Techniques de déformation/rigidité pour les algèbres de von Neumann

Rémi BOUTONNET,

Sous la direction de Cyril HOUDAYER

29 juin 2011

Introduction

Ce texte a pour but de présenter les techniques développées dans la dernière décennie par S. Popa ([Pop06a, Pop06b, Pop06c]) afin d'obtenir des informations structurelles sur les algèbres de von Neumann. La stratégie est simple : déformer une algèbre de von Neumann et regarder la partie "qui ne bouge pas". On peut alors localiser certaines sous-algèbres rigides de M. Des résultats majeurs sont ressortis de cette méthode, comme le fait que l'algèbre de von Neumann de certaines actions (d'un groupe sur un espace mesuré) se souvienne entièrement de l'action, ou comme le calcul du groupe fondamental de certaines algèbres de von Neumann, un invariant jusqu'alors très mal connu. On ne saurait que trop conseiller l'article [Vae07] au lecteur désireux d'en apprendre plus sur ces résultats.

Même si la souplesse des algèbres de von Neumann fournit un contexte parfaitement adapté à cette stratégie de déformation/rigidité, il ne semble pas impossible de pouvoir adapter l'approche à d'autres domaines des mathématiques, la difficulté principale étant de trouver la bonne notion de rigidité.

1 Généralités sur les algèbres de von Neumann

1.1 Définitions

On notera H un espace de Hilbert complexe séparable (de dimension infinie), et $B(H)$ l'espace des opérateurs bornés (*i.e.* des applications linéaires continues) sur H.

On peut munir $B(H)$ de la topologie provenant de la norme d'opérateurs aussi appelée *norme infinie* $\| \cdot \|_\infty$, qui en fait une algèbre de Banach. Cependant, une topologie de $B(H)$ plus appropriée pour la suite est la *topologie faible*, induite par les semi-normes $x \in B(H) \mapsto |\langle x\xi, \eta \rangle|$, avec $\xi, \eta \in H$.

Définition 1.1.1. Une *algèbre de von Neumann* sur H est une sous-algèbre involutive de $B(H)$ [1] qui est fermée pour la topologie faible et qui contient l'opérateur identité, noté 1.

Un *facteur* est une algèbre de von Neumann M dont le centre $\mathcal{Z}(M) = M \cap M'$ [2] est

1. L'involution sur $B(H)$ est celle donnée par l'adjoint ($T \in B(H) \mapsto T^* \in B(H)$).
2. M' désigne le *commutant* de M : $M' = \{x \in B(H) \,|\, \forall y \in M, xy = yx\}$.

trivial (*i.e.* $\mathcal{Z}(M) = \mathbb{C}$).

Le théorème crucial suivant donne tout leur intérêt aux algèbres de von Neumann, offrant une caractérisation purement algébrique de ces objets de nature à priori topologique.

Théorème 1.1.2 (Théorème du bicommutant de von Neumann)**.** *Soit M une sous algèbre involutive unifère de $B(H)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

*(i) M est faiblement fermée (*i.e.* M est une algèbre de von Neumann).*

(ii) M est égale à son bicommutant : $M = M''$.

Une algèbre de von Neumann M est dite *finie* si toute isométrie $v \in M$ est surjective (et est donc un unitaire). Algébriquement : $\forall v \in M$, $v^*v = 1 \Rightarrow vv^* = 1$.

On peut montrer qu'une algèbre de von Neumann est finie *ssi* elle admet une *trace* fidèle normale $\tau : M \to \mathbb{C}$, c'est à dire une forme linéaire sur M vérifiant :
- τ est positive : $\tau(x^*x) \geq 0$, pour tout $x \in M$;
- C'est une trace : $\tau(xy) = \tau(yx)$, $x, y \in M$;
- Elle est fidèle : $\forall x \in M$, $\tau(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$;
- Elle est normale : La restriction de τ à la boule unité de M (pour la norme infinie) est continue pour la topologie faible.

Un facteur est dit de *type II_1* si c'est une algèbre de von Neumann finie, de dimension infinie. Dans ce cas il admet une unique trace fidèle normalisée ($\tau(1) = 1$).

Définition 1.1.3. Si M et N sont deux algèbres de von Neumann, un *morphisme* (d'algèbres de von Neumann) de M dans N est un morphisme d'algèbres $\Phi : M \to N$ qui préserve l'involution et dont la restriction à la boule unité (pour la norme infinie) est faiblement continue. Cette dernière condition est toujours vérifiée si l'image de Φ est une algèbre de von Neumann. Un morphisme bijectif est appelé *isomorphisme*.

À ce jour, la classification des algèbres de von Neumann à isomorphisme près repose en grande partie sur la compréhension des facteurs de type II_1.

