaux résultats d'existence globale, même en supposant peu de régularité sur la condition initiale.

1 Principes de base

1.1 Introduction

Nous étudierons des Équations aux Dérivées Partielles nonlinéaires, donc de la forme

$$\mathcal{D}u = N(u), \tag{1}$$

avec $\mathcal{D}$ un opérateur différentiel, et N un terme non linéaire à préciser. Le plus souvent, les équations étudiées dans ce cadre prennent la forme.

$$\partial_t^\alpha u - Lu = N(u), \tag{2}$$

où
- $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to H$ avec H espace de Hilbert (le plus souvent un $\mathbb{R}^n$),
- $\alpha \in \mathbb{N}$,
- L est un opérateur anti-adjoint sur H,
- N une nonlinéarité à préciser.

Ainsi, si $\alpha = 1$ et $L = i\Delta$, on obtient une équation de type *Schrödinger*.
De même, si $\alpha = 2$ et $L = \Delta$, on obtient l'*équation des ondes* non linéaire.
Pour qualifier une telle EDP de *dispersive* il faut regarder l'équation homogène (ou libre), c'est-à-dire sans la nonlinéarité : le phénomène de dispersion se comprend en étudiant les *solutions ondulatoires* de l'équation libre.

Définition 1.1 *(Solutions ondulatoires, équations dispersives)*

1. *Une solution d'une EDP (sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$) est dite* ondulatoire *s'il existe ξ et ω tels que $Ae^{i(x\cdot\xi+\omega t)}$ est solution de l'équation.*
2. *Une EDP linéaire est dite* dispersive *s'il existe $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, non linéaire en ξ, telle que ses solutions ondulatoires sont de la forme $e^{i(x\cdot\xi+h(\xi)t)}$.*
3. *L'égalité $\omega = h(\xi)$ est appelée* relation de dispersion.

On peut alors réécrire l'équation $\partial_t^\alpha u = Lu$ comme $\partial_t^\alpha u = ih(D)u$, où D est un *multiplicateur de Fourier* : si $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire $\hat{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ désigne la transformée de Fourier en espace de f

$$\mathcal{F}(f)(t,\xi) = \hat{f}(t,\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(t,x)dx,$$

et $\mathcal{F}^{-1}$ la transformée de Fourier inverse, alors $h(D)u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(h(.)\mathcal{F}(u)(t,.))(x)$.

Interprétation physique. Le phénomène de dispersion s'interprète facilement en introduisant la notion de vitesse de groupe d'un paquet d'onde.

Définition 1.2 *Un* paquet d'onde *centré autour de la fréquence ξ_0 avec une relation de dispersion $h(\xi)$ est une fonction de $x \in \mathbb{R}^3$ et $t \in \mathbb{R}$ définie de la manière suivante*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} A(\xi) e^{i(x\cdot\xi+h(\xi)t)} d\xi.$$

A est une fonction d'amplitude centrée en ξ_0 (au moins de maximum ξ_0), à support compact ou décroissant au moins exponentiellement à l'infini.

Un paquet d'ondes est donc une superposition continues d'ondes, avec des contributions significatives centrées autour d'une fréquence ξ_0. Toutes les ondes d'un paquet d'ondes se déplacent donc à des vitesses proches : cela nous permet de définir, par un simple développement de Taylor, la notion de vitesse de groupe.

Définition 1.3 *La* vitesse de groupe $v_g(u)$ *d'un paquet d'ondes u centré autour de la fréquence ξ_0 avec une relation de dispersion $h(\xi)$ est définie par*

$$v_g(u) := \nabla_\xi h(\xi_0).$$

Groupe continu lié à une équation dispersive du premier ordre. Considérons une équation dispersive du premier ordre en temps de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u - Lu = 0, \\ u_0 \text{ fixé}, \end{cases} \tag{3}$$

qui se réécrit, en prenant la transformée de Fourier en espace,

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u} - ih(\xi)\widehat{u} = 0, \\ \widehat{u_0} \text{ fixé}. \end{cases} \tag{4}$$

Faisons fi des problèmes de régularité : la solution de l'équation s'écrit $\widehat{u}(t,x) = e^{ih(\xi)t}u_0$. On définit alors le *groupe lié à l'équation dispersive*, et on écrit e^{tL} l'opérateur défini sur les distributions tempérées par

$$e^{tL}u_0(x) := \mathcal{F}^{-1}\left(e^{ith(\xi)}\widehat{u_0}(\xi)\right). \tag{5}$$

C'est de l'étude de ce type d'opérateur que viennent les résultats dits « de dispersion » exposés dans le chapitre suivant.

Quelques exemples d'équations dispersives. Les exemples sont nombreux, nous n'en citerons que quelques uns.

