La surface de volatilité

Brice LE GRIGNOU

École Normale Supérieure

Introduction au domaine de recherche

Chapter 1

Instruments financiers

1.1 Actifs, options, zéro-coupons, forward

La logique de la finance est l'échange. Le monde financier est le lieu d'échange de biens appelés actifs (par exemple l'action d'une entreprise, de l'or ou encore un taux d'intérêt). Partant de ce constat, chaque actif doit recevoir un prix.

Par ailleurs, si S est un actif de prix S_t, t étant la variable temporelle, on peut créer une option européenne de sous-jacent S. C'est un contrat établi entre un acheteur et un vendeur. On distingue deux principales options :

– Le call de maturité T et de strike K : l'option call donne le droit d'acheter l'actif sous-jacent S au prix fixé K et à la date T. Il est important de noter que le possesseur du call a le droit mais non l'obligation d'acheter l'actif au prix K, à la date T. Il n'exerce donc l'option que si cela lui est profitable, c'est à dire, si $S_T \geq K$. Le gain que lui apporte l'option est donc $(S_T - K)^+$ à la date T. Ce gain est appelé payoff. Par ailleurs, le droit d'exercer ou non l'option est garanti par le vendeur: c'est lui qui livre $(S_T - K)^+$ à la date T.

– Le put: donne le droit à son acheteur de vendre l'actif sous-jacent au prix K à la date T. Son payoff est donc $(K - S_T)^+$ à la date T.

Le prix d'une option est appelé la prime.

Un autre contrat important est le zéro coupon: un zéro coupon négocié à la date t et de maturité T permet à son acheteur de recevoir en T une unité de monnaie (par exemple un euro). Le prix en t du zéro coupon est noté $DF(t,T)$. Si on note $DF(t,T) = \frac{1}{1+(T-t)L(t,T)}$, alors $L(t,T)$ est le taux linéaire.

Enfin, un forward est un accord d'acheter ou de vendre un actif à un prix et une date future précisés dans le contrat. L'actif peut être une action, un zéro coupon, un taux linéaire... Plus généralement, le prix forward calculé en t d'un cash flow aléatoire C payé en T est le cash flow constant payé en T, qui a la même valeur en t que C.

1.2 Modélisation et contraintes

On se place dans un univers engendré par un mouvement brownien (unidimensionnel ou multidimensionnel) et muni de la filtration $(F_t)_{t\leq 0}$ correspondante. La tribu F_t représente la connaissance que l'on a du marché à l'instant t. Dans, ce cadre, on suppose que le prix d'un actif est un processus d'Ȋto (dont le mouvement brownien sous-jacent, W, est construit à partir du brownien précédent). Ainsi, si S est le prix d'un actif :

$$dS_t = a_t dt + b_t dW_t$$

Remarquons que si $(DF(t,T))_{0 \geq t \geq T}$, t variable, suis un processus d'Îto, alors, par le lemme d'Îto, il en est de même de $L(t,T)$.

D'autre part, le marché est supposé parfaitement liquide. Ainsi, il y est rapide et peu coûteux d'y réaliser des transactions. Dès lors, les prix sont à l'équilibre de l'offre et de la demande et, comme les agents sont rationnels et connaissent tous les prix du marché, il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage, c'est à dire de stratégies financières permettant, pour un coût initial nul, d'acquérir une richesse à coup sûr. En effet, si une telle stratégie existe, les acteurs économiques s'y engouffrent, ce qui fait évoluer les prix vers un nouvel équilibre où l'opportunité d'arbitrage a disparu. Elle disparaît d'autant plus rapidement que le marché est liquide. Dans un marché efficient, c'est-à-dire parfaitement liquide, il n'y a donc pas d'arbitrage possible, le nouvel équilibre étant atteint instantanément.

L'efficience du marché impose des contraintes sur les prix. Ainsi, deux stratégies qui donnent les mêmes flux de trésorerie ont nécessairement le même prix. On peut montrer, par exemple, que, dans le cadre d'un contrat forward sur un actif S, si la date de paiement est T et si on se situe à la date t, alors le prix du contrat (payé en T mais fixé en t) est $\frac{S_t}{DF(t,T)}$.

