Équation de Schrödinger non-linéaire

Oana Ivanovici
Coordonné par prof. Nicolas Burq

1 Introduction

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ une variété riemanienne à bord. Considérons l'équation Schrödinger non-linéaire défocalisante posée dans Ω avec la condition de Dirichlet :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^\alpha u, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u\,|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Le domaine de définition du Laplacien de Dirichlet dans $L^2(\Omega)$, pour Ω de classe C^2 est $H^2(\Omega) \bigcap H_0^1(\Omega)$. Le flot de cette équation conserve, au moins formellement, la masse et l'énergie (voir T.Cazenave [6]).

De nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude du problème de Cauchy pour de telles équations. Pendant longtemps, des résultats ont été obtenus dans le cas où la variété est $\mathbb{R}^d$ (voir les travaux de J.Ginibre-G.Velo [7], T.Kato [9]) : en effet, des formules *explicites* sont alors disponibles pour l'étude du semi-groupe d'évolution *linéaire* et elles permettent d'établir une large classe d'estimations *à priori* : inégalités de Strichartz ou effet régularisant (pour l'équations de Schrödinger dans ce dernier cas). Plus récemment, ces techniques ont pu être développées dans le cas de géométries non triviales (voir [4, 3] par exemple). Cependant la situation reste loin d'être aussi bien comprise que dans le cas de $\mathbb{R}^d$.

On se propose içi d'établir des résultats analoques pour (NLS) cubique en dehors d'un ensemble convexe. L'argument principal est fondé sur une généralisation des inégalités de Strichartz.

2 NLS dans $\mathbb{R}^d$: Résultats classiques

La solution de l'équation de Schrödinger linéaire sur $\mathbb{R}^d$

$$(i\partial_t + \Delta)u = 0, \; u|_{t=0} = u_0 \in L^2(\Omega) \tag{2}$$

est connue explicitement,

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi i t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy. \tag{3}$$

L'équation (2) induit un gain de régularité spatiale pour presque tout t par rapport à la donnée initiale que l'on peut écrire :

$$\|\chi u(t)\|_{L^2([0,T];G)} \leq C\|u_0\|_{L^2}. \tag{4}$$

Ici G est un sous-espace strict de L^2 (un espace des fonctions "régulières") et χ une fonction C_c^∞. On appelle cette propriété ***effet régularisant***. Pour $\mathbb{R}^d$ on a montré l'effet régularisant avec $G = H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d)$.

Des estimations plus rafinées sont les ***inégalités de Strichartz*** où on n'a plus des informations ponctuelles, mais une moyenne en temps de la norme $L^q(\mathbb{R}^d)$: si on note $e^{it\Delta}$ le semi-goupe linéaire associé à l'opérateur de Schrödinger on a :

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p(\mathbb{R},L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{5}$$

où (p,q) est un d-couple admissible, i.e. p,q vérifient la condition de changement d'échelle $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}$ et de plus $2 \leq p \leq \infty$ et $(p,q,d) \neq (2,\infty,2)$. On peut retrouver la condition de d-admissibilité grâce à l'invariance de l'équation de Schrödinger linéaire sous le changement d'échelle $t \to \lambda^2 t$, $x \to \lambda x$. On appelle exposant critique α pour $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ l'exposant tel que l'équation

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^\alpha u \tag{6}$$

reste invariante par $u(t,x) \to \lambda^\theta u(\lambda^2 t, \lambda x)$, ainsi que sa norme de l'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, $\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u\|_{L^2}$. Cela implique $s < \frac{d}{2}$ et $\theta = \frac{4}{d-2s}$. La non-linéarité $|u|^\alpha u$ est invariante par le changement d'échelle mentionné, mais pour avoir une régularité H^1 il faut imposer $\alpha \geq 1$.

