INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE

RUSLAN MAKSIMAU

Sous la direction d'Eric Vasserot

Table des matières

L'objet principal de ma recherche est l'algèbre enveloppante quantique $\mathbf{U}$ de Drinfeld-Jimbo (appelée aussi groupe quantique). Les algèbres enveloppantes quantiques ont été introduites par Drinfeld et Jimbo en 1985. Ces algèbres sont liées à la mécanique statistique, la théorie quantique des champs et la théorie des noeuds. Elles sont aussi devenues des objets fondamentaux dans les théories de Lie algébriques. Les algèbres de Lie semi-simples sont des algèbres de Lie très importantes. Elles ont été classifiées par E. Cartan et Killing vers 1890. Leur théorie de représentations est étroitement liée à celle de nombreux autres objets (groupes algébriques, groupes symétriques, etc). Les algèbres de Lie semi-simples ne peuvent pas être déformées de façon non-triviale. Néanmoins, le travail de Drinfeld et Jimbo a montré que les algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semi-simples admettent une déformation intéressante qui dépend d'un paramètre q. Ce sont les algèbres enveloppantes quantiques de Drinfeld-Jimbo. On retrouve les algèbres enveloppantes classiques en spécialisant q à 1.

1. Algèbres KLR, faisceaux de parité et bases canoniques

Notre but principal est de construire des bases spéciales de la partie positive $\mathbf{f}$ de $\mathbf{U}$.

Lusztig a introduit la notion de base canonique $\mathbf{B}$ de $\mathbf{f}$, voir [6, 14.4]. Cette base a des propriétés remarquables. En particulier le produit des deux éléments de $\mathbf{B}$ est une combinaison linéaire des éléments de $\mathbf{B}$ à coefficients dans $\mathbb{N}[q, q^{-1}]$, et la base $\mathbf{B}$ induit des bases (canoniques elles aussi...) dans toutes les représentations de $\mathbf{U}$ de dimension finie.

Lusztig a obtenu une construction de la base canonique $\mathbf{B}$ de l'algèbre $\mathbf{f}$ associée à une matrice de Cartan symétrique en termes de faisceaux pervers sur un corps de caractéristique zéro. L'objet de la première partie de la thèse est une construction similaire pour un corps de caractéristique positive. Cela donnera de nouvelles bases de $\mathbf{f}$. Ces bases sont intéressantes, car les faisceaux de parité qui leurs sont associés se retrouvent a divers endroits en théorie des représentations. Ces nouvelles bases donnent donc un moyen algébrique de comprendre des faisceaux qui permettent de calculer de nombreux invariants importants (entre autres des dimensions de représentations irréductibles de groupes en caractéristique positive). En caractéristique positive il n'y a pas de théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne. Ce théorème permet de décomposer certains faisceaux pervers en des sommes de faisceaux pervers simples. Un nouvel outil a été introduit récemment pour y remédier partiellement. Il s'agit des faisceaux de parité, voir [1]. Ils ne sont pas pervers mais ils sont mieux adaptés que les faisceaux pervers dans de nombreuses questions relatives aux faisceaux sur des corps de caractéristique positive.

1.1. **Notions de base.** A présent on fixe un carquois Γ de Dynkin. C'est une donnée combinatoire a laquelle on peut associer un groupe quantique $\mathbf{U}$. Dans la suite on va expliquer la construction de Lusztig de la base $\mathbf{B}$ associée à $\mathbf{U}$ et la modification de cette construction que l'on va étudier.

Notons I et H les ensembles des sommets et des flèches de Γ. On note $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \qquad [n]! = \prod_{k=1}^{n} [k] \text{ si } n > 0, \qquad [0]! = 1.$$

Rappelons comment on associe l'algèbre $\mathbf{f}$ au carquois Γ. Pour $i, j \in I$ on note h_{ij} le nombre de flèches de i vers j. Ensuite on pose

$$i \cdot j = \begin{cases} -h_{ij} - h_{ji}, & \text{si } i \neq j, \\ 2, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 1.1. L'algèbre enveloppante quantique $\mathbf{U}$ de Drinfeld-Jimbo associée au carquois Γ est la $\mathbb{Q}(q)$-algèbre de générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} modulo les relations

(a1) $K_i K_j = K_j K_i$, $K_i K_i^{-1} = 1$,
(a2) $K_i E_j = q^{-i \cdot j} E_j K_i$, $K_i F_j = q^{i \cdot j} F_j K_i$,
(a3) $E_i F_j - F_j E_i = -\delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}$,
(a4) $\begin{cases} E_i^2 E_j - (q + q^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 \text{ if } i \cdot j = -1, \\ E_i E_j = E_j E_i \text{ if } i \cdot j = 0, \end{cases}$
(a5) $\begin{cases} F_i^2 F_j - (q + q^{-1}) F_i F_j F_i + F_j F_i^2 \text{ if } i \cdot j = -1, \\ F_i F_j = F_j F_i \text{ if } i \cdot j = 0. \end{cases}$

Définition 1.2. L'algèbre $\mathbf{f}$ est la $\mathbb{Q}(q)$-algèbre engendrée par θ_i, $i \in I$, modulo les relations

$$\sum_{a+b=1-i\cdot j} (-1)^a \theta_i^{(a)} \theta_j \theta_i^{(b)} = 0, \qquad i \neq j,\ a \geqslant 0, b \geqslant 0,$$

où $\theta_i^{(a)} = \theta_i^a/[a]!$.