Par ailleurs si C est un cash flow aléatoire à la date T, et si F est son prix forward en t, alors le prix en t de C payé en T est $DF(t,T)F$.

1.3 Stratégie autofinancée

J'ai parlé plus haut de stratégie. Une stratégie autofinancée est stratégie dynamique d'achats et de ventes d'actifs, telle que la valeur du portefeuille correspondant ne soit pas modifiée par le retrait ou l'ajout d'argent. L'hypothèse de complétude des marchés postule qu'une option européenne peut être répliquée par un portefeuille d'actifs simples. En d'autres termes, pour un call de strike K et de maturité T, il existe une stratégie dont la valeur du portefeuille à T est $(S_T - K)^+$. Par absence d'arbitrage, le prix de l'option en t est égal à la valeur du portefeuille en t.

1.4 Produits de taux

Une courbe des taux à la date t est une fonction $T \mapsto DF(t,T)$. Je dis une et non la courbe des taux parce que chaque banque calcule sa propre courbe. A partir de celle-ci, la banque peut calculer le taux linéaire, les prix forward... Le taux IBOR de maturité T est la moyenne arithmétique des taux linéaires de maturité T de certaines banques. L'hypothèse d'absence d'arbitrage impose le fait que les taux linéaire de toutes les banques soient égaux. Ce n'est pas le cas en réalité ; Le marché n'est pas parfaitement liquide. Cependant, dans cet exposé, nous considérerons que tous ces taux sont égaux.

Le zéro coupon forward de maturité T, $DF_t(T,\theta)$, est la somme fixée aujourd'hui (t), à payer en T pour obtenir un zéro-coupon en T, c'est -à-dire, recevoir un euro en θ. Il est égal à :

$$DF_t(T,\theta) = \frac{DF(t,\theta)}{DF(t,T)}$$

Le taux forward linéaire est défini par :

$$DF(t,T,\theta) = \frac{1}{1 + (\theta - T)L_t(T,\theta)}$$

Théorème 1. *Le taux linéaire forward est égal au forward sur le taux linéaire et de maturité θ. En d'autres termes, Le prix aujourd'hui (t) du taux linéaire $(\theta - T)L(T, \theta)$ payé en θ est $DF(t, \theta)L_t(T, \theta)$.*

Le taux court est un taux de maturité infinitésimale logarithmique :

$$r_t = \partial_T(ln(DF(t, T)))$$

Il n'est pas observable en pratique.

Un swap est un échange de flux financiers entre deux parties. Le payeur paye régulièrement un taux fixe S et recoit le taux IBOR de maturité T à la fin d'une période de temps T. La contrepartie qui recoit le taux fixe et paye le taux variable IBOR est appelée receveur.

Exemple 1. *Swap 10 ans contre EURIBOR 6 mois, fréquence semi-annuelle*

La contrepartie A (payeur) s'engage dans notre exemple à verser au receveur B le montant $(T_i - T_{i-1})S$ tous les six mois, en T_i (S est le taux fixe). En échange, la contrepartie B s'engage à verser la somme de $(T_i - T_{i-1})L(T_{i-1}, T_i)$ au temps $T_i = aujourd'hui + i * 6mois$, où i varie de 1 à 20. A est payeur de la jambe fixe et B est payeur de la jambe variable.

Remarque 1. *Ce qui est payé n'est pas exactement le taux linéaire mais plutôt le taux linéaire fois la durée d'une période. De même, ce que le payeur paye est le taux fixe multiplié par la durée de la période.*

Le taux fixe choisi est tel qu'il égalise la valeur financière des flux payés par le payeur et ceux payés par le receveur. Dans ces conditions, si le swap commence en T_0 et se termine en T_n, les dates de paiement étant les T_i ($i \leq 1$) :

$$S(T_0, T_n) = \frac{1 - DF(T_0, T_n)}{\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})DF(T_0, T_i)}$$

Si le taux est décidé en t, avant T_0, on prend le taux de swap dit forward :

$$S(t, T_0, T_n) = \frac{DF(t, T_0) - DF(t, T_n)}{(T_i - T_{i-1})\sum_{i=1}^{n} DF(t, T_i)}$$

Enfin le level du swap calculé en t est :

$$LVL(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^{n} \delta DF(t, T_i)$$

où $\delta = T_i - T_{i-1}$.