1. L'équation de Schrödinger.
$$\partial_t u + i\Delta u = N(u), \tag{6}$$
avec $N(u) = iu|u|^{p-1}$ (cas hamiltonien) par exemple : d'autres nonlinéarités, dites non-hamiltoniennes, seront mentionnées dans les sections suivantes. C'est une des équations pour lesquelles on a le plus de résultats. Le groupe d'opérateurs lié à l'équation est $(e^{-it\Delta})_{t\in\mathbb{R}}$. La relation de dispersion est $h(\xi) = -|\xi|^2$: cela signifie qu'un paquet d'ondes à la fréquence ξ_0 se déplacera à la vitesse $-2\xi_0$.
2. L'équation d'Airy dont la partie homogène (ou libre) est la suivante.
$$\partial_t u + \partial_{xxx} u = 0. \tag{7}$$
L'équation est très similaire à l'équation de Schrödinger, mis à part que la relation de dispersion est maintenant $h(\xi) = \xi^3$. Le groupe lié à l'équation est, d'un point de vue fréquentiel, $e^{-it\xi^3}$. Ceci implique que la vitesse de groupe est égale à $-2\xi^2$: on s'attend à ce que cette équation ait un effet régularisant plus important que l'équation de Schrödinger (les hautes fréquences vont plus vite à l'infini).
3. L'équation des ondes.
$$-\partial_t^2 u + \Delta u = N(u). \tag{8}$$
Pour $N = 0$, il y a deux relations de dispersion, $h(\xi) = \pm|\xi|$. Si N est linéaire, on obtient l'équation de Klein-Gordon. On connaît aussi plusieurs résultats sur l'équation de Klein-Gordon : pour plus de précisions, on pourra regarder [GV85a] et [GV85b] ou bien [Ger10] pour des résultats plus récentes.
4. Des équations dérivées de Navier-Stokes, comme celle des ondes de Rossby.
$$\begin{cases} \partial_t + u \cdot \nabla u - \nu\Delta u + \frac{e^3 \wedge u}{\varepsilon} + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases} \tag{9}$$
où $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, et où e^3 est le vecteur correspondant à la coordonnée x_3. Ce type d'équation sert à modéliser un fluide en rotation, soumis par exemple à la force de Coriolis. Comme on le verra dans les parties suivantes, l'étude des effets dispersifs dans ce type d'équations se développe de plus en plus ([CDGG02], [CDGG06]).

1.2 Stratégie de démonstration

Avant même de parler de stratégie pour établir l'existence ou l'unicité de solutions, il convient de préciser ce qu'on entend par solution. Nous nous centrerons sur le cas simple d'une équation du type (2) [2]. La bonne notion de solution sera donnée par la *formule de Duhamel*.

Définition 1.4 *Une solution (au sens de la formule de Duhamel) de (2) avec* $\alpha = 1$ *est une fonction* $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$*, continue en temps (*i.e. *en la première variable)* [3] *vérifiant*

$$u(t,x) = e^{itL}u_0 + \int_0^t e^{i(t-s)L}N(u)(s,x)ds. \tag{10}$$

On définit donc naturellement un opérateur $\mathcal{T}u := e^{itL}u_0 + \int_0^t e^{i(t-s)L}N(u)(s,x)ds$. Il est alors possible d'établir un théorème d'existence et d'unicité en montrant simplement que $\mathcal{T}$ admet un unique point fixe. Il faut donc montrer une propriété de contraction de $\mathcal{T}$, en précisant plusieurs points essentiels :

1. Dans quel espace fonctionnel doit-on établir le théorème de point fixe ? Généralement on se place dans un espace ayant une signification physique, comme L^2 ou encore l'*espace de Sobolev* H^s, qu'on définit par la norme suivante

   $$\|f\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2s}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

   où $\langle x\rangle := \sqrt{1+|x|^2}$.
   (cela signifie qu'une fonction dans H^s a s dérivées dans L^2, pour peu que cela ait un sens). On notera de même $\dot{H}^s$ l'espace de Sobolev défini par la norme suivante : $f \in \dot{H}^s$ si, et seulement si

   $$\|f\|_{\dot{H}^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

   Remarquons enfin que nous devrons parfois travailler dans d'autres normes, notamment des normes L^2 à poids, du type $\|\langle x\rangle \cdot\|_{L^2}$. Une fonction avec une telle norme finie est en quelque sorte localisée autour de l'origine.
2. Dans quel espace fonctionnel doit être la condition initiale ?
3. Sur quel intervalle de temps peut-on établir ce théorème de point fixe ?

Cette dernière question est la grande différence entre les deux méthodes qui seront présentées : la première utilise des espaces où on intègre en temps et ne parviendra qu'à établit des résultats locaux, contrairement à la seconde.

Afin de prouver les hypothèses du théorème de point fixe, il faudra réussir, étant donné l'espace X dans lequel on appliquera le théorème de point fixe, à estimer

$$\left\|\int_0^t e^{i(t-s)L}N(u)ds\right\|_X$$

en fonction de $\|u\|_X$.