1.2 Quelques constructions

Commençons par quelques exemples importants d'algèbres de von Neumann :

Exemples 1.2.1.
1. $B(H)$ est un facteur, mais il n'est pas de type II_1 : il est facile de construire une isométrie non surjective sur H.
2. Soit (X, μ) un espace de probabilité standard. Alors $L^\infty(X, \mu)$ agit sur $L^2(X, \mu)$ par multiplication et c'est une sous-algèbre de von Neumann de $B(L^2(X, \mu))$. La topologie faible correspond à la convergence presque partout, et μ est une trace fidèle normale normalisée sur $L^\infty(X, \mu)$ [3].

   Toute algèbre de von Neumann abélienne est de cette forme.
3. Soit Γ un groupe discret dénombrable. On définit la représentation régulière gauche $\lambda : \Gamma \to B(l^2(\Gamma))$ par $\lambda_s(\delta_t) = \delta_{st}$ pour $s, t \in \Gamma$. L'*algèbre de von Neumann du groupe* Γ est alors l'algèbre de von Neumann

   $$L(\Gamma) := \{\lambda_s \,|s \in \Gamma\}''.$$

   C'est une algèbre finie, munie de la trace $\tau(\cdot) = \langle \cdot \, \delta_e, \delta_e \rangle$. On vérifie que c'est un facteur *ssi* les classes de conjugaison non triviales de Γ sont infinies (Γ est dit *ICC*).

3. Le caractère normal de μ découle du théorème de convergence dominée.

4. On note $\mathcal{S}_\infty$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}$ à support fini. Alors $R := L(\mathcal{S}_\infty)$ est un facteur de type II_1 dit *hyperfini*, au sens où il existe une suite de sous-algèbres involutives de dimensions finies $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ici $A_n = L(\mathcal{S}_n)$) telles que $R = (\cup_n A_n)''$. À isomorphisme près, il y a unicité du facteur hyperfini de type II_1.

Tous les groupes considérés par la suite seront discrets et dénombrables.

Avant de se pencher sur les questions naturelles soulevées par ces exemples, voyons quelques constructions standard d'algèbres de von Neumann.

Produit tensoriel. Si $M_1 \subset B(H_1)$ et $M_2 \subset B(H_2)$ sont deux algèbres de von Neumann, on définit $M_1 \overline{\otimes} M_2 \subset B(H_1 \otimes H_2)$ par $M_1 \overline{\otimes} M_2 = (M_1 \otimes_{alg} M_2)''$, où le produit tensoriel algébrique de M_1 et M_2 est représenté sur $H_1 \otimes H_2$ par

$$(\sum_{i=1}^{n} S_i \otimes T_i)(\xi \otimes \eta) = \sum_{i=1}^{n} S_i(\xi) \otimes T_i(\eta).$$

Si M_1 et M_2 sont des facteurs, alors $M_1 \overline{\otimes} M_2$ est un facteur.

Produit croisé. Si Γ est un groupe agissant en préservant la mesure sur un espace de probabilité standard (X, μ). On définit alors une action σ de Γ sur $L^\infty(X, \mu)$ (resp. $L^2(X, \mu)$) par $\sigma_s(F)(x) = F(s^{-1}x)$, $\forall F \in L^\infty(X, \mu)$ (resp. $F \in L^2(X, \mu)$). Le *produit croisé* $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ comme l'algèbre de von Neumann sur l'espace de Hilbert $H := L^2(X, \mu) \otimes l^2(\Gamma)$ engendrée par :

- Une copie de $L^\infty(X, \mu)$: $L^\infty(X, \mu) \overline{\otimes} 1$, encore notée $L^\infty(X, \mu)$;
- Les unitaires $u_s = \sigma_s \otimes \lambda_s$, $s \in \Gamma$ qui vérifient $u_s u_t = u_{st}$, $u_s F u_s^* = \sigma_s(F)$, $s, t \in \Gamma$, $F \in L^\infty(X, \mu)$.

Nous avons donc

$$L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma \simeq \{\sum_{finie} a_s u_s \,|\, a_s \in L^\infty(X, \mu)\}'' \subset B(L^2(X, \mu) \otimes l^2(\Gamma)).$$

Remarque 1.2.2. L'unitaire $u \in B(L^2(X, \mu) \otimes l^2(\Gamma))$ défini par $u(f \otimes \delta_s) := \sigma_{s^{-1}}(f) \otimes \delta_s$, $s \in \Gamma$, $f \in L^2(X, \mu)$ implémente par conjugaison un isomorphisme entre les algèbres de von Neumann $\{u_s \,|\, s \in \Gamma\}''$ et $1 \otimes L(\Gamma)$. Ce résultat est appelé "principe d'absorption de Fell".

Définition 1.2.3. Une action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est *libre* si $\mu(\{x \in X \,|\, s \cdot x = x\}) = 0$ pour tout $s \in G \setminus \{e\}$. Elle est *ergodique* si les seuls ensembles mesurables invariants par l'action de Γ sont de mesure égale à 0 ou 1.