Théorème 1. *Soient $d \geq 2$, $1 \leq \alpha < \frac{4}{d-2}$ et $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^d)) \bigcap L^p_{loc}(\mathbb{R}, W^{1,q}(\mathbb{R}^d))$, pour tous (p,q) d-admissibles, de l'équation :*

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = |u|^\alpha u, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{7}$$

Démonstration. On résout d'abord localement en temps par une méthode de point fixe. On définit :

$$\Phi(u)(t) := e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}(|u(\tau)|^\alpha u(\tau))d\tau \tag{8}$$

Lemme 1. *Pour $T > 0$ assez petit et ne dépendant que d'un majorant de $\|u_0\|_{H^1}$ et pour tout (p,q) d-admissible, l'application $\Phi : B(0,R) \to B(0,R)$ est une contraction pour un R convenable, où $B(0,R) \subset C((-T,T), H^1(\mathbb{R}^d)) \bigcap L^p((-T,T), W^{1,q}(\mathbb{R}^d))$*

Ce lemme est basé sur l'inégalité de Strichartz. La conservation de la norme H^1 et le fait que le temps d'existence donné par le lemme précédent ne dépend que d'un majorant de $\|u_0\|_{H^1}$ permet de réitérer l'argument au temps T et par induction d'obtenir l'existence globale. □

Si dans le cas de l'espace tout entier on a des résultats qui décrivent assez bien le comportement du flot, c'est grâce aux inégalités de type Strichartz, qui traduisent l'effet dispersiv du flot. Pour d'autres géométries, la difficulté d'obtenir de telles inégalités vient d'une plus faible propriété de dispersion et du manque d'une représentation explicite de la solution.

3 NLS dans un domaine extérieur de $\mathbb{R}^3$ Présentation du résultat

Lorsqu'on rajoute un obstacle Θ on peut démontrer l'effet régularisant avec un gain d'une demi-dérivée sous l'hypothèse de non-capture (i.e. *tout rayon optique sur* $\Omega = \mathbb{R}^3 - \Theta$ *quitte tout compact de* Ω *en un temps fini*) : si $\partial\Theta \neq \emptyset$, pour tout $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ on a :

$$\|\chi e^{it\Delta} v_0\|_{L^2_{[-T,T]} H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C \|v_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{9}$$

Des inégalités de Strichartz avec pertes ont été obtenues dans [4] pour les solutions de l'équation de Schrödinger à l'extérieur d'un obstacle non-captant :

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^p_{[-T,T]} L^q(\Omega)} \leq C \|u_0\|_{H^{\frac{1}{p}}(\Omega)}. \tag{10}$$

Le point clé dans la preuve est l'effet régularisant (9), qu'on peut déduire grâce à la connaissance des estimations de la rézolvante du Laplacien [4, Prop.2.2] :

Proposition 1. *$\forall \chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ $\exists C > 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \geq 1$, $\forall 0 < \epsilon \ll 1$:*

$$\|\chi(-\Delta - (\lambda \pm i\epsilon)^2)^{-1} \chi\|_{L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|}.$$

Pour $|\lambda| \leq 1$ la résolvante est un opérateur borné sur $L^2(\Omega)$ de norme est indépendente de λ et ϵ.

L'estimation (10) permet de montrer :

Théorème 2. *(N.Burq-P.Gérard-N.Tzvetkov [4, Thm.1]) Soit $\Theta \subset \mathbb{R}^3$, un obstacle non-captant compact de bord C^∞. On suppose $\alpha < 2$. Alors :*

(i). Pour $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ l'équation (7) admet une unique solution globale $u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$ qui satisfait de plus les lois de conservations ; l'application $H_0^1(\Omega) \ni u_0 \to u \in C((-T,T), H_0^1(\Omega))$ est lipschitzienne sur les bornés de $H_0^1(\Omega)$ pour tout $T > 0$.

(ii). Pour $\alpha = 2$ l'affirmation précédente reste vraie si on impose que la norme $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}$ soit petite.

En suivant la stratégie de [4] j'ai obtenu dans [8] une amélioration de ce résultat dans le cas d'un domaine extérieur à une boule de $\mathbb{R}^3$: j'ai demontré que l'affirmation (i) de Théorème (2) pour l'équation de Schrödinger cubique en dimension trois est en effet vraie pour toute donnée initiale $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Ce résultat est une conséquence du théorème suivant :

Théorème 3. *(O.Ivanovici [8]) Soit $\Theta = B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ et Ω son complémentaire dans $\mathbb{R}^3$. Alors $\forall T > 0$ et pour tout (p,q) couple 3-admissible on a :*

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^p([-T,T], L^q(\Omega))} \lesssim \|u_0\|_{H^{\frac{4}{5p}}} \tag{11}$$

où Δ désigne le Laplacien de Dirichlet sur Ω.