Remarque 2. *Il faut noter que le taux linéaire L(t,T) est connu en t mais est payé est T. Cela correspond à ce que le théorème 1 affirme.*

1.5 Options sur produits de taux

Un caplet de maturité T est un call sur le taux IBOR. Si K est son strike, alors son payoff est $(T_1 - T_0)(L(T_0, T_1) - K)^+$ reçu en T_1 mais connu dès T_0.

Un caps est une série de caplets. Son prix est donc la somme de ses caplets.

Une swaption (payeuse) de strike K et de maturité T sur un swap de longueur θ est le droit d'entrer dans un swap qui débute en T où on va payer le taux fixe K. Si S est le taux de swap (connu en T), alors la valeur de la swaption à la date T est $(S-K)^+LVL(T)$. En effet, ceci est vrai car lorsque S est le taux fixe, la valeur de la jambe variable est égale à la valeur de la jambe fixe à T.

Remarque 3. *Un caplet est une swaption dont le swap n'a qu'une période.*

Chapter 2

Pricing

2.1 Probabilité risque neutre

Une des conséquences des hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés est l'existence et l'unicité à équivalence près d'une mesure de probabilité dite probabilité martingale, ou probabilité risque-neutre, telle que le processus des prix actualisés des actifs ayant une source de risque commune est une martingale sous cette probabilité. On la note P^*. Cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des sous-jacents de ces actifs si l'espérance du taux de rendement de ceux-ci était le taux d'intérêt sans risque (d'où le terme risque-neutre : aucune prime n'est attribuée à la prise de risque). En effet, sous cette probabilité, les actifs suivent la dynamique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t + \sigma_t dW_t^*$$

où W^* est un mouvement brownien sous la nouvelle probabilité. Dans ce cadre, le prix actualisé de l'actif $e^{-\int_0^t r_s ds} S_t$ suit la dynamique :

$$\frac{d(e^{-\int_0^t r_s ds} S_t)}{e^{-\int_0^t r_s ds} S_t} = \sigma_t dW_t^*$$

c'est donc une martingale.

Dès lors, la valeur des stratégies autofinancées sont également des martingales sous cette probabilité.

2.2 Pricing d'une option

Soit une option européenne de maturité T sur un actif S qui paye $h(S_T)$ en T. Le marché étant supposé complet, si V_t est la valeur en t d'une stratégie autofinancée qui reproduit l'option, c'est à dire qui vaut $h(S_T)$ en T, alors le prix de l'option en t est V_t. Or comme la valeur actualisée de cette stratégie est une martingale, alors :

$$V_t = E^*[e^{-\int_t^T r_s ds} V_T | F_t] = E^*[e^{-\int_t^T r_s ds} h(S_T) | F_t]$$

Le taux instantané est plus un instrument théorique qu'une véritable donnée de marché. Il faut donc trouver une autre solution.

Soit P^T la probabilité dite T-forward neutre, définie par :

$$\frac{dP^T}{dP^*}|_t = \frac{e^{-\int_t^T r_t dt}}{DF(t,T)}$$

Alors, si F_t est le prix forward de maturité T du portefeuille autofinancé V, alors si $t_0 \leq t_1 \leq T$:

$$\begin{aligned}
E^T[F_{t_1}|t_0] &= E^*[\frac{e^{-\int_{t_0}^T r_t dt}}{DF(t_0,T)} * \frac{1}{DF(t_1,T)} * V_{t_1}|t_0] \\
&= E^*[\frac{e^{-\int_{t_0}^T r_t dt}}{DF(t_0,T)} * \frac{1}{DF(t_1,T)} * V_{t_1}|t_1|t_0] \\
&= E^*[\frac{e^{-\int_{t_0}^{t_1} r_t dt}}{DF(t_0,T)} * V_{t_1}|t_1|t_0] \\
&= \frac{1}{DF(t_0,T)} E^*[e^{-\int_{t_0}^{t_1} r_t dt} * V_{t_1}|t_0] \\
&= \frac{1}{DF(t_0,T)} V_{t_0} \\
&= F_{t_0}
\end{aligned}$$

F_t est donc une martingale sous cette nouvelle probabilité. On a alors :

$$\begin{aligned}
V_t &= F_t DF(t,T) \\
&= DF(t,T) E^T[F_T] \\
&= DF(0,T) E^T[V_T] \\
&= DF(0,T) E^T[(F_T - K)^+]
\end{aligned}$$

Comme le prix forward est un processus d'Îto, il suit une dynamique de la forme :

$$dF_t = \sigma_t dW_t^T$$

où W^T est un brownien sous la probabilité forward neutre.