Proposition 1.2.4. *Si l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est libre alors $L^\infty(X, \mu)$ est une sous-algèbre de Cartan de $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ (*cf.* P1 à la fin de cette section). Si de plus elle est ergodique alors le produit croisé $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ est un facteur.*

Nous appellerons désormais action toute action libre ergodique qui préserve la mesure.

Les algèbres de von Neumann données par ces divers exemples et constructions sont encore mystérieuses, au sens où il est difficile de savoir quelles informations sur le groupe ou l'action dont on est parti sont conservées. Illustrons ce propos par quelques questions qui n'ont aujourd'hui encore que des réponses partielles.

Q1 *Si Γ et Λ sont deux groupes, dans quels cas a t'on $L(\Gamma) \simeq L(\Lambda)$?*
A. Connes a montré ([Con76]) que si Γ est un groupe moyennable ICC, alors $L(\Gamma)$ est toujours isomorphe au facteur hyperfini de type II_1 (et la réciproque est vraie). Toutes les autres informations sur Γ sont oubliées ! À l'opposé, il existe ([IPV]) des groupes dits *W^*-superrigides* (un groupe Γ est dit W^*-superrigide si tout groupe Λ tel que $L(\Gamma) \simeq L(\Lambda)$ est en fait isomorphe à Γ). Une question ouverte qui suscite depuis toujours un grand intérêt, et qui a notamment permis de développer la théorie des probabilités non-commutatives est de déterminer si $L(\mathbb{F}_2) \simeq L(\mathbb{F}_3)$ ($\mathbb{F}_n$ désigne le groupe libre à n générateurs).

Q2 *Dans le même esprit, est-ce que deux actions $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ sont conjuguées dès que les produits croisés sont isomorphes ?*
Cette question fait l'objet de la section 2.

Q3 *Est-ce que tout facteur de type II_1 est hyperfini ?*
Non, l'algèbre d'un groupe libre $L(\mathbb{F}_n)$, $n \geq 2$ n'est pas hyperfinie ([MvN43]), mais c'est bien un facteur de type II_1 (Γ est évidemment ICC).

Q4 *Est-ce que tout facteur de type II_1 est isomorphe à un $L(\Gamma)$? ou à un $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$?*
La réponse à la première question est négative, un contre-exemple a été donné par A. Connes ([Con75]). Pour la deuxième question, on a en fait des exemples plus généraux de facteurs $L(\mathcal{R})$ construits à partir de certaines relations d'équivalence $\mathcal{R} \subset X \times X$ sur un espace standard X. D. Voiculescu a montré ([Voi96]) que $L(\mathbb{F}_n)$ n'est pas isomorphe à un $L(\mathcal{R})$ ($L(\mathbb{F}_n)$ ne vérifie pas la propriété P1 ci-dessous). Cependant, il n'a encore été donné aucun exemple de facteur de type II_1 qui ne provienne ni d'un groupe, ni d'une relation d'équivalence. Récemment, A. Ioana a construit ([Ioa]) un exemple d'algèbre qui n'est ni un produit croisé, ni l'algèbre de von Neumann d'un groupe sans torsion.

La majorité des réponses aux questions précédentes ont été obtenues en étudiant les propriétés suivantes relatives à une algèbre de von Neumann M, et invariantes par isomorphisme.

P1 L'algèbre M admet une sous-algèbre de *Cartan*, c'est à dire une sous-algèbre de von Neumann A qui est maximale abélienne (*i.e.* $A' \cap M = A$) et régulière (*i.e.* $\mathcal{N}_M(A)'' = M$ [4]).

P2 L'algèbre M est *première* : Elle ne peut pas s'écrire comme le produit de deux algèbres de von Neumann diffuses (*i.e.* sans projections minimales).

P3 M est *solide* : Si $A \subset M$ est diffuse, alors le commutant relatif $A' \cap M$ est hyperfini. Une algèbre non-hyperfinie et solide est première.

P4 M vérifie une propriété d'approximation du type moyennabilité (*i.e.* M est hyperfinie) ou plus généralement *propriété de Haagerup* : Dans le cas où $M = L(\Gamma)$, cela signifie qu'il existe une suite (φ_i) de fonctions de type positif sur Γ qui converge ponctuellement vers la fonction constante égale à 1, et pour tout i, φ_i tend vers 0 à l'infini.).

P5 M est *rigide*, *i.e.* a la propriété (T) (définition 2.2.6).

Pour étudier ou exploiter ces propriétés, S. Popa a développé une stratégie, que nous allons tenter d'expliquer.

4. $\mathcal{N}_M(A) = \{u \in \mathcal{U}(M) \mid uAu^* = A\}$ désigne le normalisateur de A dans M.