Remarque 1.5 *Remarquons qu'ici nous n'avons parlé que du premier ordre en temps. Pour l'équation des ondes, les choses sont similaires, mais il y a un système de deux solutions fondamentales et des formules telles celle de Duhamel sont moins aisées à écrire. Une formule de Duhamel possible pour l'équation* $\partial_t^2 u - \Delta u = F$ *est*

$$u(t) = \cos\left((t-t_0)\sqrt{-\Delta}\right)u(t_0) + \frac{\sin\left((t-t_0)\sqrt{-\Delta}\right)}{\sqrt{-\Delta}}\partial_t u(t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\sin\left((t-s)\sqrt{-\Delta}\right)}{\sqrt{-\Delta}}F(s)ds$$

Le chapitre 2 de [Tao06] est fortement conseillé pour davantage d'informations à ce sujet.

2. Gardons en tête que la chose est bien moins aisée dans des équations de type Navier-Stokes, où il faut définir des solutions de Leray. On se réfèrera à [CDGG06], p. 42–52 pour davantage d'informations.
3. Les problèmes de régularité en espace viendront plus tard.

2 Quelques outils de mesure des effets dispersifs

2.1 Estimations de dispersion

On s'attend, après la discussion physique qu'on a eue dans la partie précédente, à une décroissance de la norme L^∞ de la solution de l'équation libre au cours du temps. C'est effectivement le cas pour les équations dispersives. En effet on peut la plupart du temps écrire le groupe d'opérateurs lié à une équation dispersive comme un noyau de convolution : $e^{itL}u_0 := K_t * u_0$. En majorant la norme L^∞ de K_t en fonction de t, on obtient que e^{itL} est continu de L^1 dans L^∞. Les résultats suivants sont quelques exemples de résultats de dispersion.

Proposition 2.1 *(Dispersion pour l'équation de Schrödinger) Si* $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *est dans* L^2*, alors il existe une constante* C *dépendant uniquement de la dimension telle que*

$$\left\|e^{-it\Delta}u_0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{t^{d/2}} \left\|u_0\right\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

On trouvera une preuve de cette proposition dans [Tao06] ou dans [Caz03].
On peut de même établir une relation de dispersion pour l'équation d'Airy.

Proposition 2.2 *(Dispersion pour l'équation d'Airy) Si* $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *est dans* L^2*, alors il existe une constante* C *dépendant uniquement de la dimension telle que*

$$\left\|e^{-t\partial_{xxx}}u_0\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{t^{d/3}} \left\|u_0\right\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

La décroissance est moins importante : en effet, la relation de dispersion de l'équation d'Airy est $h(\xi) = \xi^3$. Cela signifie que les hautes fréquences vont plus vite que dans l'équation de Schrödinger (régularisation) mais que les fréquences faibles se déplacent plus lentement : la décroissance est donc plus lente.

Pour ce qui est de l'équation des ondes, étant donné qu'elle est du second ordre en temps, on a deux solutions fondamentales K_t^0 et K_t^1, qu'on n'explicitera pas ici.

Proposition 2.3 *(Dispersion pour l'équation des ondes) Soit* φ *une fonction dans la classe de Schwartz (i.e.* $\mathcal{C}^\infty$ *et décroissant plus vite que tout polynôme). Alors si* $\varphi_\lambda(x) := \lambda^d\varphi(\lambda x)$*, on a les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} |K_t^0 * \varphi_\lambda| &\leq C\frac{\lambda^d}{\sqrt{1+(\lambda t)^2}^{\frac{d-1}{2}}}, \\ |K_t^1 * \varphi_\lambda| &\leq C'\frac{\lambda^{d-1}}{\sqrt{1+(\lambda t)^2}^{\frac{d-1}{2}}}. \end{aligned}$$

Il n'existe pas de formulation totalement standard des inégalités de dispersion pour l'équation des ondes (la formulation utilisée ici se retrouve dans [Tao06] par exemple) : en effet, davantage que pour Schrödinger, elles sont seulement un intermédiaire pour les inégalités de Strichartz dont nous parlerons par la suite.

Pour les ondes de Rossby, se référer à [CDGG06], ou bien à [CDGG02] Des résultats de dispersion de la sorte sont énoncés : nous ne les citons pas ici car trop de termes seraient à définir.

Dans certains cas comme pour l'équation de Schrödinger, l'opérateur e^{itL} est une isométrie de L^2 : ceci permet, par interpolation, d'obtenir la proposition suivante.

Proposition 2.4 *(Estimations dispersives pour l'équation de Schrödinger) Si* $1 \leq p \leq 2$ *alors*

$$\left\|e^{it\Delta}f\right\|_{L^{p'}} \leq Ct^{\frac{d}{2}-\frac{d}{p}} \left\|f\right\|_{L^p}.$$

Ces estimations de dispersion servent en réalité à établir des inégalités dites *inégalités de Strichartz.*

2.2 Inégalités de Strichartz

Les inégalités de Strichartz, introduites dans l'article [Str77], permettent de faire des estimations « L^p en temps et L^q en espace » de certains termes : de la solution fondamentale de l'équation libre mais aussi de l'intégrale apparaissant dans la formule de Duhamel (10).