Remarque 1.3. On peut identifier l'algèbre $\mathbf{f}$ à la sous-algèbre de $\mathbf{U}$ engendrée par les F_i, $i \in I$.

Définition 1.4. La forme entière de Lusztig d'algèbre $\mathbf{f}$ est la $\mathcal{A}$-sous-algèbre ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$ de $\mathbf{f}$ engendrée par les éléments $\theta_i^{(a)}, i \in I, a \in \mathbb{N}$.

Pour $h \in H$ on écrit h', h'' pour l'origine et le but de h. Fixons un vecteur de dimension $\nu \in \mathbb{N}[I]$ et prenons un $\mathbb{C}$-espace vectoriel I-gradué $V = \oplus_{i \in I} V_i$ de dimension graduée ν. Notons E_V l'espace des représentations du carquois Γ dans V, i.e.

$$E_V = \bigoplus_{h \in H} \mathrm{Hom}(V_{h'}, V_{h''}).$$

Le groupe $G_V = \prod_{i \in I} \mathrm{GL}(V_i)$ agit sur E_V. Notons I^ν l'ensemble des suites $(i_1, i_2, \cdots, i_m)$ d'éléments de I telles que $\sum_{k=1}^m i_k = \nu$. Pour toute suite $\mathbf{i} \in I^\nu$ considérons l'ensemble $F_{\mathbf{i}}$ des drapeaux de type $\mathbf{i}$ dans V, c'est-à-dire l'ensemble des suites de sous-espaces emboités de V dont les dimensions sont déterminées par $\mathbf{i}$. Soit $\widetilde{F}_{\mathbf{i}}$ la variété des couples $(x, \phi) \in E_V \times F_{\mathbf{i}}$ tels que x préserve ϕ. Soit $\pi_{\mathbf{i}} \colon \widetilde{F}_{\mathbf{i}} \to E_V$ la projection. Pour tous $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^\nu$ on considère la variété

$$Z_{\mathbf{ij}} = \{(x, \phi_1, \phi_2) \in E_V \times F_{\mathbf{i}} \times F_{\mathbf{j}} : x \text{ préserve } \phi_1 \text{ et } \phi_2\}.$$

Puis on considère la variété

$$Z_V = \coprod_{\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^\nu} Z_{\mathbf{ij}}.$$

1.2. **Homologie de Borel-Moore.** Soit $\mathbf{k}$ un corps commutatif. Soit G un groupe algébrique complexe qui agit sur une variété algébrique X. Notons $D_G(X, \mathbf{k})$ la catégorie dérivée G-équivariant de A-faisceaux sur X. Soit $\mathcal{D}_{\mathbf{k}}$ le complexe dualisant G-équivariant, voir [4, Definition 3.5.1].

Définition 1.5. L'espace d'*homologie de Borel-Moore G-équivariant* est $\mathrm{H}_*^G(X, \mathbf{k}) = \mathrm{H}_G^*(X, \mathcal{D}_{\mathbf{k}})$.

Remarquons aussi que $\mathcal{D}_{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{k}}_X[2d]$ si X est une G-variété lisse de dimension pure d, où $\underline{\mathbf{k}}_X$ signifie le faisceau constant G-équivariant sur X, voir [2, Proposition 8.3.4]. Dans ce cas on a

$$\mathrm{H}_*^G(X, \mathbf{k}) = \mathrm{H}_G^*(X, \underline{\mathbf{k}}_X[2d]).$$

On peut donc identifier $\mathrm{H}_*^G(X, \mathbf{k})$ avec $\mathrm{H}_G^*(X, \mathbf{k})[2d]$. Le foncteur

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_X : D_G(X, \mathbf{k}) \to D_G(X, \mathbf{k}), \qquad \mathfrak{L} \mapsto \mathscr{H}om(\mathfrak{L}, \mathcal{D}_{\mathbf{k}})$$

a les propriétés suivantes, voir [4, Theorem 3.5.2]:

- $(\mathbb{D}_X)^2 = \mathrm{Id}_{D_G(X,\mathbf{k})}$,
- $\mathbb{D}_Y f_! = f_* \mathbb{D}_X$, $\forall f : X \to Y$ une G-flèche continue,
- $\mathbb{D}_X f^* = f^! \mathbb{D}_Y$, $\forall f : X \to Y$ une G-flèche continue.

