Pavages de l'espace affine

Ilia Smilga

19 octobre 2011

1 Formulation du problème

Considérons un espace affine réel $\mathbb{E}$ de dimension n. Son groupe d'automorphismes $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{E})$ est alors le groupe des transformations affines, produit semi-direct du groupe des translations par le groupe des automorphismes linéaires de l'espace vectoriel sous-jacent : $\mathrm{Aff}(\mathbb{E}) = \mathbb{R}^n \rtimes GL_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse ici aux pavages « réguliers » de cet espace, c'est-à-dire qu'on voudrait trouver un pavé P_0 et un groupe discret $\Gamma \subset G$ tel que les images de P_0 par les éléments de Γ pavent $\mathbb{E}$.

Définition 1. Soit Γ un sous-groupe de G. On dit (par abus de langage) que Γ est *proprement discontinu* si pour tout compact $K \subset \mathbb{E}$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini. On dit que Γ est *cristallographique* s'il est proprement discontinu et le quotient $\mathbb{E}/\Gamma$ est compact.

Pour exclure les cas trop pathologiques (comme une infinité de pavés qui se rencontrent en un point), on s'intéressera uniquement aux groupes proprement discontinus (remarquons qu'ils sont alors automatiquement discrets). On peut voir que tout groupe proprement discontinu donne lieu à un pavage de ce genre : il suffit donc d'étudier ces groupes. Quant aux groupes cristallographiques, ils correspondent à un cas particulier intéressant, celui où les pavés sont compacts — sans doute le premier cas auquel on pense quand on essaye de s'imaginer un pavage.

L'exemple le plus classique, et le plus familier, est celui des pavages euclidiens. On introduit une structure euclidienne sur $\mathbb{E}$: son groupe d'automorphismes devient alors $\mathrm{Isom}(\mathbb{E}) = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse au cas où Γ préserve cette structure euclidienne : on cherche donc à classifier les sous-groupes proprement discontinus, en particulier cristallographiques, de $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$. Ce problème est assez ancien : notamment, le 18ème problème de Hilbert, posé en 1900, consiste à savoir si ces groupes sont en nombre fini (à isomorphisme près). En 1911, Bieberbach a fourni une description complète de ces groupes, mais seulement « à un groupe fini près », en un sens précisé par la définition suivante :

Définition 2. Pour une propriété P donnée, on dit qu'un groupe a *virtuellement* la propriété P s'il possède un sous-groupe d'indice fini qui a la propriété P.

Théorème 1 (Bieberbach)**.** *Tout sous-groupe proprement discontinu de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ *est virtuellement abélien. Tout sous-groupe cristallographique de* $\mathrm{Isom}(\mathbb{E})$ *est virtuellement un réseau de translations.*

On aimerait bien démontrer un résultat similaire dans le cadre plus général des pavages affines. Tel quel, il est évidemment faux : on verra bientôt des groupes proprement discontinus qui sont libres, et on sait (théorème de Nielsen-Schreier) que tout sous-groupe d'un groupe libre est libre. Voici une conjecture qui paraît plus raisonnable. On rappelle qu'un groupe est dit *résoluble* s'il existe une chaîne de sous-groupes $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_k = 1$ telle que pour tout i, G_{i+1} est distingué dans G_i et le quotient G_i/G_{i+1} est abélien.

Conjecture 2 (Auslander 1964 [4]). *Tout sous-groupe cristallographique de* $\mathrm{Aff}(\mathbb{E})$ *est virtuellement résoluble.*

Un peu plus tard, une conjecture même un peu plus générale a été proposée :

Conjecture 3 (Milnor 1977 [8]). *Tout sous-groupe proprement discontinu de* $\mathrm{Aff}(\mathbb{E})$ *est virtuellement résoluble.*

En 1983, Margulis [7] a cependant exhibé un contre-exemple (en dimension 3) qui a réfuté la conjecture de Milnor. Quant à la conjecture de Auslander, bien qu'on dispose de quelques résultats partiels, c'est aujourd'hui la plus grande question ouverte concernant les pavages affines, et notamment la principale motivation de ma thèse. Pour mettre ce résultat en perspective, mentionnons notamment le fait suivant (qu'on ne démontrera pas ici) :

Théorème 4 (Alternative de Tits). *Tout sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{C})$ *est soit virtuellement résoluble, soit contient un sous-groupe libre de rang 2.*

Il parle de groupes linéaires, mais il ne faut pas oublier que $\mathrm{Aff}(\mathbb{E})$ est isomorphe à un sous-groupe de $GL_{n+1}(\mathbb{R})$.