Nous allons l'énoncer dans le cadre général de l'article [KT98]. Soit (X, dx) un espace métrique, H un espace de Hilbert, $U(t) : H \to L^2(X)$ une famille d'opérateurs paramétrée par $t \in \mathbb{R}$. On suppose aussi que pour tout $f \in H$,

$$\|U(t)f\|_{L^2} \le C_U \|f\|_H$$

(inégalité d'énergie).
Supposons ensuite qu'on ait une inégalité dispersive, c'est-à-dire qu'il existe $\sigma > 0$ tel que pour tout $g \in L^1(X) \cap L^2(X)$ on ait

$$\|U(s)U(t)^* g\|_{L^\infty} \le C|t-s|^{-\sigma} \|g\|_{L^1}\,, \ \forall t \neq s \text{ ou bien} \tag{11}$$

$$\|U(s)U(t)^* g\|_{L^\infty} \le C'(1+|t-s|)^{-\sigma} \|g\|_{L^1} \ \forall (t,s). \tag{12}$$

Il faut avoir en tête que $U(t) = e^{-it\Delta}$ par exemple.
On définit alors la notion de paire admissible :

Définition 2.5 *Une paire d'exposants (q, r) est admissible pour la décroissance σ si*

1. $q, r \ge 2$.
2. $(q, r, \sigma) \neq (2, \infty, 1)$.
3. $\frac{1}{q} + \frac{\sigma}{r} \le \frac{\sigma}{2}$.

Avec l'aide de cette définition on établit les inégalités de Strichartz

Proposition 2.6 *(Inégalités de Strichartz) Soient (q, r) et $(\tilde{q}, \tilde{r})$ des paires admissibles pour la décroissance σ. Alors il existe trois constantes $C_1(\sigma, q, r)$, $C_2(\sigma, \tilde{q}, \tilde{r})$ et $C_3(\sigma, q, r, \tilde{q}, \tilde{r})$ telles qu'on ait les estimations suivantes*

– *L'estimation de Strichartz homogène :*

$$\|U(t)f\|_{L^q_t L^r_x} \le C_1 \|f\|_H\,, \tag{13}$$

– *L'estimation de Strichartz homogène duale :*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} U(s)^* F(s) ds \right\|_H \le C_2 \|F\|_{L^{\tilde{q}'}_t L^{\tilde{r}'}_x}\,, \tag{14}$$

– *L'estimation de Strichartz inhomogène :*

$$\left\| \int_0^t U(t)U(s)^* F(t') dt' \right\|_{L^q_t L^r_x} \le C_3 \|F\|_{L^{\tilde{q}'}_t L^{\tilde{r}'}_x}\,. \tag{15}$$

Ces estimations ont une utilité évidente pour effectuer le théorème de point fixe. Sans rentrer dans les détails (cf. [Tao06] pour les avoir), il faut garder en tête le problème que peut présenter le fait d'utiliser un espace L^p en temps pour effectuer le point fixe : il faudra le plus souvent faire les estimations sur un intervalle compact de temps afin de pouvoir majorer, par exemple, une norme L^p en temps par une norme L^q, $q < p$. En somme, il faut retenir que des estimations de la sorte ne servent que pour établir des résultats d'existence en temps court.
On trouvera une preuve claire et générale dans l'article [KT98], ou expliquée encore plus clairement dans [Won06]. Les estimations pour le terme intégral reposent sur un argument de dualité qui vaut la peine d'être énoncé ici. Cet argument appelé « argument TT^* » ramène l'inégalité de Strichartz homogène duale au problème suivant :

$$\left| \int\int \langle U(s)^* F(s), U(t)^* G(t) \rangle \, ds dt \right| \le C \|F\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x} \|G\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x}\,.$$

Cet argument combiné avec d'autres arguments de dualité ainsi que des inégalités L^p (Hölder, Hardy-Littlewood-Sobolev) permet de prouver sans trop de difficultés les inégalités de Strichartz lorsque $\frac{1}{q}+\frac{\sigma}{r}<\frac{\sigma}{2}$. Le problème est plus complexe lorsqu'il y a égalité (partie « Sharp estimates » de [KT98]).

Résultats établis pour une équation particulière. Nous énoncerons ici les résultats que cette méthode permet d'établir pour une équation particulière dont on parlera plus précisément dans la dernière partie : l'équation de Schrödinger nonlinéaire avec une nonlinéarité quadratique dans $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u(t,x) + i\Delta u(t,x) & = & \alpha Q(u(t,x)) \\ u(t=0,x) & = & u_0(x), \end{array} \right. \tag{16}$$

où $Q(u)$ peut valoir u^2 ou $\bar{u}^2$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ et u est à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Pour cette équation, on arrive à montrer qu'il existe une solution *locale* pour une donnée initiale dans H^s pour $s>0$. Des raffinements des estimations de Strichartz (estimations de Strichartz bilinéaires, [Tao01]) permettent d'établir des résultats d'existence dans H^s pour $-1/2<s<0$, toujours locaux bien sûr. Mais il y a peu d'espoir de globaliser ces résultats : lorsqu'on utilise des méthodes « à la Strichartz », il faut trouver des quantités conservées au cours du temps pour pouvoir obtenir un résultat global. L'équation (16) n'étant pas *hamiltonienne*, elle ne possède pas d'énergie conservée.