1.3. **Faisceaux sur E_V.** Soit $\mathbf{k}$ un corps commutatif de caractéristique 0. Soit $D_{G_V}(E_V,\mathbf{k})$ la catégorie dérivée G_V-équivariante bornée des faisceaux sur E_V, voir [4]. Pour tout $\mathbf{i}\in I^\nu$ on considère le faisceau

$$\mathscr{L}_\mathbf{i}=\pi_{\mathbf{i}*}\underline{\mathbf{k}}_{\widetilde{F}_\mathbf{i}}\in D_{G_V}(E_V,\mathbf{k}).$$

La catégorie $D_{G_V}(E_V,\mathbf{k})$ contient une sous-catégorie abélienne, dont les éléments sont appelés *faisceaux pervers*. Notons $\mathcal{P}_V$ l'ensemble des faisceaux pervers qui sont des facteurs directs du faisceau $\mathscr{L}_\mathbf{i}[r]$ pour une suite $\mathbf{i}\in I^\nu$ et un entier r. Considérons *la catégorie de Lusztig* $\mathcal{Q}_V$ formée des sommes directes de décalages des éléments de $\mathcal{P}_V$. Le foncteur d'induction défini dans [6, 9.2] munit la somme des groupes de Grothendieck scindés

$$K(\mathcal{Q})=\oplus_V K(\mathcal{Q}_V)$$

d'une structure de $\mathcal{A}$-algèbre, où q agit par le décalage d'un complexe de faisceaux. Dans [6, 13.2.11] Lusztig démontre le théorème suivant.

Théorème 1.6. *L'algèbre $K(\mathcal{Q})$ est isomorphe à ${}_\mathcal{A}\mathbf{f}$. De plus, l'union des ensembles $\mathcal{P}_V$ s'identifie à la base canonique $\mathbf{B}$.*

1.4. **Algèbres KLR.** Soit $\mathbf{k}$ un corps commutatif arbitraire. Les algèbres KLR ont été introduite par Khovanov et Lauda dans [5] et par Rouquier dans [7] pour donner une nouvelle construction de la base $\mathbf{B}$ et de l'algèbre $\mathbf{f}$ (qui peut se substituer à la construction de Lusztig en termes de faisceaux pervers rappelée ci-dessus). Notons R_ν l'algèbre KLR associée à ν. Originellement R_ν est définie par générateurs et relations. Pour l'étudier on aura besoin d'une autre construction de R_ν qu'on expliquera plus tard. Soit $\mathcal{P}(R_\nu)$ la catégorie de modules projectifs gradués de type fini sur R_ν. Soit $K(R_\nu)$ son groupe de Grothendieck scindé. Les foncteurs Res et Ind associés à l'inclusion naturelle $R_{\nu_1}\otimes R_{\nu_2}\subset R_{\nu_1+\nu_2}$ munissent

$$K(R)=\oplus_\nu K(R_\nu)$$

d'une structure de $\mathcal{A}$-bigèbre, où $q\in\mathcal{A}$ agit par le décalage de la graduation.

1.5. **Bases canoniques.** Soit k un corps commutatif de caractéristique 0. Khovanov et Lauda démontrent le théorème suivant dans [5, 3.4]

Théorème 1.7. *Il existe un isomorphisme de $\mathcal{A}$-bigèbres*

$$\gamma_\mathcal{A}\colon {}_\mathcal{A}\mathbf{f}\to K(R).$$

Supposons que $\mathbf{k}$ soit de caractéristique 0. Dans [3] Varagnolo et Vasserot démontrent que R_ν est isomorphe à l'homologie de Borel-Moore équivariante de la variété Z_V, avec le produit de convolution. Grâce à cela et [2, 8.6.35] R_ν s'identifie avec l'algèbre d'extensions

$$\mathrm{Ext}^*_{G_V}({}^\delta\mathscr{L}_V,{}^\delta\mathscr{L}_V),$$

où ${}^\delta\mathscr{L}_V=\oplus_\mathbf{i}\mathscr{L}_\mathbf{i}[\dim\widetilde{F}_\mathbf{i}]$. Ensuite ils démontrent dans [3, 4.5] que la réunion des modules indécomposables des R_ν correspond par $\gamma_\mathcal{A}$ à la $\mathbb{Z}$-base $\mathbf{B}_\mathbb{Z}$ dans ${}_\mathcal{A}\mathbf{f}$, où

$$\mathbf{B}_\mathbb{Z}=\coprod_{n\in\mathbb{Z}}q^n\mathbf{B}.$$

On a donc obtenu deux constructions de $\mathbf{B}$. La première en termes de faisceaux pervers, la seconde en termes d'algèbres KLR. C'est cette construction que l'on veut étendre à la caractéristique positive.

1.6. **Faisceau de parité.** Soit $\mathbf{k}$ un corps commutatif arbitraire. Soient G un groupe algébrique complexe et X un G-variété. Fixons une stratification finie $\coprod_{\lambda\in\Lambda}$ de X par des sous-ensembles lisses connexes localement fermés telles que l'adhérence de chaque strate est l'union de strates. Soit $\mathrm{Loc}_G(X_\lambda, \mathbf{k})$ la catégorie de systèmes locaux G-équivariants sur X_λ. On suppose de plus

$$\mathrm{H}_G^{\mathrm{odd}}(X_\lambda, \mathcal{L}) = 0,\ \forall \mathcal{L} \in \mathrm{Loc}_G(X_\lambda), \forall \lambda \in \Lambda. \tag{3.1}$$

Définition 1.8. Le complexe $\mathcal{F} \in D_G(X, \mathbf{k})$ est *pair* (resp. *impair*) si $\mathcal{H}^r(\mathcal{F}) = \mathcal{H}^r(\mathbb{D}\mathcal{F}) = 0$ pour chaque r impair (resp. pair). Un *complexe de parité* est une somme directe d'un complexe pair et un complexe impair.