2 Groupes algébriques

2.1 Généralités

Les groupes algébriques sont un des outils fondamentaux pour aborder cette question. Commençons par rappeler quelques définitions.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension n, et $\mathbb{R}[V] \simeq \mathbb{R}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ l'anneau des polynômes sur V. Pour une partie E de V, on note

$$I(E) := \{P \in \mathbb{R}[V] \mid \forall x \in E, P(x) = 0\}$$

l'idéal des polynômes qui s'annulent sur E. Pour un idéal I de $\mathbb{R}[V]$, on note

$$Z(I) := \{x \in V \mid \forall P \in I, P(x) = 0\}$$

l'ensemble des zéros communs de I. On appelle *fermé de Zariski* tout ensemble de la forme $Z(I)$, et *ouvert de Zariski* tout ensemble dont le complémentaire est un fermé de Zariski. Les ouverts de Zariski forment alors une topologie sur V, appelée *topologie de Zariski*. Enfin, un *groupe algébrique* (sous-entendu : réel) est un sous-groupe de $GL(V)$ qui est un fermé de Zariski dans l'espace vectoriel (de dimension n^2) des endomorphismes de V.

Ainsi, étant donné deux parties E et E' de V, E est Zariski-dense dans E' ssi tout polynôme qui s'annule sur E s'annule aussi sur E'. L'adhérence de Zariski

$\overline{E}$ de E est le plus petit fermé de Zariski contenant E, c'est-à-dire l'ensemble des zéros de tous les polynômes qui s'annulent déjà sur E : $\overline{E} = Z(I(E))$.

La puissance de cette notion réside dans le fait que, d'une part, le passage à l'adhérence de Zariski préserve beaucoup de propriétés intéressantes — en voici quelques exemples :

Proposition 5. *Soit $\Gamma \subset GL(V)$ un groupe, $G = \overline{\Gamma}$ son adhérence de Zariski. Alors :*
- *G est un groupe (donc un groupe algébrique) ;*
- *G est abélien ssi Γ est abélien ;*
- *G est résoluble ssi Γ est résoluble.*

D'autre part, les groupes algébriques sont nettement plus faciles à étudier que des groupes quelconques. On sait notamment que ce sont des groupes de Lie, or les groupes de Lie sont assez peu nombreux et leur classification est bien connue. En voici une première application : supposons que Γ (ou un de ses sous-groupes d'indice fini) est résoluble : alors, comme on vient de voir, son adhérence de Zariski l'est aussi. On dispose ensuite du théorème de Lie-Kolchin, qui affirme que tout sous-groupe de Lie connexe résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires supérieures ; modulo quelques détails techniques, on arrive ainsi à coincer Γ (ou au moins son sous-groupe résoluble) dans un groupe nettement plus petit que $\mathrm{Aff}(\mathbb{E})$.

2.2 Une application : critère de valeur propre

On note $\phi : \mathrm{Aff}(\mathbb{E}) \to GL_n(\mathbb{R})$ la projection canonique, qui à une isométrie affine associe sa partie linéaire.

Proposition 6. *Soit Γ un sous-groupe proprement discontinu et finiment engendré de $\mathrm{Aff}(\mathbb{E})$. Alors sa partie linéaire $\phi(\Gamma)$ possède un sous-groupe d'indice fini dont l'adhérence de Zariski G a la propriété suivante : tout élément de G a une valeur propre égale à 1. En particulier, $G \neq GL_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Commençons par une remarque élémentaire : tout élément de Γ qui a un point fixe est de torsion. En effet, autrement, un compact contenant ce point rencontrerait une infinité de ses translatés. Or on dispose du lemme de Selberg, qui dit que tout sous-groupe finiment engendré de $GL_n(\mathbb{C})$ est virtuellement sans torsion ; on peut donc supposer que tout élément $\gamma \in \Gamma$ est sans point fixe. Cela veut dire que $\gamma - \mathrm{id}$ ne prend pas la valeur 0, donc que $\phi(\gamma - \mathrm{id})$ n'est pas surjective, c'est-à-dire que $\phi(\gamma)$ a la valeur propre 1. Or on peut voir que « avoir 1 comme valeur propre » est une condition polynomiale (elle s'écrit $\det(\phi(\gamma) - \mathrm{id}) = 0$), donc elle passe à l'adhérence de Zariski. $\square$

3 Un contre-exemple à la conjecture de Milnor : jouer au ping-pong avec des balles de tennis

On rappelle que $SO(p, q)$ désigne le groupe des automorphismes linéaires de $\mathbb{R}^{p+q}$ de déterminant 1 qui laissent invariante une forme quadratique de signature (p, q).