Il ne reste plus alors qu'à postuler une dynamique pour σ_t. Tel que je l'ai écrit σ_t est la volatilité normale. On utilise plus souvent la formulation $dF_t = \sigma_t F_t dW_t^T$. Dans ce cas, σ_t est la volatilité log-normale.

2.3 Modèle de Black and Scholes

Le modèle de Black and Scholes postule que la volatilité log-normale est un paramètre constant :

$$dF_t = \sigma F_t dW_t^T$$

Alors : $F_t = F_0 e^{\sigma W_t^T - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$ et donc :

$$Call = DF(0,T)(F_0 N(d_1) - K N(d_0))$$

où :

$$d_0 = \frac{ln(F_0/K)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

$$d_1 = d_0 + \sigma\sqrt{T}$$

La fonction $\sigma \mapsto Call$ est une bijection.

En pratique, on regarde le prix des options et on en déduit la volatilité σ. En effet, la volatilité nous donne une information directe sur la manière d'évoluer de l'actif. On se sert également de ce paramètre pour gérer des portefeuilles de couverture, c'est à dire qui garantissent, en n'investissant que dans les actifs, d'obtenir à la maturité un portefeuille de valeur $(S_T - K)^+$ en T. Malheureusement, en observant le marché, la volatilité implicite varie avec le strike alors que le modèle postule qu'elle est une caractéristique intrinsèque de l'actif sous-jacent. La courbe de la volatilité implicite (le plus souvent log-normale) en fonction du strike est appelée le smile en raison de sa forme de sourire.

2.4 Pricing d'une swaption

En reprenant les notations du chapitre précédent, le prix d'une swaption en t est $DF(t,T_0)E^{T_0}[(S - K)^+ LVL(T_0)]$. Si on introduit la probabilité P^{LVL} et si δ est la longueur d'une période ($\delta = T_i - T_{i-1}$) :

$$\frac{dP^{LVL}}{dP^{T_0}}|t = DF(t,T_0)\frac{\sum_{i=1}^{n} exp(-\int_{T_0}^{T_i} r_s ds)}{LVL(t,T_0,T_n)}\delta$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&E^{LVL}[S(t_1,T_0,T_n)|t_0] \\
&\qquad = \delta E^{T_0}[DF(t_0,T_0)\frac{\sum_{i=1}^{n} exp(-\int_{T_0}^{T_i} r_s ds)}{LVL(t_0,T_0,T_n)} S(t_1,T_0,T_n)|t_0] \\
&\qquad = \delta E^{T_0}[DF(t_0,T_0)\frac{\sum_{i=1}^{n} exp(-\int_{T_0}^{T_i} r_s ds)}{LVL(t_0,T_0,T_n)} \frac{DF(t_1,T_0) - DF(t_1,T_n)}{LVL(t_1,T_0,T_n)}|t_0] \\
&\qquad = \delta E^{T_0}[DF(t_0,T_0)\frac{\sum_{i=1}^{n} exp(-\int_{T_0}^{T_i} r_s ds)}{LVL(t,T_0,T_n)} \frac{DF(t_1,T_0) - DF(t_1,T_n)}{LVL(t_1,T_0,T_n)}|t_1|t_0] \\
&\qquad = E^{T_0}[\frac{DF(t_0,T_0)}{DF(t_1,T_0)}\frac{LVL(t_1,T_0,T_n)}{LVL(t_0,T_0,T_n)}\frac{DF(t_1,T_0) - DF(t_1,T_n)}{LVL(t_1,T_0,T_n)}|t_1|t_0] \\
&\qquad = (1 - E^{T_0}[\frac{DF(t_1,T_n)}{DF(t_1,T_0)}|t_0])\frac{DF(t_0,T_0)}{LVL(t_0,T_0,T_n)} \\
&\qquad = \frac{DF(t_0,T_0) - DF(t_0,T_n)}{LVL(t_0,T_0,T_n)} \\
&\qquad = S(t_0,T_0,T_n)
\end{aligned}$$