Lemme 1.9. *Soit $\mathcal{F}$ un complexe de parité indécomposable. Alors*

1. *le support de $\mathcal{F}$ est de la forme $\overline{X_\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$,*
2. *la restriction $i_\lambda^*\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{L}[m]$, où $\mathcal{L} \in \mathrm{Loc}_G(X_\lambda)$ est un objet indécomposable et $m \in \mathbb{Z}$,*
3. *chaque complexe de parité indécomposable supporté sur $\overline{X_\lambda}$ qui prolonge $\mathcal{L}[m]$ est isomorphe à $\mathcal{F}$, où $\mathcal{L}$ est comme dans* (2).

Définition 1.10. Un *faisceau de parité* est un complexe de parité indécomposable supporté sur $\overline{X_\lambda}$ qui prolonge $\mathcal{L}[d_\lambda]$ pour un $\mathcal{L} \in \mathrm{Loc}_G(X_\lambda, \mathbf{k})$ indécomposable et $\lambda \in \Lambda$. Si un tel complexe existe on le dénote $\mathcal{E}(\lambda, \mathcal{L})$. Si $\mathcal{L}$ est un faisceau constant $\underline{\mathbf{k}}_\lambda$ on écrit $\mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{E}(\lambda, \mathcal{L})$.

1.7. **Nouvelles bases, cas pair.** Soit $\mathbf{k}$ un corps commutatif quelconque. A partir d'ici on explique notre construction. L'avantage de cette construction est que l'on a une classification explicite des faisceaux de parité. Comme le carquois Γ est de Dynkin le nombre des G_V-orbites dans E_V est fini. On peut donc travailler avec la stratification

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda_V} \mathcal{O}_\lambda$$

sur E_V définie par ces orbites, où l'ensemble Λ_V paramètre les G_V-orbites dans E_V. On montre d'abord l'existence des faisceaux de parités sur la variété E_V. Ensuite on démontre le lemme suivant.

Lemme 1.11. *Il existe un isomorphisme gradué*

$$R_\nu = \mathrm{Ext}^*_{G_V}({}^\delta\mathscr{L}_V, {}^\delta\mathscr{L}_V).$$

Remarquons que ce résultat pour $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ est démontré par Varagnolo et Vasserot dans [3]. Par analogie avec la construction précédente on définit la catégorie $\mathcal{Q}_V$ dont les objets sont les facteurs directs dans $D_{G_V}(E_V)$ des décalages du faisceau ${}^\delta\mathscr{L}_V$. On démontre que la $\mathcal{A}$-algèbre $K(\mathcal{Q})$ est isomorphe à ${}_\mathcal{A}\mathbf{f}$. En particulier cet isomorphisme envoie les classes des complexes indécomposables dans une $\mathbb{Z}$-base de ${}_\mathcal{A}\mathbf{f}$. Un premier but est de comprendre mieux cette base. Pour pouvoir appliquer la technique des faisceaux de parité à notre situation on doit démontrer que les faisceaux $\mathscr{L}_\mathbf{i}$ sont pairs. Pour avoir cela il suffit de démontrer le résultat suivant.

Conjecture 1.12. *Les fibres des morphismes $\pi_\mathbf{i}$ n'ont pas de cohomologie impaire sur $\mathbb{Z}$.*

Jusqu'à la fin de cette sous-section on suppose que la Conjecture 1.12 est vraie. Dans ce cas tous les faisceaux $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, sont des facteurs directs du faisceau $\mathscr{L}_V$ à décalage près. Cela implique que l'ensemble $\{\mathcal{E}(\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ est une $\mathcal{A}$-base de $K(\mathcal{Q}_V)$.

On peut résumer les résultats de Lusztig, Khovanov-Lauda et Varagnolo-Vasserot en caractéristique zéro dans le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{Q}) & \longleftarrow & \text{faisceaux pervers simples} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ {}_{\mathcal{A}}\mathbf{f} & \longleftarrow & \text{base canonique} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ K(R) & \longleftarrow & \text{modules projectifs indécomposables} \end{array}$$

Ici toutes les flèches verticales sont des isomorphismes et toutes les flèches horizontales sont des inclusions. On veut obtenir le schéma similaire en caractéristique positive :

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{Q}) & \longleftarrow & \text{faisceaux de parité} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ {}_{\mathcal{A}}\mathbf{f} & \longleftarrow & \text{nouvelle base} \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ K(R) & \longleftarrow & \text{modules projectifs indécomposables} \end{array}$$

1.8. **Nouvelles bases, cas général.** Rappelons que les résultats de la Section 1.7 sont basés sur l'hypothèse que la Conjecture 1.12 est vraie. Malheureusement on ne sait la démontrer que pour le cas de type A.