2 Techniques de déformation/rigidité de Popa

2.1 L'objectif global

Nous allons illustrer l'approche de Popa avec un problème de classification des actions (libres, ergodiques et préservant la mesure) de groupes sur un espace standard. C'est pour résoudre ce problème que les techniques de déformation/rigidité ont été mises au point.

Définition 2.1.1. Deux actions $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ sont dites :

- *Conjuguées* s'il existe un isomorphisme de groupes $\phi : \Gamma \to \Lambda$ et un isomorphisme d'espaces mesurés (*i.e.* bimesurable préservant la mesure) $\Delta : X \to Y$ tels que $\Delta(s \cdot x) = \phi(s) \cdot \Delta(x)$, $\forall x \in X, s \in \Gamma$.
- *Orbitalement équivalentes* s'il existe un isomorphisme d'espaces mesurés $\Delta : X \to Y$ qui envoie les orbites de l'action de Γ sur les orbites de l'action de Λ : $\Delta(\Gamma \cdot x) = \Lambda \cdot \Delta(x)$, $\forall x \in X$.
- *von Neumann équivalentes*, ou *W^*-équivalents* si les produits croisés de ces actions sont isomorphes : $L^\infty(X,\mu) \rtimes \Gamma \simeq L^\infty(Y,\nu) \rtimes \Lambda$.

On peut alors vérifier que ces équivalences sont de plus en plus faibles :

$$\text{conjugaison} \Rightarrow \text{équivalence orbitale} \Rightarrow W^*\text{-équivalence}.$$

Les implications réciproques sont fausses en général : Toutes les actions de groupes moyennables sont orbitalement équivalentes ([OW80]), et A. Connes et V. Jones ont donné dans [CJ82] un exemple d'actions W^*-équivalentes mais non orbitalement équivalentes. Leur construction repose sur le théorème suivant.

Théorème 2.1.2 (Feldman-Moore, [FM77]). *Deux actions $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ sont orbite-équivalentes* ssi *il existe un isomorphisme $\Phi : L^\infty(X,\mu) \rtimes \Gamma \to L^\infty(Y,\nu) \rtimes \Lambda$ entre les produits croisés tel que $\Phi(L^\infty(X,\mu)) = L^\infty(Y,\nu)$.*

Ce théorème donne donc une piste pour remonter depuis la W^*-équivalence jusqu'à l'équivalence orbitale : regarder les sous-algèbres de Cartan d'un produit croisé. Mais ceci est un problème difficile, et en pratique on aura besoin d'hypothèses de rigidité sur les objets de départ.

Pour remonter de l'orbite équivalence jusqu'à la conjugaison, une idée est d'utiliser la cohomologie des cocycles :

Définition 2.1.3. Un *cocycle* associé à une action $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ et à valeurs dans un groupe Λ est une application $\gamma : \Gamma \times X \to \Lambda$ telle que $\gamma(st,x) = \gamma(s,t\cdot x)\gamma(t,x)$, pour tous $s,t \in \Gamma$ et $x \in X$. Deux cocycles γ_1 et γ_2 sont *cohomologues* s'il existe $\omega : X \to \Lambda$ telle que $\gamma_1(s,x) = \omega(s\cdot x)\gamma_2(s,x)\omega(x)^{-1}$, $\forall (s,x) \in \Gamma \times X$.

Si deux actions $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ et $\Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ sont orbitalement équivalentes, on définit le *cocycle de Zimmer* comme le cocycle $\gamma : \Gamma \times X \to \Lambda$ tel que $\Delta(s\cdot x) = \gamma(s,x)\cdot\Delta(x)$, où Δ est comme dans la définition de l'équivalence orbitale [5]. Il est alors facile de voir que les actions sont conjuguées *ssi* leur cocycle de Zimmer est cohomologue à un cocycle qui ne dépend pas de la variable en x (*i.e.* un morphisme de groupes $\Gamma \to \Lambda$).

5. Noter que le cocycle de Zimmer est bien défini presque partout, car l'action $\Lambda \curvearrowright (Y,\nu)$ est libre.

Les techniques de déformation rigidité ont permis de trouver (*e.g.* [PV10]) des exemples d'actions W^*-superrigides, c'est à dire des actions $\sigma : \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ telles que **toute** action $\Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ vérifiant $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma \simeq L^\infty(Y, \nu) \rtimes \Lambda$ est en fait conjuguée à σ.
Le schéma de construction de telles actions suit exactement la procédure décrite ci-dessus : D'abord on remonte à l'équivalence orbitale par un résultat d'unicité de sous-algèbres de Cartan dans le produit croisé, et ensuite on déduit la conjugaison en montrant que tout cocycle associé à σ est cohomologue à un morphisme.

Dans ce mémoire, nous allons donner l'idée de preuve d'un résultat moins fort, mais plus abordable. Il s'agit du théorème ci-dessous, qui est le premier résultat majeur qui est ressorti des techniques de déformation/rigidité, et également le premier théorème où l'on arrive à déduire la conjugaison d'actions à partir d'un isomorphisme entre leur produits croisés.