Théorème 7. *Il existe un sous-groupe proprement discontinu de $\mathbb{R}^3 \rtimes SO(2,1)$ qui est libre.*

On va présenter ici une construction basée sur celle de T. Drumm (telle qu'exposée par exemple dans [6]), mais influencée par les arguments plus abstraits et conceptuels développés par Margulis, tels qu'exposés dans [3]. Tout va s'appuyer sur le résultat suivant :

Théorème 8 (Lemme du ping-pong). *Soit X un ensemble. Soient $a_1, a_2, \dots, a_k$ des permutations de X (c'est-à-dire des bijections de X dans lui-même) vérifiant la condition suivante : il existe une famille $X_1^-, X_1^+, \dots, X_k^-, X_k^+$ de parties deux à deux disjointes de X telle que pour tout indice i, on a*

$$\begin{cases} a_i(X \setminus X_i^-) \subset X_i^+ \\ a_i^{-1}(X \setminus X_i^+) \subset X_i^- \end{cases}$$

(notez que ces deux conditions sont en fait équivalentes). Alors le groupe engendré $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ est libre sur $(a_1, \dots, a_k)$.

Démonstration. Soit $x \in X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k X_i^- \cup X_i^+ \right)$. (On ne traitera pas le cas légèrement technique où cet ensemble est vide.) Soit a un produit de la forme $a_{i_p}^{\sigma_p} \cdots a_{i_1}^{\sigma_1}$, avec $\sigma_j = \pm 1$; on suppose que a est réduit (c'est-à-dire qu'il ne comporte jamais un générateur et son inverse placé côte à côte) et de longueur au moins 1. Alors une récurrence immédiate montre que $a(x) \in X_{i_p}^{\sigma_p}$; en particulier $a(x) \neq x$, d'où $a \neq 1$. $\square$

On va procéder ainsi : dans un premier temps, on va décrire la partie linéaire du groupe. On va construire un sous-groupe de $SO(2,1)$ qui joue au ping-pong sur la sphère unité $\mathbb{S}^2 = {}^{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}/_{\mathbb{R}_{>0}}$. On va ensuite le relever en un groupe de transformations affines qui lui est isomorphe, mais qui agit de façon proprement discontinue sur tout l'espace.

3.1 Géométrie de l'espace de Minkowski

L'*espace de Minkowski* (de signature $(2,1)$) est un espace affine $\mathbb{E}$ à 3 dimensions dont l'espace linéaire sous-jacent, noté $\mathbb{R}^{2,1}$, est muni d'une forme bilinéaire symétrique qui a la signature en question. Pour se fixer les idées, on va dire qu'il s'agit de la forme $\langle \bullet, \bullet \rangle$ définie par $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ (on l'appellera *forme de Minkowski*).

Les vecteurs de $\mathbb{R}^{2,1}$ sont de trois sortes :

- Les vecteurs de norme nulle, dits aussi *du genre lumière* (en utilisant la terminologie qui vient de la théorie de la relativité), et dont l'ensemble $C := \left\{ x \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle x, x \rangle = 0 \right\}$ est appelé le *cône isotrope* ou *cône de lumière*. Si on enlève 0, ce cône se décompose en deux composantes connexes : $C^+ = \{x \in C \mid x_3 > 0\}$, qu'appelle *cône du futur*, et $C^- := \{x \in C \mid x_3 < 0\}$, qu'on appelle *cône du passé*.
- Les vecteurs de norme négative sont dits *du genre temps*. L'ensemble de ces vecteurs $T := \left\{ x \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle x, x \rangle < 0 \right\}$ est l'intérieur du cône C (et se décompose donc aussi en deux composantes connexes).
- Les vecteurs de norme positive sont dits *du genre espace*. L'ensemble de ces vecteurs $S := \left\{ x \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle x, x \rangle > 0 \right\}$ est donc l'extérieur du cône C.