Notons $\mathrm{Par}_{G_V}(E_V)$ la sous-catégorie de complexes de parité dans $D_{G_V}(E_V)$. Sans Conjecture 1.12 on ne peut pas l'identifier à $\mathcal{Q}_V$. Notons $K(\mathrm{Par}_{G_V}(E_V))$ le groupe de Grothendieck scindé de $\mathrm{Par}_{G_V}(E_V)$. Notons aussi

$$\mathrm{Par} = \oplus_V \mathrm{Par}_{G_V}(E_V), \qquad K(\mathrm{Par}) = \oplus_V K(\mathrm{Par}_{G_V}(E_V)).$$

On sais démontrer le théorème suivant.

Théorème 1.13. (a) *Il existe une structure d'algèbre sur $K(\mathcal{Q})$ donnée par le foncteur d'induction.*

(b) *Il existe une structure de cogèbre sur $K(\mathrm{Par})$ donnée par le foncteur de restriction.*

(c) *Il existe un isomorphisme d'algèbres*

$${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f} \to K(\mathcal{Q}).$$

(d) *Il existe un isomorphisme de cogèbres*

$${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f} \to K(\mathrm{Par}).$$

Remarque 1.14. (a) Si la Conjecture 1.12 est vraie on a les isomorphismes de bigèbres

$${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f} \simeq K(\mathcal{Q}) \simeq K(\mathrm{Par}).$$

(b) Le Théorème 1.13 (d) donne une nouvelle $\mathcal{A}$-base de ${}_{\mathcal{A}}\mathbf{f}$ en terme de faisceaux de parité.

2. Dualité de Koszul et algèbres de carquois-Schur

Les algèbres de Koszul sont des algèbres graduées qui ont beaucoup d'applications dans des domaines différents des mathématiques. À chaque algèbre de Koszul A on peut associer une algèbre graduée $A^!$ appelée algèbre *duale de A au sens de Koszul.* Les catégories dérivées de modules de A et $A^!$ sont équivalentes.

Les exemples classiques d'algèbre de Koszul sont l'algèbre symétrique $S(V)$ et l'algèbre extérieure $\bigwedge(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie.

2.1. **Dualité de Koszul.** Soit $\mathbf{k}$ un corps. Soit $A = \bigoplus_{n\geqslant 0} A_n$ une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée telle que $A_+ = \bigoplus_{n>0} A_n$ est le radical de A.

Définition 2.1. On dit que A est *de Koszul* si le A-module $A_0 \cong A/A_+$ admet une resolution projective graduée $P^\bullet \to A_0$ telle que P^i est engendré par sa composante P^i_i de degré i.

Notons $A^! = \mathrm{Ext}^*_A(A_0, A_0)$ (groupe d'extension comme A-module non gradué). Cette algèbre est $\mathbb{N}$-graduée avec $(A^!)_n = \mathrm{Ext}^i_A(A_0, A_0)$. Si A est de Koszul on dit que algèbre $A^!$ est *l'algèbre duale de Koszul* de A.

Proposition 2.2. *Supposons que A est de Koszul. Alors l'algèbre $\mathbb{N}$-graduée $A^!$ est aussi de Koszul et on a un isomorphisme gradué $(A^!)^! \cong A$.*

Le théorème suivant est démontré dans [8].

Théorème 2.3. *Supposons que A est une algèbre de Koszul de dimension finie. Supposons de plus que l'algèbre $A^!$ est Noethérienne. Alors on a l'équivalence de catégorie suivante*
$$K\colon D^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}(A)) \to D^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}(A^!)).$$

2.2. **Categorie $\mathcal{O}$ parabolique.** Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{C}$. Soit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan. Soient Φ et Δ le système de racines et l'ensemble des racines simples respectivement. Notons par Δ^+ l'ensemble des racines positives. On a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathbb{C}e_\alpha$. Soit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ la sous-algèbre de Borel qui correspond à Δ, c'est à dire que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi^+} \mathbb{C}e_\alpha$. Soit $\mathfrak{n}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{b}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathbb{C}e_\alpha$ Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppant de $\mathfrak{g}$. Notons P (P^+ respectivement) l'ensemble des poids (poids dominants respectivement) de $\mathfrak{g}$.

Définition 2.4. La catégorie $\mathcal{O}$ (entière) de Berstein, Gelfand, Gelfand est la sous-catégorie de la catégorie de représentations de $\mathfrak{g}$ qui contient chaque $\mathfrak{g}$-module M de $\mathfrak{g}$ tel que

(1) M est de type fini comme un $U(\mathfrak{g})$-module,
(2) $M = \bigoplus_{\lambda\in P} M_\lambda$, où $M_\lambda = \{m \in M : h \cdot m = \lambda(h)m, \forall h \in \mathfrak{h}\}$,
(3) l'espace $U(\mathfrak{n}) \cdot m$ est de dimension finie pour chaque $m \in M$.