4 Démonstration du Thm.2 à partir du Thm.3

On veut résoudre l'équation intégrale associée à (7) dans l'espace :

$$X_T := L^\infty_T H^1_0(\Omega) \cap L^p_T W^{\sigma,q}(\Omega)$$

avec $2 < p < \frac{12}{5}$, $\sigma = 1 - \frac{4}{5p}$ et avec la norme

$$\|u\|_{X_T} := \|u\|_{L^\infty_T H^1_0(\Omega)} + \|(1-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u\|_{L^p_T L^q(\Omega)}.$$

• On va se ramener à l'intervalle $[0, T]$ pour tout $T > 0$; et on va noter $L^p_T := L^p([0, T])$; les preuves pour $[-T, 0]$ découlent de la même façon.

Remarque 1. *Pour $2 < p < \frac{12}{5}$ on a l'injection continue $W^{1-\frac{4}{5p},q}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ où (p, q) 3-admissible, car $1 - \frac{4}{5p} > \frac{3}{q}$ qui implique $u \in L^p_T L^\infty(\Omega)$ pour tout $u \in X_T$.*

A l'aide de l'inégalité de Minkowski on trouve (avec Φ définit dans (8)) :

$$\|\Phi(u)\|_{L^\infty_T H^1_0(\Omega)} \leq C\Big(\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)} + \||u|^2 u\|_{L^1_T H^1_0(\Omega)}\Big) \leq$$

$$C\Big(|u_0\|_{H^1_0(\Omega)} + \|u\|_{L^1_T H^1_0(\Omega)}\|u\|^2_{L^\infty_T H^1_0(\Omega)} + T\|u\|_{L^\infty_T H^1_0(\Omega)} + T^{1-\frac{2}{p}}\|u\|_{L^\infty_T H^1_0(\Omega)}\|u\|^2_{L^p_T L^\infty(\Omega)}\Big) \leq$$

$$C\Big(\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)} + T\|u\|_{X_T} + (T^{1-\frac{2}{p}} + T)\|u\|^3_{X_T}\Big) \tag{12}$$

et d'autre part :

$$\|(1-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}\Phi(u)\|_{L^p_T L^q(\Omega)} \leq C\Big(\|(1-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u_0\|_{H_D^{\frac{4}{5p}}(\Omega)} + \int_0^T \|(1-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}(1+|u(s)|^2)u(s)\|_{H_D^{\frac{4}{5p}}(\Omega)}\Big) \leq$$

$$C\Big(\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)} + \int_0^T (1 + \|u(s)\|^2_{L^\infty})\|u(s)\|_{H^1_0(\Omega)}\Big) \leq C\Big(\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)} + T\|u\|_{X_T} + T^{1-\frac{2}{p}}\|u\|^3_{X_T}\Big) \tag{13}$$

On choisit $R > 4C\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)}$ et T t.q. $4C\Big(T + (T + T^{1-\frac{2}{p}})R^2\Big) < 1$. De la même manière on peut estimer

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{X_T} \lesssim \|u - v\|_{X_T}\Big(T + (T + T^{1-\frac{2}{p}})(1 + \|u\|^2_{X_T} + \|v\|^2_{X_T})\Big) \tag{14}$$

En prenant T éventuellement plus petit on a $C\Big(T+(T+T^{1-\frac{2}{p}})(1+2R^2)\Big) < 1$, on en déduit que Φ est une contraction de $B(0, R) \subset X_T$ dans $B(0, R)$. Par le théorème de point fixe il existe un unique $u \in X_T$ t.q. $\Phi(u) = u$ qui vérifie en plus (7).

• La définition de l'espace H^s_D est rappellée dans la section suivante.

5 Esquisse de démonstration du Thm.3

Pour montrer le Théorème 3 on utilise les fonctions propres du Laplacien et la théorie des fonctions de Bessel près du bord pour en déduire un "effet régularisant" $H^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{4}}$ pour des données initiales localisées en fréquence $\lambda > 0$ dans un voisinage du bord de Ω de taille $\lambda^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$ à déterminer. En dehors de ce voisinage on applique un résultat du à G.Staffilani et D.Tataru [11] qui nous donne des inégalités de Strichartz classiques hors d'un voisinage de l'obstacle. Dans le cas considéré ici on a pourtant une perte de α dérivée due au fait qu'on est à distance $\lambda^{-\alpha}$ du bord.