L'ensemble des isométries de $\mathbb{R}^{2,1}$, à savoir $O(2,1)$, laisse stables C, T et S. Ce groupe a quatre composantes connexes. Si on élimine les isométries indirectes (de déterminant -1), il reste $SO(2,1)$, qui a encore deux composantes connexes : les isométries qui laissent stables C^+ et C^-, et les isométries qui les échangent, par exemple $\mathrm{Diag}(1,-1,-1)$. On va travailler uniquement dans la première composante, notée $SO^0(2,1)$.

Considérons maintenant $g \in SO^0(2,1)$ un élément *hyperbolique*, c'est-à-dire à valeurs propres réelles et distinctes. On peut vérifier qu'il a alors pour valeurs propres λ, 1 et λ^{-1}, où λ est un certain réel positif; sans perte de généralité, $\lambda > 1$. Soient respectivement x^+, x^0 et x^- des vecteurs propres associés. De l'invariance de la forme de Minkowski par g, on déduit facilement que x^+ et x^- sont isotropes, et que x_g^0 est Minkowski-orthogonal aux deux. Remarquons que :

- Un vecteur propre n'est défini qu'à un scalaire près, mais pour résoudre cette ambiguïté, on va imposer que ces trois vecteurs soient de norme 1 (norme euclidienne, car la norme de Minkowski vaut de toute façon 0 pour deux des vecteurs), que $x^\pm \in C^+$ et que (x^-, x^+, x^0) soit une base directe. Il existe alors un unique triplet de vecteurs propres qui vérifie ces conditions, qu'on va appeler (x_g^-, x_g^+, x_g^0).
- Réciproquement, étant donné $\lambda > 1$ et $x^\pm \in C^+$ deux vecteurs distincts de norme 1, il existe une unique droite Minkowski-orthogonale à ces deux vecteurs, et donc une unique isométrie hyperbolique $g \in SO^0(2,1)$ de valeurs propres λ^{-1}, 1 et λ et telle que $x_g^\pm = x^\pm$.

3.2 Action d'une isométrie hyperbolique sur $\mathbb{S}^2$: la « balle de tennis »

En quotientant $\mathbb{R}^{2,1} \setminus \{0\}$ par le groupe des homothéties de rapport positif, on obtient une projection canonique $\pi : \mathbb{R}^{2,1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^2$. L'action de $SO^0(2,1)$ sur $\mathbb{R}^{2,1}$ est compatible avec cette projection, ce qui nous fournit une action de $SO^0(2,1)$ sur $\mathbb{S}^2$. Soit $g \in SO^0(2,1)$ hyperbolique; on va étudier en détail son action sur $\mathbb{S}^2$, pour pouvoir ensuite appliquer le lemme du ping-pong.

Soit $\mathcal{C} = \pi(C)$ l'image du cône isotrope sur $\mathbb{S}^2$. La partie $\mathcal{C}$ est alors la réunion des deux cercles $\mathcal{C}^\pm = \pi(C^\pm)$. On considère maintenant les deux demi-plans suivants :

$$H_g^+ := \left\{ a x_g^+ + b x_g^0 \;\middle|\; a \in \mathbb{R},\ b > 0 \right\}$$
$$H_g^- := \left\{ a x_g^- + b x_g^0 \;\middle|\; a \in \mathbb{R},\ b < 0 \right\},$$

et on pose $\mathcal{H}_g^\pm = \pi(H_g^\pm)$. D'après ce qui précède, H_g^+ (resp. H_g^-) se trouve dans le plan orthogonal à la droite engendrée par x_g^+ (resp. x_g^-). Or le plan orthogonal à une droite isotrope est toujours tangent au cône isotrope (il n'est pas difficile de s'en convaincre). Ainsi, on voit que $\mathcal{H}_g^+$ est un demi-grand-cercle, d'extrémités $\pi(x_g^+) \in \mathcal{C}^+$ et $\pi(-x_g^+) \in \mathcal{C}^-$, et qu'il est tangent à ces deux cercles en ces deux points.