Fixons un sous-ensemble $\Delta' \subset \Delta$. Soit $\mathfrak{p}$ la sous-algèbre parabolique qui correspond à Δ', c'est à dire que $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha\in -\Delta'} \mathbb{C}e_\alpha$. Notons par $\mathfrak{l}_\mathfrak{p}$ la sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{p}$
$$\mathfrak{l}_\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta'} \mathbb{C}e_\alpha.$$
Soit $\mathfrak{u}_\mathfrak{p}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$,
$$\mathfrak{u}_\mathfrak{p} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta\setminus\Delta'} \mathbb{C}e_\alpha.$$

Définition 2.5. La catégorie $\mathcal{O}^\mathfrak{p}$ est la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{O}$ qui contient chaque $\mathfrak{g}$-module M de $\mathcal{O}$ tel que

(1) M est une somme des $U(\mathfrak{l}_\mathfrak{p})$-modules simples de dimension finie,
(2) l'espace $U(\mathfrak{u}_\mathfrak{p}) \cdot m$ est de dimension finie pour chaque $m \in M$.

2.3. **Blocs de $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}^\mathfrak{p}$.** Pour chaque $\lambda \in P^+$ il y a des sous-catégorie $\mathcal{O}_\lambda \subset \mathcal{O}$, see [9, 1.12]. Pour la suite on a besoin d'un résultat classique suivant.

Proposition 2.6. *On a une décomposition*
$$\mathcal{O} = \bigoplus_{\lambda\in P^+} \mathcal{O}_\lambda.$$

Maintenant pour chaque $\lambda \in P^+$ on peut définir la sous-catégorie

$$\mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_\lambda = \mathcal{O}_\lambda \cap \mathcal{O}^{\mathfrak{p}} \subset \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}.$$

Par analogie avec la Proposition 2.6 on a le résultat suivant.

Proposition 2.7. *On a une décomposition*

$$\mathcal{O}^{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{\lambda \in P^+} \mathcal{O}^{\mathfrak{p}}_\lambda.$$

2.4. **Algèbre KLR cyclotomique.** Considérons le carquois Γ de type A_∞. Plus précisément, l'ensemble des sommets de Γ est $I = \mathbb{Z}$. De plus on a l'unique arrête parmi i et $i+1$, $i \in I$ et il n'a pas d'autres arrêtes. On peut associer la matrice de Cartan infinie $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ a Γ comme suit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{si } |i-j| > 1. \end{cases}$$

Soient $\{\Lambda_i : i \in I\}$ les poids fondamentaux. Notons Q et P les réseaux des racines et poids respectivement,

$$Q = \sum_{i\in i} \mathbb{Z}\alpha_i, \qquad P = \sum_{i \in i} \mathbb{N}\Lambda_i.$$

Notons aussi

$$Q^+ = \sum_{i\in i} \mathbb{Z}\alpha_i, \qquad P^+ = \sum_{i \in i} \mathbb{N}\Lambda_i.$$

Soit l un entier positif. Soit $\kappa = (\kappa_1, \cdots, \kappa_l)$ une suite des entiers. On va lui associer le poids

$$\Lambda = \Lambda(\kappa) = \Lambda_{\kappa_1} + \cdots + \Lambda_{\kappa_l}.$$

Fixons un entier positif n. Soit $\mathbf{k}$ un corps commutatif.

Définition 2.8. L'algèbre KLR cyclotomique de type Γ est la $\mathbf{k}$-algèbre unitaire $\mathcal{R}^\Lambda_n$ avec les générateurs

$$\{\psi_1, \cdots, \psi_{n-1}\} \cup \{y_1, \cdots, y_n\} \cup \{e(\mathbf{i}) : i \in I^n\}$$

et relations

$$y_1^{(\Lambda,\alpha_{i_1})} e(\mathbf{i}) = 0, \qquad e(\mathbf{i})e(\mathbf{j}) = \delta_{ij} e(\mathbf{i}), \qquad \sum_{\mathbf{i}\in I^n} e(\mathbf{i}) = 1,$$

$$y_r e(\mathbf{i}) = e(\mathbf{i}) y_r, \qquad \psi_r e(\mathbf{i}) = e(s_r \cdot \mathbf{i})\psi_r, \qquad y_r y_s = y_s y_r,$$

$$\psi_r y_{r+1} e(\mathbf{i}) = (y_r \psi_r + \delta_{i_r i_{r+1}}) e(\mathbf{i}), \qquad y_{r+1}\psi_r e(\mathbf{i}) = (\psi_r y_r + \delta_{i_r i_{r+1}}) e(\mathbf{i})$$

$$\psi_r y_s = y_s \psi_r \qquad \text{si } r \neq r, r+1,$$

$$\psi_r \psi_s = \psi_s \psi_r \qquad \text{si } |r-s| > 1,$$

$$\psi_r^2 e(\mathbf{i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i_r = i_{r+1}, \\ (y_{r+1} - y_r) e(\mathbf{i}) & \text{si } i_r \to i_{r+1}, \\ (y_r - y_{r+1}) e(\mathbf{i}) & \text{si } i_r \leftarrow i_{r+1}, \\ e(\mathbf{i}) & \text{sinon}, \end{cases}$$