5.1 Rappel et notations

On considère la forme quadratique :

$$Q(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$

de domaine $H^1_D := D(Q) = H^1_0(\Omega)$, fermée sur son domaine ; l'opérateur autoadjoint associé Δ est le Laplacien de Diriclet sur Ω, de domaine $H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Le dual topologique de $H^1_0(\Omega)$ se note $H^{-1}(\Omega)$ et c'est un sous-espace de $D'(\Omega)$. On définit $H^{-s}(\Omega)$ par interpolation pour $s \in [-1, 0]$ et on a la dualité entre $H^s(\Omega)$ et $H^{-s}(\Omega)$ pour $s \in [0, 1]$.

Proposition 2. *Soient $d \geq 2$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine C^∞. Alors on a les inclusions suivantes :*

$H^1_0(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $2 \leq q \leq \frac{2d}{d-2}$ ($q < \infty$ *si* $d = 2$),

$H^s_D(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \frac{s}{d}$, $s \in [0, 1)$,

$H^{s+1}_D(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega)$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \frac{s}{d}$, $s \in [0, 1)$,

$H^{s+\frac{1}{p}}_D(\Omega) \subset W^{s,q}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}$, $p \geq 2$, $s \in [0, 1]$,

$W^{s,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, $s > \frac{d}{p}$, $p \geq 1$.

La démonstration découle des inclusions de Sobolev classiques en utilisant des opérateurs de prolongement.

5.2 Localisation en fréquence

Pour démontrer l'inégalité (11) on va se ramener d'abord au cas des données initiales localisées en fréquence et on va recoller les résulats à la fin. Soit $\psi \in C^\infty_0((\frac{1}{4}, 4))$, $\psi = 1$ dans un voisinage ouvert de 1, $\lambda > 0$. Par le calcul fonctionnel $\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u(x)$ sera par définition la fonction dont la transformée de Fourier est $\psi(\frac{|\xi|^2}{\lambda^2})\hat{u}(\xi)$.

Pour estimer la norme $L^2(\Omega)$ de la solution $e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0$ de l'équation (2) il faut d'abord regarder le problème :

$$(i\partial_t + \Delta)v(t, x) = \psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})\chi(x)f(t, x) \tag{15}$$

qui donne par Fourier en temps :

$$(-\tau + \Delta)\hat{v}(\tau, x) = \psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})\chi(x)\hat{f}(\tau, x) \tag{16}$$

Pour $-\frac{\tau}{\lambda^2}$ hors d'un voisinage de 1 l'opérateur $(-\tau + \Delta)$ est inversible et la norme de sa résolvante est majorée par $\frac{1}{(1+\tau)\lambda^2}$; en effet si on note $I := [\frac{1}{4}, 4]$ on a :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}-I}(-\frac{\tau}{\lambda^2})\hat{v}(\tau) = (\Delta - \tau)^{-1}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})\chi\hat{f}(\tau)$$

de norme $\|\mathbf{1}_{\mathbb{R}-I}(-\frac{\tau}{\lambda^2})\hat{v}(\tau)\|_{L^2} \lesssim \frac{\|\psi\|_{L^\infty}}{(1+\tau)\lambda^2}\|\chi\hat{f}(\tau)\|_{L^2}$.

On est ramené alors à résoudre l'équation ($\chi \in C^\infty_0$) :

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda^2)\hat{v} = \psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})\chi\hat{f} \\ \hat{v}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

5.3 Estimation dans un voisinage du bord convenablement choisi

Soit $\chi \in C_0^\infty((-1,1))$, $\chi(x) = 1$ sur $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ et $\chi_\lambda(.) := \chi(\lambda^\alpha.)$; dans ce qui suit x_n va désigner la distance au bord de Ω.

Proposition 3. *On a pour tout $T > 0$ et tout $\lambda \geq 1$:*

$$(i). \quad \|\chi_\lambda \psi(\tfrac{-\Delta}{\lambda^2}) v\|_{L^2_T H^{s+1}_D(\Omega)} \leq C\lambda^{-\frac{\alpha}{2}} \|\psi(\tfrac{-\Delta}{\lambda^2})\chi_\lambda f\|_{L^2_T H^s_D(\Omega)} \tag{18}$$

pour $s \in [-1,1]$ et $v(t) = \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})\chi_\lambda f d\tau$,

$$(ii). \quad \|\chi_\lambda e^{it\Delta}\psi(\tfrac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2_T H_D^{s+\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C\lambda^{s-\frac{\alpha}{4}} \|\psi(\tfrac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{19}$$

pour $s \in [0,1]$.