Définition 2.1.4. Soient Γ un groupe discret dénombrable et (X_0, μ_0) un espace de probabilité standard. On appelle *action de Bernoulli* l'action de Γ sur $(X, \mu) := \prod_\Gamma (X_0, \mu_0)$ obtenue par décalage : Pour $s \in \Gamma$, $s \cdot (x_t)_{t \in \Gamma} = (x_{s^{-1}t})_{t \in \Gamma}$. L'espace (X_0, μ_0) est appelé *espace base* pour cette action.

C'est une action libre ergodique dès que l'espace base n'est pas réduit à un atome et que Γ est infini.

Théorème 2.1.5 (Popa, [Pop06c])**.** *Soient Γ un groupe ICC, (X_0, μ_0) un espace de probabilité standard et $\Gamma \curvearrowright \prod_\Gamma (X_0, \mu_0) =: (X, \mu)$ l'action de Bernoulli associée. Si Λ est un groupe avec la propriété (T) (*cf. *2.2.7) et $\Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ est une action telle que*

$$L^\infty(Y, \nu) \rtimes \Lambda \simeq L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma,$$

alors $\Lambda \simeq \Gamma$ et les actions sont conjuguées.

2.2 Les principales techniques : *La théorie*

Nous présentons ici les définitions des notions de déformation et de rigidité.

Définition 2.2.1. Soit M une algèbre de von Neumann. Un élément $x \in M$ est dit *positif* s'il existe $a \in M$ tel que $x = a^*a$.

Pour K un espace de Hilbert, une application linéaire $\phi : M \to B(K)$ est dite *complètement positive* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $\phi \otimes id_n : M \overline{\otimes} M_n(\mathbb{C}) \to B(K) \overline{\otimes} M_n(\mathbb{C})$ est positive (*i.e.* envoie éléments positifs sur éléments positifs).

Exemples 2.2.2. Les morphismes d'algèbres qui préservent l'involution (ou $*$-*morphismes*) sont des applications complètement positives (si $\phi : M \to B(K)$ est un $*$-morphisme, alors $\phi^{(n)} := \phi \otimes id_n$ est aussi un $*$-morphisme et donc positif : $\phi^{(n)}(a^*a) = \phi^{(n)}(a)^* \phi^{(n)}(a)$). Plus généralement, toute application de la forme $\phi(x) = V^* \pi(x) V$, pour π un $*$-morphisme et V une application linéaire continue entre deux espaces de Hilbert est complètement positive. En fait, toute application complètement positive est de cette forme.
On vérifie enfin que toute forme linéaire positive est complètement positive.

Pour toute algèbre finie M munie d'une trace τ, on note $\|a\|_2 = \tau(a^*a)$ la norme "hilbertienne" d'un élément $a \in M$. Si M est un facteur, τ est l'unique trace normalisée.

Définition 2.2.3 (Déformation)**.** Une *déformation* d'une algèbre finie (M, τ) est une suite d'applications complètement positives $\phi_n : M \to M$ unifères ($\phi_n(1) = 1$) préservant la trace, qui converge ponctuellement en norme $\|\cdot\|_2$ vers id_M :

$$\forall x \in M, \lim_n \|\phi_n(x) - x\|_2 = 0.$$

Voyons quelques exemples classiques de déformations (un exemple supplémentaire est fourni dans la section suivante).

Exemples 2.2.4.
- Si Γ est un groupe et $(\varphi_n : \Gamma \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de type positif[6] telle que $\varphi_n \to 1$ simplement, alors $L(\Gamma)$ admet une déformation (ϕ_n), où pour tout $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n est l'unique application complètement positive telle que $\phi_n(\lambda_s) = \varphi_n(s)\lambda_s$, $\forall s \in \Gamma$.
  Noter que si Γ agit sur un espace standard (X, μ), on obtient de la même manière une déformation du produit croisé $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$.
- Soit R le facteur hyperfini de type II_1 et $A_n \nearrow R$ une suite de sous-algèbres involutives de dimensions finies. La trace normalisée τ sur R permet de définir un produit scalaire $(x, y) \in R \mapsto \tau(xy^*)$ et on note $L^2(R)$ l'espace de Hilbert obtenu par complétion de R pour ce produit scalaire. Pour tout n, on note $E_n : L^2(R) \to L^2(A_n)$ la projection orthogonale. Il s'avère que $E_n(R) = A_n \subset R$ et la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fournit une déformation de R.

Définition 2.2.5. L'application $E_n : R \to A_n$ dans l'exemple ci-dessus est appelée *espérance conditionnelle* de R sur A_n. Cette construction est valable pour toute algèbre de von Neumann finie M et toute sous-algèbre $N \subset M$. L'espérance conditionnelle $E_N : M \to N$ est N-bimodulaire ($E_N(axb) = aE_N(x)b$ pour tous $a, b \in N$, $x \in M$), normale, complètement positive, et préserve la trace.