C'est le but de la troisième partie de prouver des résultats globaux.

3 Résonances en espace et en temps

3.1 Principe

La méthode des résonances en espace et en temps a été introduite en 2009 par Pierre Germain, Jalal Shatah et Nader Masmoudi ([GMS09b]). Nous nous baserons sur l'article explicatif de Pierre Germain [Ger11] pour décrire le principe de la méthode.

3.1.1 Quelques exemples simples

Physiquement, un système résonnant est constitué de deux éléments :

1. Un système libre, oscillant, qui possède une ou plusieurs fréquences propres, c'est-à-dire des solutions ondulatoires.
2. Une excitation extérieure, qui dépend d'un ou plusieurs paramètres.

Il y a résonance dès lors que le terme extérieur oscille à la fréquence propre du système libre ou, de manière plus générale, est un mode propre du système libre : cela se traduit par une augmentation de l'amplitude du système oscillant, et donc mathématiquement par une impossibilité de contrôler efficacement la norme [4] de la solution.
Considérons l'exemple suivant.

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_t u(t,x) + i\Delta u(t,x) = v(t,x)w(t,x), \\ v,\ w \text{ à définir.} \end{array} \right. \tag{17}$$

Le système libre $\partial_t + i\Delta$ possède un mode propre pour toute fréquence ξ : il s'agit simplement de la solution $e^{i(x\cdot\xi - t|\xi^2|)}$.

Cas 1 : résonances en temps avec des ondes planes. Supposons que

$$\begin{array}{rcl} v(t,x) & = & e^{i(\alpha\cdot x - |\alpha|^2 t)}, \\ w(t,x) & = & e^{i(\beta\cdot x - |\beta|^2 t)}, \end{array}$$

c'est-à-dire que v et w sont des ondes planes solution de l'équation libre. Une des possibilités pour qu'il y ait résonance est que le produit vw soit à son tour une onde plane, c'est-à-dire que $|\alpha|^2+|\beta|^2=|\alpha+\beta|^2$. On a alors une résonance classique en temps, du même type que celle de l'exemple précédent.

4. On ne précise pas de quelle norme on parle : il peut s'agir aussi bien d'une norme L^2, L^∞, etc.

Cas 2 : résonances en espace avec des paquets d'ondes. Dans le cas de v et w paquets d'ondes centrés respectivement en α et β, on dit qu'on a résonance en espace si les deux paquets d'onde interagissent. La condition apparaissant naturellement est que les deux paquets d'ondes aient la même vitesse. Considérons en effet le *profil* de la solution, c'est-à-dire $f := e^{-it\Delta}u$. On calcule facilement $\partial_t f = e^{it\Delta}vw$, ce qui nous permet d'écrire que

$$u(t,x) = e^{-it\Delta}u_0(x) + \int_0^t e^{is\Delta}v(s,x)w(s,x)ds.$$

Or, si v et w sont non pas des ondes, mais des paquets d'onde à la même vitesse, la norme L^2 de $e^{is\Delta}v(s,x)w(s,x)$ restera constante au cours du temps, ce qui fera tendre $\|u\|_{L^2}$ vers l'infini.

Encore une fois, on peut imaginer qu'en écrivant u comme somme d'ondes planes (et donc, aussi, en un certain sens, en somme de paquets d'ondes), on ramène le problème (16) à des considérations du type de celles qu'on vient de faire.

3.1.2 Détails de la méthode

Cette heuristique physique se révèle très utile mathématiquement parlant : les résonances en espace et en temps apparaissent naturellement. On peut espérer contrôler l'intégrale de la formule de Duhamel en localisant les zones de résonances en espace et en temps. Posons $f = e^{it\Delta}u$. On a alors, par l'équation (16).

$$\partial_t f = i\Delta e^{it\Delta}u + e^{it\Delta}\partial_t u = e^{it\Delta}\alpha Q(u)$$

Ainsi, si $Q(u) = u^2$, on peut écrire

$$\partial_t \hat{f} = e^{-it|\xi|^2}\alpha \int \hat{u}(t,\eta)\hat{u}(t,\xi-\eta)d\eta$$

Soit

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= \hat{u}_0 + \int_0^t e^{-is|\xi|^2}\alpha \int \hat{u}(s,\eta)\hat{u}(s,\xi-\eta)d\eta ds \\
&= \hat{f}_0 + \int_0^t \alpha \int e^{-is|\xi|^2}e^{is|\eta|^2}e^{is|\xi-\eta|^2}\hat{f}(s,\eta)\hat{f}(s,\xi-\eta)d\eta ds \\
&= \hat{u}_0 + \int_0^t \alpha \int e^{-is\varphi(\xi,\eta)}\hat{f}(s,\eta)\hat{f}(s,\xi-\eta)d\eta ds.
\end{aligned}$$