Remarque 2. *La preuve montre que les constantes C ne dépendent pas de T, c.à.d. que les estimations sont* globales *en temps.*

Pour démontrer la Proposition (3) on étudie d'abord la solution de l'équation

$$\begin{cases} (\Delta + \lambda^2)w_\lambda = \chi(\lambda^\alpha x_n) f \\ w_\lambda|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

On demande que w_λ soit sortante à l'extérieur de la boule $B(0, 1+\lambda^{-\alpha})$, où $1 > \alpha > 0$ sera déterminé plus tard.

Remarque 3. *Dans ce qui suit on va chercher des estimations de la norme L^2 de w_λ en fonction de $\|f\|_{L^2(\Omega_\lambda)}$ dans un petit voisinage Ω_λ du bord, en utilisant une fonction de troncature χ_λ qui va s'annuler hors d'un intrevalle de taille $\lambda^{-\alpha}$. On note qu'un rayon transversal reste dans le voisinage Ω_λ un temps $\simeq \lambda^{-\alpha}$. Si le rayon est diffractif, le temps passé dans Ω_λ est égal à $\lambda^{-\frac{\alpha}{2}}$. Cela encourrage de croire qu'on pourrait obtenir des bornes de la norme L^2 de w_λ de la forme type $\lambda^{-(1+\frac{\alpha}{2})}$.*

Pour passer à la norme L^2 de la solution du problème (15), v, on utilise le fait que la transformée de Fourier défini une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}, H)$, pour tout H espace de Hilbert.

On se place dans le système de coordonnées polaires où on note σ la variable sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ et on décompose toute solution de l'équation $(\Delta + \lambda^2)w = 0$ à l'extérieur de la boule unité en harmoniques sphériques, c'est à dire sous la forme :

$$w = \sum_\nu w_\nu(r) e_\nu(\sigma),$$

où $\{e_\nu\}_\nu$ désigne la base orthonormale de $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ formée des fonctions propres pour l'opérateur de Laplace sur la sphère associées aux valeurs propres ν. Les fonctions w_ν sont alors solutions de l'équation (pour $r \geq 1$) :

$$\begin{cases} \Big(\partial_r^2 + \frac{(d-1)}{r}\partial_r + (\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2})\Big) w_\nu(r) = \chi(\lambda^\alpha(r-1)) f_\nu(r) \\ w_\nu(1) = 0 \end{cases} \tag{21}$$

On trouve une formule explicite des solutions de (21) exprimée à l'aide des fonctions de Bessel ; on obtient (après un calcul assez touffu..) des bornes de la norme L^2 de la forme :

$$\|w_\nu\|_{L^2([1,1+\lambda^{-\alpha}])} \leq C \frac{\|f_\nu\|_{L^2([1,1+\lambda^{-\alpha}])}}{\lambda^{1+\frac{\alpha}{2}}} \tag{22}$$

où la constante C ne dépend ni de ν ni de λ. Cela aide à démontrer le point (i) de la Proposition (3) dans le cas $s=0$ et, par dualité, dans le cas $s=-1$. Pour $s=1$ on écrit :

$$\|\chi_\lambda w\|_{H^2_D(\Omega)} \approx \|\chi_\lambda w\|_{H^1_D(\Omega)} + \|\Delta(\chi_\lambda w)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{23}$$

On peut majorer le second terme de droite en l'écrivant :

$$\Delta(\chi_\lambda w) = \chi_\lambda \Delta w + [\Delta, \chi_\lambda]\tilde{\chi}_\lambda w. \tag{24}$$