Dans la suite, étant donné une partie P de la sphère $\mathbb{S}^2$ et un rayon $\varepsilon > 0$, on note $V(P,\varepsilon) := \left\{ x \in \mathbb{S}^2 \;\middle|\; d(x,P) \leq \varepsilon \right\}$ le ε-voisinage de P, où la distance $d(x,y)$ entre deux points sur la sphère correspond simplement à l'angle (euclidien) qui les sépare.

Proposition 9. *Soit $g \in SO^0(2,1)$ un élément hyperbolique, et $\varepsilon > 0$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on a $g^n(\mathbb{S}^2 \setminus V(\mathcal{H}_g^-, \varepsilon)) \subset V(\mathcal{H}_g^+, \varepsilon)$.*

L'image de la « balle de tennis » évoquée dans le titre fait référence à la partition de la sphère en $V(\mathcal{H}_g^{\pm}, \varepsilon)$ et son complémentaire.

Démonstration. Pour simplifier les calculs et éviter les détails techniques, on va faire la preuve dans le cas particulier où (x^-, x^+, x^0) est une base orthonormée (pour la norme euclidienne). En fait, le lecteur qui le souhaite pourra même garder cette hypothèse sur g pour toute la suite ; j'ai cependant préféré formuler un énoncé aussi général et naturel que possible. Soit $v = v_+x^+ + v_0x^0 + v_-x^- \in \mathbb{R}^{2,1}$. On appelle $P_g^+ := \mathbb{R}x^+ \oplus \mathbb{R}x^0$ le plan qui contient H_g^+, de même $P_g^- := \mathbb{R}x^- \oplus \mathbb{R}x^0$ le plan qui contient H_g^-, et $D_g^{\pm} := \mathbb{R}x^{\pm}$ les deux droites engendrées par $x^{\pm}$. On va distinguer deux cas :

- Si $v_0 \leq 0$, alors on a d'une part $d(\pi(v), \mathcal{H}_g^-) = d(\pi(v), \pi(P_g^-))$, d'où :
$$\begin{aligned} d(\pi(v), \mathcal{H}_g^-) \leq \varepsilon &\iff \angle(v, P_g^-) \leq \varepsilon \\ &\iff \frac{v_+^2}{v_0^2 + v_-^2} \leq (\tan\varepsilon)^2, \end{aligned}$$
et d'autre part $d(\pi(v), \mathcal{H}_g^+) = d(\pi(v), \pi(P_g^-))$, d'où :
$$\begin{aligned} d(\pi(v), \mathcal{H}_g^+) \leq \varepsilon &\iff \angle(v, D_g^+) \leq \varepsilon \\ &\iff \frac{v_+^2}{v_0^2 + v_-^2} \geq (\cot\varepsilon)^2. \end{aligned}$$
Posons $k(v) = \frac{v_+^2}{v_0^2+v_-^2}$; alors on a
$$k(g(v)) = \frac{\lambda^2 v_+^2}{v_0^2 + \lambda^{-2}v_-^2} \geq \lambda^2 \frac{v_+^2}{v_0^2 + v_-^2} = \lambda^2 k(v).$$
On voit donc que si $v \notin V(\mathcal{H}_g^-, \varepsilon)$, alors pour n suffisamment grand, $v \in V(\mathcal{H}_g^+, \varepsilon)$.
- Si $v_0 \geq 0$, notez que $(x_{g^{-1}}^-, x_{g^{-1}}^+, x_{g^{-1}}^0) = (x_g^+, x_g^-, -x_g^0)$, d'où $\mathcal{H}_{g^{-1}}^+ = \mathcal{H}_g^-$ et $\mathcal{H}_{g^{-1}}^- = \mathcal{H}_g^+$. Il suffit donc d'appliquer le même raisonnement à g^{-1}.

□

3.3 Sous-groupe libre de $SO(2,1)$

Etant donné deux points diamètralement opposés $c^+ \in \mathcal{C}^+$ et $c^- \in \mathcal{C}^-$, il y a deux demi-grands-cercles qui les relient en étant tangents à $\mathcal{C}$: en allant du « passé » vers le « futur », l'un — qu'on appellera un *arceau tangent droit* — tourne dans le sens positif, et l'autre — qu'on appellera un *arceau tangent gauche* — tourne dans le sens négatif. Un bref moment de réflexion convaincra le lecteur que de la condition « (x_g^-, x_g^+, x_g^0) est une base directe », il découle que $\mathcal{H}_g^+$ est un arceau tangent gauche, et donc $\mathcal{H}_g^- = \mathcal{H}_{g^{-1}}^+$ aussi.