On a noté $\varphi := |\xi|^2 + |\eta|^2 + |\xi-\eta|^2$ la phase. Dans le cas $\bar{u}^2$, $\varphi(\xi,\eta) = |\xi|^2 + |\eta|^2 + |\xi-\eta|^2$.
Quel que soit le cas, on remarque qu'on peut toujours se poser les mêmes questions que dans les cas simples décrits précédemment :

1. Est-il possible que le produit d'une onde plane $e^{i(x\cdot\eta - \epsilon t|\eta|^2)}$ et une onde plane $e^{i(x\cdot(\xi-\eta)-\epsilon t|\xi-\eta|^2)}$ donne une troisième onde plane (ici $\epsilon = +1$ si la nonlinéarité est en u^2, -1 si elle est en $\bar{u}^2$) ? Ceci est vrai si, et seulement si $|\xi|^2 = \epsilon|\eta|^2 + \epsilon|\xi-\eta|^2$, c'est-à-dire si, et seulement si la phase φ s'annule. On notera $\mathcal{T} = \{(\xi,\eta),\ \varphi(\xi,\eta) = 0\}$ l'ensemble résonnant en temps.
2. Est-il possible que deux paquets d'onde interagissent significativement, c'est-à-dire se déplacent à la même vitesse ? Ceci est possible si, et seulement si $\epsilon\eta = \epsilon(\xi-\eta)$, c'est-à-dire si $\partial_\eta\varphi = 0$. On notera $\mathcal{S} = \{(\xi,\eta),\ \partial_\eta\varphi = 0\}$ l'ensemble résonnant en espace.

3.1.3 Les résonances en espace-temps d'un point de vue mathématique

L'idée principale est d'utiliser les deux faits suivants :

1. Si φ ne s'annule pas,
$$e^{is\varphi} = \frac{1}{i\varphi}\partial_s e^{is\varphi}.$$
2. Si $\partial_\eta\varphi$ ne s'annule pas,
$$e^{is\varphi} = \frac{1}{is|\partial_\eta\varphi|^2}\partial_\eta\varphi\cdot\partial_\eta e^{is\varphi}.$$

Hors de l'ensemble résonnant en temps. On utilise la propriété énoncée, ce qui nous permet de faire la transformation suivante, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(t,\xi) &= \widehat{u_0}(\xi) + \alpha \int \frac{1}{i\varphi} e^{it\varphi(\xi,\eta)} \widehat{f}(t,\eta)\widehat{f}(t,\xi-\eta)d\eta \\
&- \alpha \int_0^t \int \frac{1}{i\varphi} e^{is\varphi(\xi,\eta)} \partial_s \widehat{f}(s,\eta)\widehat{f}(s,\xi-\eta)d\eta ds \\
&+ \text{ termes symétriques ou moins importants.}
\end{aligned}$$

Cette transformation permet deux choses :

1. D'une part de « gagner des dérivées » grâce au terme $1/\varphi$, ce qui permettra d'utiliser des lemmes d'intégration fractionnaire (cf [GMS09a]).
2. D'autre part, le terme $\partial_s \widehat{f} \times \widehat{f}$ est cubique en f, ce qui permet une majoration *a priori* plus simple qu'avec un terme quadratique.

Hors de l'ensemble résonnant en espace. Cette fois-ci l'intégration par parties est en fonction de la variable d'espace. On écrit aussi (en omettant pour le moment les termes symétriques ou moins importants)

$$\widehat{f}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) - \int_0^t \int e^{is\varphi(\eta,\xi)} \frac{1}{is|\partial_\eta \varphi|^2} \partial_\eta \varphi \cdot \partial_\eta \widehat{f}(t,\eta)\widehat{f}(t,\xi-\eta)d\eta ds.$$

Là encore, les avantages sont assez clairs :

1. Le facteur $1/s$ permet de faciliter les estimations en temps grand.
2. Le facteur $1/|\partial_\eta \varphi|$ permet d'utiliser de l'intégration fractionnaire (dans une moindre mesure que lors de la transformation précédente).

Reste à traiter la zone $\mathcal{T} \cup \mathcal{S}$. Pour ce faire, on fera en sorte de décomposer l'unité en trois fonctions : une fonction χ, égale à 1 autour de $\mathcal{T} \cup \mathcal{S}$, puis deux fonctions ψ et θ, homogènes de degré 0 pour $|(\xi,\eta)| \geq 1$ (par exemple), l'une s'annulant dans un voisinage de $\mathcal{S}$ et l'autre autour de $\mathcal{T}$. Dans le cas où l'ensemble des résonances en espace-temps est réduit à l'origine, afin de réussir à estimer la partie de l'intégrale

$$\int_0^t \alpha \int \chi(\xi,\eta) e^{-is\varphi(\xi,\eta)} \hat{f}(s,\eta)\hat{f}(s,\xi-\eta)d\eta ds,$$

il faut adapter le voisinage dans lequel $\chi = 1$ en fonction du temps : en d'autres termes, on fera en sorte que le volume de cette zone diminue au cours du temps, en choisissant, pour une fonction χ donnée, d'utiliser la dilatation $\chi_s : x \mapsto \chi(\sqrt{s}x)$. Ceci nous assurera la possibilité d'effectuer des estimations en temps long.