$$\psi_r \psi_{r+1} \psi_r e(\mathbf{i}) = \begin{cases} (\psi_{r+1}\psi_r\psi_{r+1} + 1) e(\mathbf{i}) & \text{si } i_r = i_{r+2} \to i_{r+1}, \\ (\psi_{r+1}\psi_r\psi_{r+1} - 1) e(\mathbf{i}) & \text{si } i_r = i_{r+2} \leftarrow i_{r+1}, \\ (\psi_{r+1}\psi_r\psi_{r+1}) e(\mathbf{i}) & \text{sinon}, \end{cases}$$

pour $\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_n), \mathbf{j} \in I^n$ et tous les valeurs admissibles de k et s. Le symbole $s_r \cdot \mathbf{i}$ signifie $(i_1, \cdots, i_{r-1}, i_{r+1}, i_r, i_{r+2}, \cdots, i_n)$. De plus, l'algèbre $\mathcal{R}_n^\Lambda$ est $\mathbb{Z}$-graduée avec

$$\deg e(\mathbf{i}) = 0, \qquad \deg y_r = 2, \qquad \psi_s e(\mathbf{i}) = -a_{i_s i_{s+1}},$$

où $r, s \in [1, n]$, $\mathbf{i} \in I$.

2.5. **Algèbre de carquois-Schur.** Soit G_n^Λ le module de permutation (gradué) sur $\mathcal{R}_n^\Lambda$, voir [10, Definition 4.16].

Définition 2.9. L'algèbre de carquois-Schur est la $\mathbf{k}$-algèbre $S_n^\Lambda = \mathrm{End}_{R_n^\Lambda}(G_n^\Lambda)$, où $End_\bullet(\bullet)$ signifie l'algèbre des endomorphismes non-gradués d'un module. Néanmoins les graduation sur R_n^Λ et G_n^Λ induisent la graduation sur S_n^Λ.

Notons

$$Q_n^+ = \{\beta = \sum c_i \alpha_i \in Q^+ : \sum c_i = n\}.$$

L'algèbre S_n^Λ est une somme directe d'algèbres

$$S_n^\Lambda = \oplus_{\beta \in Q_n^+} S_\beta^\Lambda,$$

voir [10, Theorem 4.36].

2.6. **Comparaison des structures graduées.** On peut supposer que $0 = \kappa_1 \geqslant \kappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \kappa_l$. Soit m un entier positif tel que $m \geqslant n - \kappa_l$. Notons $\mu_i = \kappa_i + m$, $i \in [1, l]$, $N = \sum_{i=1}^l \mu_i$. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$. Soit $\mathfrak{p}$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ telle que la sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{p}$ est

$$\mathfrak{gl}_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}_{\mu_l}.$$

Soit $\mathcal{O}^\Lambda$ la catégorie $\mathcal{O}$ parabolique de $\mathfrak{g}$ associé $\mathfrak{p}$, voir la Section 2.2. On a une décomposition

$$\mathcal{O}^\Lambda = \bigoplus_{\beta \in Q_n^+} \mathcal{O}_\beta^\Lambda,$$

voir la Section 2.3.

On va noter $\mathrm{mod}(A)$ la catégorie de modules de type fini sur l'algèbre A. On va noter $\mathrm{grmod}(A)$ la catégorie de modules gradués de type fini sur l'algèbre graduée A.

Brudan et Kleschev démontrent le théorème suivant, voir [11].

Théorème 2.10. *Il existe une équivalence de catégories*

$$E_\beta^\Lambda \colon \mathcal{O}_\beta^\Lambda \to \mathrm{mod}(S_\beta^\Lambda).$$

Soit $P_\mathcal{O}^\beta$ le générateur projectif minimal de $\mathcal{O}_\beta^\Lambda$. Considérons l'algèbre $S_\beta^\mathcal{O} = \mathrm{End}(P_\mathcal{O}^\beta)$ On a l'équivalence de catégories

$$\mathcal{O}_\beta^\Lambda \simeq \mathrm{mod}(S_\beta^\mathcal{O}).$$

Le théorème suivant est démontré par Backelin dans [12]. La preuve est basée sur l'article de Beilinson, Ginzburg et Soergel [13].

Théorème 2.11. *L'algèbre $S_\beta^\mathcal{O}$ admet une graduation de Koszul.*

On a deux graduations sur $\mathcal{O}_\beta^\Lambda$:

- la graduation qui vient de l'algèbre $S_\beta^\mathcal{O}$,
- la graduation qui vient de l'algèbre S_β^Λ.

Il est naturel de comparer ces deux graduations. Soit P_Λ^β le générateur projectif graduée minimal de la catégorie $\mathrm{grmod}(S_\beta^\Lambda)$. Considérons l'algèbre graduée

$$^bS_\beta^\Lambda = \mathrm{End}_{mod(S_\beta^\Lambda)}(P_\Lambda^\beta).$$

On a l'équivalence des catégoriés

$$\mathrm{grmod}(^bS_\beta^\Lambda) \simeq \mathrm{grmod}(S_\beta^\Lambda).$$

Hu et Mattas démontrent le résultat suivant dans [10].