Proposition 10. *Les arceaux tangents gauches sont tous deux à deux disjoints.*

Démonstration. On voit facilement que, étant donné deux arceaux tangents gauches $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, il existe (et elle est même unique) une isométrie hyperbolique $g \in SO^0(2,1)$ telle que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_g^+$ et $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_g^-$. Considérons les demi-plans correspondants, H_g^+ et H_g^- : de leur définition, il découle immédiatement qu'ils ne se rencontrent qu'en 0. La conclusion s'ensuit. □

Proposition 11. *Soient $g_1, \dots, g_k$ des éléments hyperboliques de $SO^0(2,1)$ en position générale, c'est-à-dire tels que les $x^{\pm}_{g_i}$ soient deux à deux distincts. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que le groupe $\langle g_1^N, \dots, g_k^N \rangle$ est libre sur $(g_1^N, \dots, g_k^N)$.*

Démonstration. Comme ces isométries sont en position générale, les $\mathcal{H}^{\pm}_{g_i}$ sont deux à deux distincts, et donc, d'après ce qu'on vient de voir, deux à deux disjoints. Ces ensembles étant compacts, il existe $\varepsilon > 0$ tel que leurs ε-voisinages sont encore deux à deux disjoints. Choisissons $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que la conclusion de la proposition 9 soit vérifiée pour cette valeur de ε et pour chacun des g_i. Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme du ping-pong avec $X = \mathbb{S}^2$ et $X_i^{\pm} = V(\mathcal{H}^{\pm}_{g_i}, \varepsilon)$. □

3.4 Construction du groupe affine

Avec les notations de la proposition précédente, on pose

$$h_i \in \mathbb{R}^{2,1} \rtimes SO(2,1) : \quad x \mapsto g_i^N(x) + 2x^0_{g_i}.$$

Démonstration du théorème 7. Je prétends que le groupe $\Gamma := \langle h_1, \dots, h_k \rangle$ possède les propriétés requises.

D'une part, il est clairement libre sur $(h_1, \dots, h_k)$ car la projection canonique $\phi : \mathbb{R}^{2,1} \rtimes SO(2,1) \to SO(2,1)$ induit un isomorphisme de Γ sur le groupe libre $\langle g_1^N, \dots, g_k^N \rangle$.

Pour $1 \leq i \leq k$ et $\sigma = \pm 1$, on introduit à présent le cône issu de $\sigma x^0_{g_i}$ de base $V(\mathcal{H}^{\sigma}_{g_i}, \varepsilon)$:

$$\tilde{X}_i^{\sigma} := \left\{ x \in \mathbb{R}^{2,1} \;\middle|\; x = \sigma x^0_{g_i} \text{ ou } \pi(x - \sigma x^0_{g_i}) \in V(\mathcal{H}^{\sigma}_{g_i}, \varepsilon) \right\}.$$

Il est facile de vérifier qu'il est inclus dans $\pi^{-1}(V(\mathcal{H}^{\sigma}_{g_i}, \varepsilon))$, le cône de même base issu de 0, et que donc les $\tilde{X}_i^{\sigma}$ sont deux à deux disjoints. De ce qui précède, il découle que pour tout i, on a

$$h_i(\mathbb{R}^{2,1} \setminus \tilde{X}_i^-) \subset \tilde{X}_i^+.$$

On va raffiner un peu cette construction : on va choisir une famille d'ouverts $X_i^{\pm}$ tels que pour tout i,

$$\begin{cases} X_i^+ \subset \tilde{X}_i^+ \\ X_i^- \subset \tilde{X}_i^- \\ h_i(\mathbb{R}^{2,1} \setminus X_i^-) = \overline{X_i^+} \end{cases}$$

(par exemple $X_i^- = \mathring{\tilde{X}}_i^-$, $\;X_i^+ = h_i(\mathbb{R}^{2,1} \setminus \tilde{X}_i^-)$ convient). On pose par ailleurs

$$X_0 := \mathbb{R}^{2,1} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k X_i^- \cup X_i^+ \right).$$