Dans d'autres cas où $\mathcal{T} \cap \mathcal{S}$ n'est pas réduit à un point, la question est assez ouverte, mais on peut espérer la résoudre tant que l'ensemble résonnant en espace-temps est de mesure nulle.

Gérer les découpages : estimations de Coifman-Meyer. Le dernier problème réside dans le fait que, avec un tel découpage, il faut pouvoir justifier des estimations comme celles-ci : Si on définit

$$T_m(f,g) = \mathcal{F}^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^3} m(\xi,\eta)\hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi-\eta)d\eta\right),$$

alors l'opérateur T_m est borné de $L^p \times L^q$ vers L^r où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, $1 < p,q \leq \infty$ et $0 < r < \infty$. Les estimations de Coifman-Meyer, [CM78], permettent d'obtenir un tel résultat, moyennant des hypothèses de décroissances et d'homogénéité sur m.

3.2 Résultats obtenus

Nous énoncerons d'abord des résultats d'existence avec une régularité L^2 ou supérieure.

Théorème 3.1 *(Nonlinéarité en $\bar{u}^2$) Soit l'équation (16) avec $Q(u) = \bar{u}^2$. Alors il existe ε tel que pour toute donnée initiale u_0 vérifiant*

$$\|u_0\|_{L^2_x} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

on ait une solution globale de (10), de profil $f := e^{-it\Delta}u_0$ vérifiant, pour tout t,

$$\|\langle x\rangle f\|_{L^2_x} \leq \varepsilon,$$

et tel que f converge, lorsque t tend vers l'infini, au sens de la norme ci-dessus (on dit qu'on a scattering*).*

Théorème 3.2 *(Nonlinéarité en u^2) Soit l'équation (16) avec $Q(u) = u^2$. Alors il existe ε tel que pour toute donnée initiale u_0 vérifiant*

$$\|u_0\|_{L^2_x} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

on ait une solution globale de (10), de profil $f := e^{-it\Delta}u_0$ vérifiant, pour tout t,

$$\left\|\langle x\rangle^2 f\right\|_{L^2_x} \leq t^{\frac{1}{4}}\varepsilon \, \|f\|_{H^2_x} \leq \varepsilon$$

et tel que f converge, lorsque t tend vers l'infini, au sens de la norme ci-dessus.

Cependant, un des avantages de la méthode des résonances en espace et en temps est qu'elle permet d'établir des résultats pour des régularités négatives. En voici un exemple.

Théorème 3.3 *(Nonlinéarité en $\bar{u}^2$) Soit l'équation (16) avec $Q(u) = \bar{u}^2$. Alors il existe ε tel que pour toute donnée initiale u_0 vérifiant*

$$\|u_0\|_{-\sigma} + \|xu_0\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

on ait une solution globale de (10), de profil $f := e^{-it\Delta}u_0$ vérifiant, pour tout t,

$$\|f\|_{-\sigma} + \|xf\|_{L^2} \leq \varepsilon,$$

et tel que f converge, lorsque t tend vers l'infini, au sens de la norme ci-dessus (on dit qu'on a scattering*).*

Ces théorèmes sont dans le prolongement direct des résultats démontrés dans [GMS09b], c'est-à-dire des résultats d'existence globale dans L^2, avec des hypothèses de localisation en temps de la donnée initiale.

Les résultats de [GMS09b] étaient déjà parmi les premiers résultats globaux pour ces équations non-hamiltoniennes. Tao avait prouvé quelques années auparavant des résultats locaux dans [Tao01] mais le rajout d'hypothèses supplémentaires sur la condition initiale permit à Germain, Masmoudi et Shatah de globaliser le résultat.

L'intérêt principal de ces deux résultats est donc d'affaiblir le plus possible les hypothèses sur la condition initiale, tout du moins pour le cas $\bar{u}^2$.

Interprétation des hypothèses des théorèmes. L'hypothèse de localisation a son importance : en effet, les résultats qu'on peut trouver dans [Tao01] par exemple se basent sur des estimations du type :

$$\|(\chi_{\xi\sim N_1}(D)u)\,(\chi_{\xi\sim N_2}u)\|_{L^2_tL^2_x} \lesssim \frac{N_1}{N_2}\,\|\chi_{\xi\sim N_1}(D)u\|_{L^2}\,\|\chi_{\xi\sim N_2}u\|_{L^2} \text{ si } N_2 \gg N_1.$$

D'un autre côté, la méthode des résonances en espace qui permet d'écrire quelque chose de la forme

$$\left\|e^{is\Delta}u^2\right\|_{L^2} \lesssim \left\|\frac{1}{s}\mathcal{I}e^{is\Delta}u^2\right\|_{L^2},$$

– où $\mathcal{I}$ est un symbole d'« intégration fractionnaire » (division par une phase, comme dans l'explication de la méthode).

