MAGISTERE 1ère ANNEE

Examen d'intégration-probabilités, Session 2

Mercredi 11 mai 2005

Durée 2h30

Ni notes ni calculettes ni portables (etc.) SVP. Comme toujours, il vous est demandé de justifier soigneusement vos réponses; il en sera tenu compte. Je n'ai pas écrit de corrigé, donc il se pourrait qu'il y ait plus d'erreurs que d'habitude dans l'énoncé.

Barème provisoire approximatif: **7.5 + 1.5 + 3 + 8**.

Problème 1. Il s'agit de redémontrer Egoroff et Lusin, donc ne les utilisez pas pour faire le problème.

1. On se donne un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ et une suite $\{f_n\}$ de fonctions mesurables $E \to \mathbb{R}$. On suppose que μ est finie, et que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour μ-presque tout $x \in E$.

a. On pose $Z_{k,n} = \{x \in E\,;\, |f_m(x) - f(x)| > 2^{-k}$ pour au moins un $m \geq n\}$. Montrer que pour tout $k \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mu(Z_{k,n}) = 0$.

b. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(B_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et que la suite $\{f_n\}$ converge vers f uniformément sur $E \setminus B_\varepsilon$. [Indication: prendre une union d'ensembles $Z_{k,n}$].

2. On se place maintenant sur un intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$, que l'on munit de la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens et de la mesure de Lebesgue λ. On se donne une fonction borélienne bornée $f : I \to \mathbb{R}$.

a. Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe une fonction continue $f_n : I \to \mathbb{R}$ telle que $\int_I |f - f_n| d\lambda \leq 2^{-n}$.

b. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour λ-presque tout $x \in I$.

c. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_\varepsilon \in \mathcal{B}$ tel que $\lambda(B_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et la restriction de f à $I \setminus B_\varepsilon$ est continue.

d. Généraliser le résultat de la question **c.** au cas où f est une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

e. Généraliser au cas où f est borélienne, pas forcément bornée.

3. On se donne maintenant un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que pour $\varepsilon > 0$, il existe $B_\varepsilon \in \mathcal{B}$ tel que $\lambda(B_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et la restriction de f à $I \setminus B_\varepsilon$ est continue. Montrer que f est mesurable pour la tribu de Lebesgue. [Indication: encadrer $E_\lambda = \{x; f(x) > \lambda\}$ entre deux ensembles.]

Exercice 2. Quel (type de) loi de probabilité utiliseriez vous pour modéliser le nombre de lettres qu'une personne λ recevra demain? Expliquez pourquoi.

Exercice 3. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et $V : \Omega \to \mathbb{R}^3$ une variable aléatoire dont la loi a la densité $f = \dfrac{3}{4\pi} \mathbf{1}_{B(0,1)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$. Notons X, Y, et Z les trois coordonnées de V.

1. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

2. On rappelle que pour presque-tout point $(x, y, z) \in B(0,1)$ on peut écrire (x, y, z) de manière unique sous la forme

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\sin\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\varphi, \end{aligned}$$

avec $0 \leq r < 1$, $-\pi < \theta < \pi$, et $0 < \varphi < \pi$. On utilise ceci pour écrire $V = (R\cos\Theta\sin\Phi, R\sin\Theta\sin\Phi, R\cos\Phi)$, avec des variables aléatoires R, Θ, Φ à valeurs dans $]0,1[$, $]-\pi,\pi[$, et $]0,\pi[$ respectivement.
a. Quelle est la loi de (R, Θ, Φ)?
b. Quelles sont les lois de R, de Θ, et de Φ?
c. les variables R, Θ, et Φ sont-elles indépendantes?

Problème 4. (Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$). On se donne $p \in]0,1[$ et une suite $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernouilli de paramètre p, c.à.d. telles que

$$P(X_n = 1) = p \;\text{ et }\; P(X_n = -1) = 1 - p.$$

On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} X_j$ pour $n > 0$. Les $S_n(\omega)$ sont les positions successives de notre marche aléatoire. On veut savoir, par exemple, si S_n passe une infinité de fois par chaque point $x \in \mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f(x, n)$ la probabilité que $S_k(\omega) = x$ pour au moins un $k \in \{0, 1, \cdots n\}$.

1. Calculer $f(0, n)$ pour $n \geq 0$ et $f(x, 0)$ pour $x \in \mathbb{Z}$.

2. Quelle est la loi de S_n?

3. Comparer la loi de $S_n - X_1$ et celle de S_{n-1} (pour $n \geq 1$).

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et tout $n > 0$,

$$f(x, n) = (1-p)f(x+1, n-1) + pf(x-1, n-1).$$

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, la limite $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x, n)$ existe. Quelle interprétation faut-il donner de $f(x)$?

6. Montrer que $f(x) = (1-p)f(x+1) + pf(x-1)$ pour $x \in \mathbb{Z}$.

7. Montrer que $P(\limsup_{n\to+\infty} S_n = +\infty) \in \{0, 1\}$.

8. Montrer que si $P(\limsup_{n\to+\infty} S_n = +\infty) < 1$, alors il existe $k > 0$ tel que $f(k) < 1$.

9. Montrer que pour $a \in \mathbb{N}$, $P(\displaystyle\max_{0\leq k\leq n} S_k \geq a) = f(a, n)$.

10. En déduire que $E(\displaystyle\max_{0\leq k\leq n} S_k) = \sum_{a>0} f(a, n)$, puis que $E(\displaystyle\sup_{k\geq 0} S_k) = \sum_{a>0} f(a)$.

On suppose maintenant que $p = 1/2$.

11. Montrer que $f(-x) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$, puis calculer $f(x)$ pour tout x.

12. Montrer que $P(\limsup_{n\to+\infty} S_n = +\infty) = P(\liminf_{n\to+\infty} S_n = -\infty) = 1$.

13. Montrer que presque-sûrement, S_n passe par chaque entier une infinité de fois.