Théorème 2.12. *Il existe un isomorphisme d'algèbre graduée*

$$^bS_\beta^\Lambda \simeq S_\beta^\mathcal{O}.$$

2.7. **Travail à faire.** On peut considérer la même construction pour l'algèbre de carquois-Schur pour un carquois cyclique. Le but est de démontrer que la catégorie de ses modules de type fini est de Koszul.

3. Espace de Fock

3.1. **Algèbres $\widehat{\mathfrak{sl}}_m$, $\widetilde{\mathfrak{sl}}_m$.** Soit m un entier, $n > 0$. Premièrement on considère l'algèbre de Lie (complexe)

$$\widehat{\mathfrak{sl}}_m = (\mathfrak{sl}_l \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c),$$

où le crochet est définié par

$$[x\otimes t^r+\lambda c, y\otimes t^s+\mu c] = [x,y]\otimes t^{r+s}+r(x,y)\delta_{r,-s}c, \quad (x,y) = \mathrm{trace}(x\cdot {}^t y), \quad x,y \in \mathfrak{sl}_l, r,s \in \mathbb{Z}.$$

Ensuite on considère l'algèbre $\widetilde{\mathfrak{sl}}_m = \widehat{\mathfrak{sl}}_m \oplus \mathbb{C}D$ telle que $\widehat{\mathfrak{sl}}_m$ est une sous-algèbre de Lie de $\widehat{\mathfrak{sl}}_m$ et

$$[D, x\otimes t^r] = rx\otimes t^r, \quad x \in \mathfrak{sl}_l, r \in \mathbb{Z} \qquad [D,c] = 0.$$

3.2. **L'algèbre de Heisenberg.**

Définition 3.1. L'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{H}$ est l'algèbre avec générateurs b_r, $r \in \mathbb{Z}$ et relations

$$[b_r, b_s] = r\delta_{r,-s}b_0,$$

où δ désigne le symbole de Kronecker.

3.3. **L'espace de Fock de niveau l.** Soit $\mathbf{s} = (s_1, \cdots, s_l)$ un l-uplet d'entiers. Soit $\mathcal{P}^l$ l'ensemble des l-uplets de diagrammes de Young. Considérons le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{F}_{m,l}^{\mathbf{s}}$ avec une base

$$\{|\lambda, \mathbf{s}\rangle : \lambda \in \mathcal{P}^l\}.$$

Les algèbres $\widehat{\mathfrak{sl}}_m$ et $\mathfrak{H}$ agissent sur $\mathcal{F}_{m,l}^{\mathbf{s}}$. On appelle $\mathcal{F}_{m,l}^{\mathbf{s}}$ *l'espace de Fock de niveau l.*

Dans [14] Shan et Vasserot catégorifient l'action de $\mathfrak{H}$ sur l'espace de Fock. Pour faire cela ils identifient l'espace de Fock avec le groupe de Grothendieck de catégorie $\mathcal{O}$ de l'algèbre de Cheredcik.

3.4. **Travail à faire.** Dans [15] Stroppel et Webster catégorifient l'espace de q-Fock par l'algèbre de carquois-Schur. Notre but est de construire la catégorification des operateurs de Heisenberg.

Bibliographie

[1] D. Juteau, C. Mautner, G. Wiliamson, *Parity Sheaves*, preprint, arXiv:0906.2994v1.
[2] N. Chriss, V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser, 1997.
[3] M. Varagnolo, E. Vasserot, *Canonical bases and KLR-algebras*, Journal für die reine une angewandte Mathematik, 2011.
[4] J. Bernstein, V. Lunts, *Equivariant sheaves and functors*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
[5] M. Khovanov, A.D. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I*, preprint, arXiv:0803.4121.
[6] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progress inMathematics, vol. 110, Birkhäuser, 1993.
[7] R. Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, preprint arXiv:0812.5023.
[8] A. Beilinson, V. Ginzburg, and W. Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc., 9 (1996), 473-527.
[9] J. E. Humphreys, *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category $\mathcal{O}$*, Dept. of Mathematics and Statistics, U. Massachusetts, Amherst, MA 01003-4515.
[10] J. Hu, A. Mathas, *Quiver Schur algebras I: the linear quivers*, preprint arXiv:1110.1699v2.
[11] J. Brudan, A. Kleschev, *Schur-Weyl duality for higher levels*, Selecta Math., 14 (2008), 1-57.
[12] E. Backelin, *Koszul duality for parabolic and singular category $\mathcal{O}$*, Represent. Theory, 3 (1999), 135-152
[13] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc., 9 (1996), 473-527.
[14] P. Shan, E. Vasserot, *Heisenbegr algebras and rational double affine Hecke algebras*, preprint arXiv:1011.6488
[15] C. Stroppel, B. Webster, *Quiver Schur algebras and q-Fock space*, preprint arXiv:1110.1115.