Définition 2.2.6 (Rigidité)**.** Soit (M, τ) une algèbre de von Neumann finie. Une sous-algèbre de von Neumann $Q \subset M$ est dite *rigide* si toute déformation de M converge uniformément (en norme $\|\cdot\|_2$) sur la boule unité (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) de Q. Si $Q = M$ est rigide, on dit que M à la *propriété (T)*.

La proposition suivante peut être prise comme une définition de la propriété (T) de Kazhdan pour les groupes discrets dénombrables, et de la propriété (T) relative.

Proposition 2.2.7. *Si $M = L(\Gamma)$ pour un groupe Γ, alors M a la propriété (T)* ssi *Γ a la propriété (T) de Kazhdan. De même, si $\Lambda \subset \Gamma$ est un sous-groupe, alors $L(\Lambda) \subset L(\Gamma)$ est rigide* ssi *$\Lambda \subset \Gamma$ a la propriété (T) relative.*

Exemples 2.2.8. Les groupes finis ont la propriété (T) (ce sont les seuls groupes discrets à être moyennables et avoir la propriété (T)) ; pour $n \geq 3$, $SL_n(\mathbb{Z})$ a la propriété (T). L'inclusion $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ a la propriété (T) relative.

Remarque 2.2.9. On peut montrer que si Q est une algèbre avec la propriété (T), alors pour toute algèbre de von Neumann contenant une sous-algèbre $\tilde{Q}$ isomorphe à Q, l'inclusion $\tilde{Q} \subset M$ est rigide.

Comme expliqué dans l'introduction, l'idée générale qui a motivé ces définitions est de localiser certaines sous-algèbres d'une algèbre de von Neumann M en "secouant" et en regardant la partie qui "ne bouge pas". Cette partie devrait correspondre à la partie rigide de M, au sens des définitions ci-dessus. Voyons comment s'applique cette idée en pratique.

6. Une fonction $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ est *de type positif* si pour toute famille finie $s_1, \cdots, s_p \in \Gamma$, la matrice $\varphi(s_i^{-1}s_j)_{i,j} \in M_p(\mathbb{C})$ est positive.

2.3 Les principales techniques : *La pratique*

Nous allons donner les principales étapes de la preuve du théorème 2.1.5. Reprenons les notations et hypothèses de ce théorème : Γ est un groupe ICC qui agit par translation de Bernoulli sur le produit $(X,\mu) = \prod_\Gamma (X_0,\mu_0)$, et Λ est un groupe avec la propriété (T) agissant sur un espace (Y,μ) de sorte qu'il existe un isomorphisme $\theta : L^\infty(Y) \rtimes \Lambda \to L^\infty(X) \rtimes \Gamma$. Nous supposerons que (X_0,μ_0) est non atomique.

Pour commencer, remarquons qu'une action de Bernoulli induit une déformation d'une certaine algèbre de von Neumann.

Exemple 2.3.1. Si $\Gamma \curvearrowright (X,\mu) = \prod_\Gamma (X_0,\mu_0)$ est une action de Bernoulli, on note σ l'action sur $L^\infty(X,\mu)$ correspondante. Γ agit diagonalement (via $\sigma \otimes \sigma$) sur le produit tensoriel $L^\infty(X)\overline{\otimes}L^\infty(X)$ qui provient simplement de l'action de Bernoulli sur $X \times X$ et on obtient une déformation du produit croisé $(L^\infty(X)\overline{\otimes}L^\infty(X)) \rtimes \Gamma$ comme suit :

- Comme (X_0,μ_0) est sans atome, on peut construire une action continue (α_t^0) de $\mathbb{R}$ sur $X_0 \times X_0$ qui "permute les variables" sur $X_0 \times X_0$: $\alpha_0^0 = id$ et $\alpha_1^0(x,y) = (y, f(x,y))$, où $f : X_0 \times X_0 \to X_0$ est une fonction quelconque ;
- l'action $(\prod_\Gamma \alpha_t^0)$ de $\mathbb{R}$ sur $X \times X$ commute à l'action de Bernoulli, et donne ainsi une action notée (α_t) sur $L^\infty(X)\overline{\otimes}L^\infty(X) \simeq L^\infty(X \times X, \mu \otimes \mu)$ qui commute à l'action $\sigma \otimes \sigma$ de Γ et vérifie $\alpha_0 = id$, $\alpha_1(a \otimes 1) = 1 \otimes a$, $a \in L^\infty(X)$;
- on étend alors (α_t) en une action encore notée (α_t) de $\mathbb{R}$ sur $(L^\infty(X)\overline{\otimes}L^\infty(X)) \rtimes \Gamma$, en posant $\alpha_t(u_s) = u_s$, $\forall s \in \Gamma$, $t \in \mathbb{R}$.