Pour montrer le point (ii) de la Proposition (3) on utilise un argument de type TT^* : si on note A_λ l'opérateur qui à $u_0 \in L^2(\Omega)$ associe $\chi(\lambda^\alpha x_n)e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0$, il faut montrer que A_λ est borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2_T H^{\frac{1}{2}}_D(\Omega)$ de norme $C\lambda^{-\frac{\alpha}{4}}$, ce qui revient à montrer la continuité de son adjoint,

$$A^*_\lambda(f) = \int_0^T \psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})e^{-i\tau\Delta}\chi(\lambda^\alpha x_n)f(\tau)d\tau,$$

de $L^2_T H^{-\frac{1}{2}}_D(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ de norme majorée par $C\lambda^{-\frac{\alpha}{4}}$, ce qui est équivalent à dire que $A_\lambda A^*_\lambda$ définit par

$$(A_\lambda A^*_\lambda f)(t) = \int_0^T \chi(\lambda^\alpha x_n)e^{it\Delta}\psi^2(\frac{-\Delta}{\lambda^2})e^{-i\tau\Delta}\chi(\lambda^\alpha x_n)f(\tau)d\tau$$

est continu de $L^2_T H^{-\frac{1}{2}}_D(\Omega)$ dans $L^2_T H^{\frac{1}{2}}_D(\Omega)$ de norme $C\lambda^{-\frac{\alpha}{2}}$. On voit qu'il suffit d'appliquer (18) avec $s=-\frac{1}{2}$.

5.4 Estimations loin du bord

Dans cette partie on va chercher des estimations en dehors d'un petit voisinage de l'obstacle. L'idée c'est de construire une nouvelle fonction $v=\tilde{\chi}_n u$, qui soit solution d'un problème dont la partie non homogène soit à support compact dans la variable spatiale et d'appliquer pour celle-ci le [11, Thm.3] et [4, Prop.6], où on démontre des inégalités de Strichartz usuelles. On définit $\tilde{\chi}_n \in C^\infty_0$ par :

$$\tilde{\chi}_n(x) = \begin{cases} x_n, x_n \leq 1 \\ 1, x_n \geq 2 \end{cases}$$

Si on pose $v=\tilde{\chi}_n u$, avec u solution de (2), v va vérifier l'équation :

$$(i\partial_t + \Delta)v = (\Delta\tilde{\chi}_n)u + 2\nabla\tilde{\chi}_n\nabla u + \frac{\partial v}{\partial_n}|_{\partial\Omega}\otimes\delta^{(0)}_{\partial\Omega} - v|_{\partial\Omega}\otimes\delta^{(1)}_{\partial\Omega} = [\Delta,\tilde{\chi}_n]u \tag{25}$$

$$v|_{t=0} = \tilde{\chi}_n u|_{t=0} \tag{26}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0 \tag{27}$$

où δ est la mesure de Dirac $\partial\Omega$. Les deux derniers termes s'annulent. On a $[\Delta,\tilde{\chi}_n]u \in L^2_T H^{\frac{-1}{2}}_{comp}(\Omega)$ et :

$$\|[\Delta,\tilde{\chi}_n]e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2_T H^{\frac{-1}{2}}_D(\Omega)} \lesssim \|e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2_T H^{\frac{1}{2}}_D(\Omega)} \lesssim \|\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{28}$$

(voir [4], Prop. 2.7). La partie non-homogène de (25) est à support compact en espace et par conséquence on peut utiliser un résultat du à G.Staffilani et D.Tataru [11], Thm.3 (pour $p = 2$) et [4], Prop.2.10 pour obtenir des inégalités de Strichartz sans pertes pour v :

$$\|\tilde{\chi}_n e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^p_T L^q(\Omega)} \lesssim \|\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{29}$$

pour tout (p, q) paire 3-admissible, qui implique ensuite :

$$\begin{aligned}\lambda^{-\alpha}\|(1-\chi_\lambda))e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^p_T L^q(\Omega)} &\lesssim \|(1-\chi_\lambda)\tilde{\chi}_n e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^p_T L^q(\Omega)} \\ &\lesssim \|\tilde{\chi}_n e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^p_T L^q(\Omega)} \lesssim \|\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{30}$$

En particulier, pour $p = 2$ on obtient :

Proposition 4.

$$\|(1-\chi_\lambda))e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2_T L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \lesssim \lambda^\alpha \|\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{31}$$

5.5 Fin de la démonstration du Théorème 3

L'inégalité (19) avec $s = 1$ implique :

$$\|\chi_\lambda e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2_T L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \lesssim \|\chi_\lambda e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2_T H^1_D(\Omega)} \lesssim \lambda^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}\|\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{32}$$