Les $X_i^{\pm}$ sont évidemment encore tous deux à deux disjoints. Par le même argument que la démonstration du lemme du ping-pong, on trouve alors que pour tout $\gamma \in \Gamma$, γX_0 est d'intérieur disjoint avec X_0, et donc les γX_0 sont deux à deux d'intérieurs disjoints. D'autre part, comme on a une égalité et pas seulement une inclusion, on obtient que tout point sur le bord de X_0 appartient aussi à l'un des $g_i^{\pm} X_0$, d'où il découle que $X_\Gamma := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma X_0$ est un ouvert. Alors Γ agit sur X_Γ de façon proprement discontinue (on peut vérifier que tout compact $K \subset X_\Gamma$ ne rencontre qu'un nombre fini de régions γX_0), avec X_0 pour domaine fondamental. La conclusion repose alors sur le résultat suivant :

Proposition 12.

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma X_0 = \mathbb{R}^{2,1}.$$

La démonstration est longue, difficile et technique, et n'a pas sa place ici ; on va se contenter de l'esquisser. Supposons le contraire : il existe alors une demi-droite Δ dont l'origine se trouve dans X_0 et qui n'est pas entièrement contenue dans X_Γ. Comme X_Γ est ouvert, en avançant le long de Δ, on va donc rencontrer successivement une infinité de régions $\gamma_0 X_0, \gamma_1 X_0, \gamma_2 X_0, \ldots$ avec $\gamma_0 = e$ et pour tout k, $\gamma_{k+1} = \gamma_k g_{i_k}^{\sigma_k}$ pour un certain indice i_k et signe σ_k. L'idée générale (en simplifiant un peu) consiste à trouver un critère sur γ_k qui assure que l'intersection de $\gamma_k X_0$ avec Δ est de longueur minorée par une constante, puis à montrer que ce critère est vérifié pour une infinité de valeurs de k. □

4 Autres résultats connus et questions ouvertes

Dans [3], les auteurs ont en fait découvert toute une famille de contre-exemples à la conjecture de Milnor :

Proposition 13 ([3])**.** *Pour tout n impair, il existe un sous-groupe libre Γ proprement discontinu de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{2n+1})$ de partie linéaire Zariski-dense dans $SO(n+1, n)$.*

Leur preuve ne fait pas apparaître explicitement un domaine fondamental ; mon objectif immédiat, c'est de généraliser la construction de la section précédente à la dimension $4k + 3$ pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque (la partie délicate étant évidemment la proposition 12). L'étude de ces contre-exemples est intéressante, car si jamais on arrivait à les classifier complètement, on obtiendrait par la même occasion la réponse à la question d'Auslander.

Mais on dispose tout de même de plusieurs résultats qui vont dans le sens de la conjecture, qu'on va citer ici sans démonstration :

Proposition 14 ([3])**.** *Pour n pair, il n'existe pas de sous-groupe Γ proprement discontinu de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{2n+1})$ de partie linéaire Zariski-dense dans $SO(n+1, n)$.*

Proposition 15 ([2])**.** *Pour p, q entiers naturels avec $|p-q| \neq 1$, il n'existe pas de sous-groupe Γ proprement discontinu de $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^{p+q})$ de partie linéaire Zariski-dense dans $SO(p, q)$.*

Proposition 16 ([2])**.** *La conjecture de Auslander est vraie en dimension $n \leq 6$.*

Références

[1] H. Abels, *Properly discontinuous groups of affine transformations, a survey*, Geom. Dedicata 87 (2001) 309–333

[2] H. Abels, G. A. Margulis and G. A. Soifer, *Properly discontinuous groups of affine transformations with orthogonal linear part*, C. R. Acad. Sci. Paris (I) 324 (1997) 253–258

[3] H. Abels, G. A. Margulis and G. A. Soifer, *On the Zariski closure of the linear part of a properly discontinuous group of affine transformations*, J. Differential Geom. Volume 60, Number 2 (2002) 315–344

[4] L. Auslander, *The structure of compact locally affine manifolds*, Topology 3 (1964) 131–139

[5] Y. Benoist, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie*, cours donné à Luminy en juillet 1997 (non publié).

[6] V. Charette and W. M. Goldman, *Affine Schottky groups and crooked tilings*, Contemporary Mathematics 262 (2000) 69–90

[7] G. A. Margulis, *Free properly discontinuous groups of affine transformations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 272 (1983) 937–940

[8] J. Milnor, *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Adv. in Math. 25 (1977) 178–187