La suite $(\Phi_n := \alpha_{1/n})_n$ fournit alors une déformation au sens donné précédemment mais gardons plutôt en tête qu'on a une déformation continue qui permet de passer de l'identité à un morphisme qui envoie $(L^\infty(X)\overline{\otimes}1) \rtimes \Gamma$ sur $(1\overline{\otimes}L^\infty(X)) \rtimes \Gamma$ (On dit que l'action de Bernoulli est malléable).

Maintenant nous pouvons donner l'idée principale de la première étape du théorème 2.1.5 : Montrer la conjugaison des sous-algèbres de Cartan $L^\infty(X)$ et $L^\infty(Y)$ pour remonter jusqu'à l'équivalence orbitale.

Fait : La sous-algèbre rigide $Q := \theta(L(\Lambda)) \subset L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ est incluse dans $L(\Gamma)$, à conjugaison par un unitaire près.

Une fois ce fait prouvé, un travail assez technique (et moins dans le thème de la déformation/rigidité) permet de montrer que les algèbres de Cartan $\theta(L^\infty(Y))$ et $L^\infty(X)$ sont effectivement conjuguées.

Pour montrer ce fait, l'idée est de considérer le facteur $\tilde{M} := (L^\infty(X)\overline{\otimes}L^\infty(X)) \rtimes \Gamma$ avec la déformation (α_t) donnée dans l'exemple 2.3.1 ci-dessus, et de voir Q comme une sous-algèbre rigide de $\tilde{M}$ de deux manières différentes : soit comme une algèbre $Q_1 \subset (L^\infty(X)\overline{\otimes}1) \rtimes \Gamma$ ne dépendant pas de la deuxième variable, soit comme une algèbre $Q_2 \subset (1\overline{\otimes}L^\infty(X)) \rtimes \Gamma$ ne dépendant pas de la première variable. Nous avons alors $Q_2 = \alpha_1(Q_1)$.

La rigidité de $Q \subset \tilde{M}$ implique que pour $t > 0$ suffisamment petit, $\alpha_t(Q_1)$ et Q_1 peuvent être "virtuellement" conjuguées (théorème 2.3.4). Une propriété de transversalité de la déformation permet de remonter jusqu'à $t = 1$: Q_1 et $Q_2 = \alpha_1(Q_1)$ sont virtuellement conjuguées. Le caractère mélangeant de l'action de Bernoulli permet alors de conclure (grossièrement, Q_1 ne dépend pas de la première variable et se trouve donc dans l'algèbre du groupe $L(\Gamma)$).

La preuve du fait correspond donc exactement à la démarche esquissée plus haut : On déforme l'algèbre $\tilde{M}$ en laissant fixe l'algèbre de groupe $L(\Gamma)$. Cette déformation permet de localiser toute sous-algèbre rigide de Q de M : $Q \subset L(\Gamma)$, après conjugaison par un unitaire. La même méthode est utilisée pour démontrer un résultat de superrigidité pour les cocycles qui permet avec un peu de travail, de prouver la deuxième étape du théorème 2.1.5 : remonter jusqu'à la conjugaison.

Théorème 2.3.2. *Soit $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ une action de Bernoulli d'un groupe Γ ICC avec la propriété (T). Alors tout cocycle associé à cette action $\gamma : \Gamma \times X \to \Lambda$ à valeurs dans un sous-groupe fermé $\Lambda \subset \mathcal{U}(B)$ du groupe des éléments unitaires d'une algèbre de von Neumann finie B est cohomologue à un morphisme $\theta : \Gamma \to \Lambda$.*

Idée grossière de la preuve. On notera $A = L^\infty(X)$. Un premier travail permet de se ramener au cas où $\Lambda = \mathcal{U}(B)$. Le cocycle peut alors être vu comme une famille d'unitaires $\gamma_s \in \mathcal{U}(A \overline{\otimes} B)$, $s \in \Gamma$. On peut alors plonger la famille $(\gamma_s)_{s\in\Gamma}$ dans $A \overline{\otimes} A \overline{\otimes} B$ comme une famille $(\gamma_s^1) \subset A \overline{\otimes} 1 \overline{\otimes} B$ ou bien comme une famille $(\gamma_s^2) \subset 1 \overline{\otimes} A \overline{\otimes} B$.

On note alors $(\alpha_t \otimes id)$ la déformation de $A \overline{\otimes} A \overline{\otimes} B$ obtenue de manière analogue à l'exemple 2.3.1. Comme Γ a la propriété (T), on peut trouver t_0 suffisamment petit pour "conjuguer" ("via un cobord") "virtuellement" la famille $(\gamma_s^1)_s$ avec $((\alpha_{t_0} \otimes id)(\gamma_s^1))_s$.