Par un argument d'énergie on a aussi :

$$\|\chi_\lambda e^{it\Delta}u_0\|_{L^\infty_T L^2(\Omega)} \lesssim \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{33}$$

Par interpolation entre (32) et (33) (avec $\frac{2}{p}$ et $1-\frac{2}{p}$) on trouve :

$$\|\chi_\lambda e^{it\Delta}u_0\|_{L^p_T L^q(\Omega)} \lesssim \lambda^{\frac{1}{p}(1-\frac{\alpha}{2})}\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{34}$$

On a obtenu aussi des estimations loin du bord :

$$\|(1-\chi_\lambda))e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^p_T L^q(\Omega)} \lesssim \lambda^\alpha \|\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{35}$$

Si on impose la condition $\alpha = \frac{1}{p}(1-\frac{\alpha}{2})$ on trouve $\alpha = \frac{2}{2p+1}$. Maintenant, pour $p = 2$ cela donne $\alpha = \frac{2}{5}(\leq \frac{2}{3})$ et par conséquent :

$$\|e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2_T L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega)} \lesssim \lambda^{\frac{2}{5}}\|\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{36}$$

On utilise de nouveau l'interpolation entre (36) et :

$$\|e^{it\Delta}\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^\infty_T L^2(\Omega)} \lesssim \|\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{37}$$

avec $\frac{2}{p}$ et $1-\frac{2}{p}$ pour avoir le résultat du Thm.3 :

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p_T L^q(\Omega)} \lesssim \lambda^{\frac{4}{5p}}\|\psi(\frac{-\Delta}{\lambda^2})u_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{38}$$

pour tout (p, q) paire 3-admissible, $p \geq 2$.

Remarque 4. *On a donné la démonstration seulement dans le cas du Laplacien de Dirichlet. Le problème de Neumann se traite d'une façon similaire mais dans ce cas on va obtenir une perte de* $\frac{4}{5p} + \epsilon$ *dérivées dans le Thm.3, avec* $\epsilon > 0$ *arbitrairement petit.*

Remarque 5. *Le résultat n'est certainement pas optimal, pourtant il suffit d'assurer l'existence globale des solutions de Schrödinger cubique dans* $\mathbb{R}^3$ *; de plus, on l'obtient d'une manière simple et directe. En effet, on s'attend d'obtenir des inégalités de Strichartz sans pertes à l'extérieur d'un obstacle convexe, car H.Smith et C.Sogge ont montré cela pour l'équation des ondes [10].*

Références

[1] N. Burq. Semi-classical Estimates for the Resolvent in Nontrapping Geometries. *Int.Math.Res.Not.*, (5), 2002.

[2] N. Burq. Smoothing effect for Schrödinger boundary value problems. *Duke Math.Journal*, 123(2), 2004.

[3] N. Burq-P. Gérard-N. Tzvetkov. Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *American J.Math.*, (126) :569–605, 2004.

[4] N. Burq-P. Gérard-N.Tzvetkov. On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains. *Ann.I.H.Poincaré*, (21) :295–318, 2004.

[5] N. Burq-P.Gérard-N.Tzvetkov. Bilinear eigenfunctions estimates and the nonlinear Schrödinger equation on surfaces. *Invent. math.*, (159) :187–223, 2005.

[6] T. Cazenave. An introduction to nonlinear Schrödinger equations. *Textos de Métodos Matematicos*, 26, 1993.

[7] J. Ginibre-G. Velo. The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation. *Ann.I.P., Anal.non.lin.*, (2) :309–327, 1985.

[8] O. Ivanovici. On nonlinear Schrödinger equations in the exterior of a ball. *à soumettre*, 2006.

[9] T. Kato. On nonlinear Schrödinger equations. *Ann.Inst.H.Poincaré Phis.Théor.*, 46 :113–129, 1987.

[10] H. Smith-C. Sogge. On the critical semilinear wave equation outside convex obstacles. *J.Amer.Math.Soc.*, (8) :879–916, 1995.

[11] G. Staffilani-D.Tataru. Strichartz estimates for a Schrödinger operator with nonsmooth coefficients. *Comm.Part.Diff.Eq.*, 5-6(27) :1337–1372, 2002.