De plus, comme financièrement la swaption équivaut à un payoff en T_0 de valeur $(S(T_0,T_0,T_n) - K)^+ LVL(T_0,T_0,T_n)$, on a :

$$\begin{aligned}
&\text{Swaption}(t, S(t,T_0,T_n), K) = DF(t,T_0)E^{T_0}[(S(T_0,T_0,T_n)-K)^+ LVL(T_0,T_0,T_n)|t] \\
&= DF(t,T_0)E^{T_0}[(S(T_0,T_0,T_n)-K)^+ LVL(T_0,T_0,T_n)|T_0|t] \\
&= E^{T_0}[(S(T_0,T_0,T_n)-K)^+ DF(t,T_0)(\delta\sum_{i=1}^{n} exp(-\int_{T_0}^{T_i} r_s ds))|T_0|t] \\
&= LVL(t,T_0,T_n)E^{T_0}[(S(T_0,T_0,T_n)-K)^+ DF(t,T_0)\frac{\delta\sum_{i=1}^{n} exp(-\int_{T_0}^{T_i} r_s ds)}{LVL(t,T_0,T_n)}|T_0|t] \\
&= LVL(t,T_0,T_n)E^{LVL}[(S(T_0,T_0,T_n)-K)^+|t]
\end{aligned}$$

On a donc :

- Le taux swap forward est une martingale sous cette probabilité ;
- $Swaption = LVL(t)E^{LVL}[(S-K)^+]$.

On se retrouve donc, si on substitue le DF par le level et la probabilité forward par la probabilité level, dans la même situation que précédemment. Le problème de la volatilité se pose de la même façon.

2.5 SABR

On introduit un modèle plus complexe que le modèle de Black and Scholes, dit modèle SABR qui est largement utilisé :

$$dF = \sigma_t F^\beta dW_1$$
$$d\sigma_t = \alpha\sigma_t dW_2$$
$$\sigma_0 = \sigma$$
$$dW_1 dW_2 = \rho dt$$

W_1 et W_2 sont des mouvements browniens corrélés, et F est le prix forward. Ici, σ_t n'est ni la volatilité normale ($\sigma_t {F_t}^\beta$), ni la volatilité log-normale ($\sigma_t {F_t}^{beta-1}$), mais la volatilité dite sigma-beta. β est compris entre 0 et 1.

Il y a quatre paramètres constants à calibrer: σ, α, β, ρ. En pratique, on ne calibre pas σ mais la volatilité à-la-monnaie (ATM), c'est à dire la volatilité implicite correspondant au strike $K = F_0$. Tous ces paramètres sont calibrés d'après la forme du smile. Par ailleurs, la calibration doit se faire pour tous les swaps. Elle se fait en fait pour les plus liquides (les plus échangés). On obtient les paramètres des autres swaps par interpolation par rapport à la maturité des swaptions (c'est-à-dire le temps avant le début du swap) et la longueur des swaps.

Chapter 3

Reconstruire la surface de volatilité : un exemple de calibration

3.1 Situation

Les caps sont des séries de caplets. Dès lors, le prix d'un cap est la somme des prix de ses caplets. A partir des prix de tous les caplets, on peut donc connaître le prix de tous les caps. Inversement, à partir du prix de certains caps, on peut essayer d'avoir une idée du prix des caplets.
En effet, certains caps sont très liquides. Leur prix est alors à l'équilibre au sens de Walras. Le prix proposé est supposé être le bon prix. On peut alors essayer de d'induire le prix des caplets.
La méthode employée est celle de Newton multi-dimensionnelle.

3.2 Méthode

On suppose que les paramètres α, β, ρ sont calibrés pour tous les instruments. Il ne reste donc plus qu'à calibrer la volatilité implicite à-la-monnaie. On calibre donc la volatilité ATM des caplets par rapport aux prix des caps.

- On dispose du prix de n caps liquides. Ces caps sont faits de caplets sur taux linéaires de même longueur, c'est-à-dire que pour tous les taux linéaires $L(t,T)$ considérés, on a toujours le même $T-t$. Soit Y le vecteur des prix de ces caps.