Ensuite par un argument de transversalité de la déformation, on peut remonter à $t_0 = 1$. Ainsi, on arrive à conjuguer (via un cobord) les familles (γ_s^1) et (γ_s^2). Il est alors facile de vérifier que cela implique que la famille (γ_s) est conjuguée (via un cobord) à une famille (θ_s) vivant dans B : Le cocycle est cohomologue à un morphisme θ. $\square$

Remarque 2.3.3. Tout groupe discret dénombrable Λ est inclus dans $L(\Lambda)$. Ceci montre que le théorème ci-dessus s'applique à une large classe de cocycles.

Pour donner un aperçu des points techniques rencontrés dans les démonstrations, voici un outil extrêmement utile dans le domaine de la déformation/rigidité, qui permet de relier deux sous-algèbres A et B d'une algèbre M de manière plus souple que par conjugaison ou inclusion.

Théorème 2.3.4 (Popa, [Pop06b]). *Soit (M, τ) une algèbre von Neumann finie, et $A, B \subset M$ deux sous-algèbres. On a équivalence entre :*

(i) Il existe $n \geq 1$ et un $*$-morphisme $\psi : A \to M_n(\mathbb{C}) \otimes B$ et un élément non-nul $v \in M_{1,n}(\mathbb{C}) \otimes M$ telle que $xv = v\psi(x)$, $\forall x \in A$.

(ii) Il n'existe pas de suite (u_k) d'unitaires de A telle que pour tout $a, b \in M$,

$$\lim_{k\to\infty} \|E_B(au_kb)\|_2 = 0.$$

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que A se conjugue virtuellement dans B à l'intérieur de M, et on note $A \preceq_M B$.

La proposition suivante est souvent la clef des démonstrations.

Proposition 2.3.5. *Si $A, B \subset M$ sont deux sous-algèbres de Cartan de M, alors A et B sont conjuguées dans M* ssi *$A \preceq_M B$.*

Ainsi pour montrer que deux sous-algèbres de Cartans sont conjuguées, on pourra raisonner par l'absurde. Le théorème 2.3.4 donne alors une suite (u_k) comme dans le point (ii), qui est un point de départ intéressant pour trouver une contradiction.

Et après...

Aujourd'hui les questions qui se posent sont de deux types :

(i) Comment améliorer ces résultats sur les algèbres de von Neumann ?

(ii) Quelles sont les retombées des résultats déjà acquis dans les domaines voisins, notamment en théorie ergodique ?

Le théorème 2.3.2 fournit par exemple une application des techniques de Popa dans le domaine des relations d'équivalences sur un espace mesuré. Sa démonstration est totalement nouvelle par rapport aux travaux antérieurs de superrigidité des cocycles (Voir [Sha05]).

Références

[CJ82] A. Connes and V.F.R. Jones. A II_1 factor with two non-conjugate cartan subalgebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 6, 1982.

[Con75] A. Connes. A factor not anti-isomorphic to itself. *Ann. Math*, 101 :536–554, 1975.

[Con76] A. Connes. Classification of injective factors. *Ann. of Math.*, 104 :73–115, 1976.

[FM77] J. Feldman and C.C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von neumann algebras, ii. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234 :325–359, 1977.

[Ioa] A. Ioana. W*-superrigidity for Bernoulli actions of property (T) groups. *J. Amer. Math. Soc.*, arXiv :1002.4595.

[IPV] A. Ioana, S. Popa, and S. Vaes. A class of superrigid group von Neumann algebras. *Preprint*, arXiv :1007.1412.

[MvN43] F.J. Murray and J. von Neumann. On rings of operators. IV. *Ann. of Math.*, 44 :716–808, 1943.

[OW80] D.S. Ornstein and B. Weiss. Ergodic theory of amenable group actions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2 :161–164, 1980.

[Pop06a] S. Popa. Some rigidity results for non-commutative Bernoulli shifts. *J. Funct. Anal.*, 230 :273–328, 2006.

[Pop06b] S. Popa. Strong rigidity of II_1 factors arising from malleable actions of w-rigid groups I. *Invent. Math.*, 165 :369–408, 2006.

[Pop06c] S. Popa. Strong rigidity of II_1 factors arising from malleable actions of w-rigid groups II. *Invent. Math.*, 165 :409–453, 2006.

[PV10] S. Popa and S. Vaes. Group-measure space decomposition of II_1 factors and w^*-superrigidity. *Invent. Math.*, 182 :371–417, 2010.

[Sha05] Y. Shalom. Measurable group theory. In A. Laptev, editor, *European Congress of Mathematics, Stockholm, 2004*, pages 391–424, 2005.

[Vae07] S. Vaes. Rigidity results for bernoulli actions and their von neumann algebras. *Astérisque*, 311 :237–294, 2007.

[Voi96] D.-V. Voiculescu. The analogues of entropy and of Fischer's information measure in free probability theory. III. the absence of cartan subalgebras. *Geom. Func. Anal.*, 6 :172–199, 1996.