Ces deux outils mesurent le même type d'effet (l'effet de l'interaction de différents paquets d'onde) mais d'une manière suffisamment différente pour qu'on ait dans un cas un gain en fréquence, et de l'autre un gain en temps.

Grossièrement, les estimations bilinéaires permettent de voir le résultat de l'interaction de deux paquets d'onde à deux fréquences différentes : c'est pour cela qu'il s'agit d'une estimation en norme L^2 en espace *et en temps*. Les résonances en espace et en temps, quant à elles, permettent de mesurer l'effet de l'interaction entre deux paquets d'onde *au fur et à mesure qu'ils s'éloignent l'un de l'autre*. C'est en partie pour cela qu'il est naturel de demander une localisation de nos fonctions en espace : il faut savoir d'où partent les paquets d'onde pour pouvoir quantifier leur éloignement.

Références

[BG10] F. Bernicot and P. Germain, *Bilinear oscillatory integrals and boundedness for new bilinear multipliers*, Advances in Mathematics **225** (2010), no. 4, 1739–1785.

[Bou93] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations*, Geometric and Functional Analysis **3** (1993), no. 3, 209–262.

[Caz03] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, American Mathematical Soc., August 2003.

[CCT03] M. Christ, J. Colliander, and T. Tao, *Ill-posedness for nonlinear Schrödinger and wave equations*, Arxiv preprint math/0311048 (2003).

[CDGG02] J. Y Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, and E. Grenier, *Anisotropy and dispersion in rotating fluids*, Studies in Mathematics and its Applications **31** (2002), 171–192.

[CDGG06] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, and E. Grenier, *Mathematical geophysics : an introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations*, Oxford University Press, 2006.

[CKS+07] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao, *Resonant decompositions and the i-method for cubic nonlinear Schrödinger on R^2*, Arxiv preprint arXiv :0704.2730 (2007).

[CKS+08] ———, *Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in R^3*, Ann. of Math **167** (2008), no. 3.

[CM78] Ronald Raphaël Coifman and Yves Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Société mathématique de France, 1978.

[CW91] F. M. Christ and M. I Weinstein, *Dispersion of small amplitude solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation*, Journal of functional analysis **100** (1991), no. 1, 87–109.

[Ger10] Pierre Germain, *Global existence for coupled Klein-Gordon equations with different speeds*, Arkiv : 1005.5238 (2010).

[Ger11] P. Germain, *Space-time resonances*, Arxiv preprint arXiv :1102.1695 (2011).

[GMS09a] P. Germain, N. Masmoudi, and J. Shatah, *Global solutions for 2D quadratic Schrödinger equation*, `http://www.cims.nyu.edu/~pgermain/Global_solutions_for_2D_quadratic_Schrodinger.pdf`, 2009.

[GMS09b] ———, *Global solutions for 3D quadratic Schrödinger equations*, International Mathematics Research Notices **2009** (2009), no. 3, 414.

[GV85a] J. Ginibre and G. Velo, *The global cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation*, Mathematische Zeitschrift **189** (1985), no. 4, 487–505.

[GV85b] ———, *Time decay of finite energy solutions of the non linear Klein-Gordon and Schrödinger equations*, Annales de l'IHP Physique théorique, vol. 43, 1985, pp. 399–442.

[KPV93] C. E Kenig, G. Ponce, and L. Vega, *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Mathematical Journal **71** (1993), no. 1, 1–21.

[KPV96] ———, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, Journal of the American Mathematical Society **9** (1996), 573–604.

[KPV04] ———, *The Cauchy problem for quasi-linear Schrödinger equations*, Inventiones mathematicae **158** (2004), no. 2, 343–388.

[KT98] M. A Keel and T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates*, American Journal of Mathematics **120** (1998), no. 5, 955–980.

[KV08] R. Killip and M. Visan, *Nonlinear Schrödinger equations at critical regularity*, Lecture notes for the summer school of Clay Mathematics Institute (2008).

[SM93] E. M Stein and T. S Murphy, *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, vol. 43, Princeton Univ Pr, 1993.

[Str77] R. S Strichartz, *Restrictions of fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Mathematical Journal **44** (1977), no. 3, 705–714.

[Str81] W. A Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*, Journal of Functional Analysis **41** (1981), no. 1, 110–133.

[Tao01] T. Tao, *Multilinear weighted convolution of L^2 functions, and applications to nonlinear dispersive equations*, American Journal of Mathematics **123** (2001), no. 5, 839–908.

[Tao04] ———, *Harmonic analysis in the phase plane, lecture notes for UCLA*, `http://www.math.ucla.edu/~tao/254a.1.01w/notes3.dvi`, 2004.

[Tao06] ———, *Nonlinear dispersive equations : local and global analysis*, no. 106, Amer Mathematical Society, 2006.

[Won06] W. W Wong, *Strichartz estimates for Dummiesˆ W silly persons*, `http://www.math.princeton.edu/~wwong/papers/strichartz.pdf`, 2006.