- On sélectionne n caplets principaux que l'on appelle piliers. Bien évidemment, on fait en sorte que ces caplets fassent partie des caps de Y. Soit X le vecteur des volatilités ATM de ces caplets.

- On a une fonction $f : X \mapsto Y$:

  $X \rightarrow$ volatilité ATM de tous les caplets de même longueur $(T-t)$ par interpolation (linéaire) et extrapolation par rapport à la maturité de l'option
  $\rightarrow$ On dispose alors de tous les paramètres SABR pour tous ces caplets
  $\rightarrow$ On peut pricer tous ces caplets
  $\rightarrow$ On peut obtenir Y en sommant les prix des caplets correspondant aux caps

- On cherche alors un vecteur X tel que $f(X) = Y$, Y étant connu.

- f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Comme les fonctions de pricing sont régulières, f l'est. Dans la plupart des cas elle est localement inversible (voir remarque suivante).

On utilise une méthode de Newton pour obtenir une réponse satisfaisante. La méthode de Newton est un algorithme qui permet de trouver successivement des approximations de plus en plus précises de X telles que $f(X) = 0$ (on se ramène au cas $Y = 0$), où f est une fonction régulière localement inversible (dans la zone qui nous intéresse, c'est-à-dire près d'une solution). En dimension 1, cela veut dire que f est, autour d'une solution, strictement croissante ou strictement décroissante.

Toujours en dimension 1, si on dispose d'une première approximation x_0 de la solution de $f(x) = 0$, alors on choisit comme nouvelle approximation l'intersection de la tangente de f au point $(x_0, f(x_0))$ et de l'axe des abscisses (l'intersection existe puisque f est inversible autour de x_0). On a donc :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On répète le processus :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

jusqu'à atteindre une précision suffisamment grande. En pratique, cela signifie que la distance entre x_n et x_{n-1} est très faible ou que $f(x_n)$ est très proche de 0.

On utilise ici une méthode de Newton de dimension n. L'algorithme devient :

$$X_{n+1} = X_n + Df^{-1}(f(X_0))(f(X_0))$$

Le problème est de calculer Df. C'est une matrice $(\frac{\partial f_i}{\partial X_j})_{i,j}$. Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial X_j}$, on fait varier X_j pour approximer la dérivée :

$$\frac{\partial f}{\partial X_j} \approx \frac{1}{w}(f(X_0, ..., X_j + w, ..X_n) - f(X))$$

Remarque 4. *Dans la plupart des cas, le $i^{\text{ème}}$ caplet fait partie du $i^{\text{ème}}$ caps et n'a que peu d'influence sur les autres caps (il n'en fait pas partie et ne peut influer sur ces caps qu'à cause de l'interpolation). Dès lors, les coefficients diagonaux de la matrice Df sont beaucoup plus importants que ses autres coefficients. La matrice est alors inversible et on peut appliquer la méthode de Newton.*

3.3 Convergence

Si A est une solution de $f(X) = 0$, et si X_0 est une première approximation, alors :

$$0 = f(A) = f(X_0) + Df(X_0).(A - X_0) + \frac{1}{2}H(X_0 - A)$$

où H est une forme quadratique telle que l'on puisse trouver ξ_1, .., ξ_n situés sur le segment $[X_0, A]$ tels que :

$$H_i(X_0 - A) = (X_0 - A)^t Hess_i(\xi_i)(X_0 - A)$$

où $Hess_i(\xi_i)$ est la matrice hessienne de f_i en ξ_i.
Alors, si X_1 est l'approximation suivante :

$$X_1 - A = X_0 - Df^{-1}(f(X_0))(f(X_0)) - A = \frac{1}{2}Df^{-1}(f(X_0))(H(X_0 - A))$$

En majorant les normes dérivées secondes de f au voisinage de A et en minorant la norme de Df, il existe $K > 0$ tel que :

$$|X_1 - A| \leq K|X_0 - A|^2$$

Puis par récurrence :

$$K|X_n - A| \leq (K|X_0 - A|)^{2^n}$$

Alors :

$$log|X_n - A| \leq 2^n log(K|X_0 - A|) - log(K)$$