Problèmes de réflexion du processus de Langevin

Emmanuel Jacob

Septembre 2007

1 Introduction

Dans ce papier, tous les processus considérés sont supposés càdlàg, c'est-à-dire continus à droite et avec une limite à gauche en chaque instant.

1.1 Processus de Langevin et introduction au problème

1.1.1 Processus de Langevin

Langevin a introduit le processus qui porte son nom pour des raisons physiques, pour décrire le mouvement d'une particule soumise à une force aléatoire (par exemple la particule, passive, dans un milieu désordonné, subit les collisions de particules beaucoup plus petites). La force extérieure est alors modélisée par un bruit blanc. C'est à dire que si Y_t désigne la position de la particule au temps t, on a $\ddot{Y}_t = \dot{W}_t$, et donc

$$Y_t = Y_0 + t\dot{Y}_0 + \int_0^t W_s ds,$$

où W est un mouvement brownien standard.

Clairement Y n'est pas un processus de Markov, par contre $(Y, \dot{Y})$, fréquemment appelé processus de Kolmogorov, est markovien.

Soit Y le processus de Langevin standard, c'est-à-dire avec conditions initiales $Y_0 = \dot{Y_0} = 0$, soit $Y_t = \int_0^t W_s ds$. Pour t>0, on a $\mathbb{P}(Y_t > 0) = \mathbb{P}(Y_t < 0) = 1/2$, et la filtration naturelle de Y étant celle de W, on a une loi du 0-1 qui nous permet d'affirmer que Y prend des valeurs strictement positives et strictement négatives, et traverse donc une infinité de fois l'origine, avant tout temps strictement positif.

La suite de cette étude est encore motivée par des raisons physiques. Un modèle qui décrit la formation de foules considère des individus se déplaçant selon un processus de Langevin, et qui se heurtent selon un choc inélastique. On s'attend à la formation de groupes d'individus, ces groupes se fusionnant au cours du temps. Cependant dans des simulations numériques, Bertrand Maury (2006) observe également que les groupes peuvent exploser.

C'est ce qui l'a amené à poser une question: existe-t-il un processus stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ qui se comporte dans $]0,+\infty[$ comme un processus de Langevin, a 0 comme frontière inélastique (c'est-à-dire que la vitesse est ramenée en 0 lorsque le processus est en 0), mais qui n'est pas absorbé en 0?

Étant donné que le processus de Langevin libre (partant de 0 avec vitesse nulle) passe une infinité de fois par 0, l'intuition pourrait suggérer que si la vitesse, donc l'énergie, est absorbée à chaque passage en 0, le processus ne pourrait jamais redécoller. Cependant l'expérience de B. Maury suggère que ce n'est peut-être pas le cas, et effectivement dans la deuxième partie on explicitera une solution où le processus n'est jamais absorbé en 0.

Mais tout de suite nous nous attachons à définir les problèmes de réflexion, d'abord au premier ordre puis au second ordre, qui sera le problème qui nous intéressera par la suite. En effet le problème de réflexion au second ordre permet de donner une "formulation" de la question posée par B. Maury dans le langage des équations différentielles stochastiques. Par ailleurs, les problèmes de réflexion sont d'abord des problèmes de processus déterministes avant d'être des problèmes de processus stochastiques.

1.2 Problèmes de réflexion

1.2.1 Réflexion au premier ordre

Soit Y une fonction continue ou bien un processus stochastique à trajectoires continues, avec Y(0)=0. On dira que X est solution au problème de réflexion au premier ordre si $X : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ "vérifie $\dot{X} = \dot{Y}$ quand X>0". Ce qu'on réécrit rigoureusement X=Y+L avec L fonction (processus) croissante au sens large, et qui ne croît que sur l'ensemble X=0.

Definition 1.1 *X est solution au problème de réflexion au premier ordre si X=Y+L avec L croissant au sens large et* $\mathbf{1}_{X_t>0} dL_t = 0$

Théorème 1.2 (Skorokhod) *Il existe une unique solution, donnée par* $L_t = sup\{Y_s^-, 0 \le s \le t\}$

Le problème de réflexion au premier ordre est donc entièrement résolu.

1.2.2 Réflexion au second ordre

Soit Y une fonction C^1 ou bien un processus stochastique à trajectoires C^1, avec Y(0)=0. Pour le problème de réflexion au second ordre on voudra cette fois-ci $\ddot{X} = \ddot{Y}$ si X>0, avec condition $\dot{X}_t = -c\dot{X}_{t-}$ quand X=0.

Definition 1.3 $X : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *est solution au problème de réflexion au second ordre avec coefficient de restitution c si il vérifie l'équation différentielle stochastique suivante:*

$$
\begin{aligned}
dX_t &= \dot{X}_t dt \\
\dot{X}_t &= \dot{Y}_t + A_t \\
A_t &= -(1+c) \sum_{0<s\leq t} \dot{X}_{s-} \mathbf{1}_{X_s=0}
\end{aligned}
$$

X décrit la trajectoire d'une particule soumise à une force $\ddot{Y}$ qui est limitée par une fontière en 0.

c=0 correspond à une frontière inélastique. L'énergie est totalement absorbée à la frontière.

c=1 correspond à une frontière (totalement) élastique, l'énergie est conservée.

Ce problème a été étudié entre autres par Bressan en 1960 [5], par Percivale en 1985 [6], par Schatzman en 1998 [7], par Ballard en 2000 [1]. Ces papiers prouvent l'existence et l'unicité de la solution si Y est analytique. Cependant, si Y est C_∞, des solutions multiples peuvent exister.

Le problème de réflexion au second ordre est donc plus compliqué que celui au premier ordre. L'unicité n'est pas garantie même lorsque Y est C_∞ (voir l'annexe).

Lorsque Y est un processus stochastique, par exemple Y est un processus de Langevin, il s'agit d'une équation différentielle stochastique. On peut donc s'intéresser aux problèmes d'existence et d'unicité faible de solutions, comme au problème d'existence et d'unicité forte. Je rappelle les significations de ces terminologies.

Definition 1.4 *On dit qu'il y a existence faible si l'on peut construire dans un espace de probabilité (un processus de Langevin et) une solution associée à ce processus de Langevin. Existence forte signifie au choix qu'il existe une solution par rapport à la filtration naturelle de Y, ou que dans l'espace de Wiener canonique et donc avec le processus de Langevin associé, on peut construire une solution.*

Unicité faible signifie unicité en distribution. Unicité forte signifie unicité trajectorielle.

Pour le problème de réflexion du processus de Langevin Y sur une frontière élastique, on a existence et unicité faible [1], la loi d'une solution – et donc de toute solution – étant la loi de |Y|. Par la suite nous nous intéresserons particulièrement au problème de réflexion du processus de Langevin sur une frontière inélastique.

[1] On a même existence et unicité fortes si la condition initiale du Langevin n'est pas (0,0)

2 Résultats connus

2.1 Deux points de vue, deux théorèmes

Nous donnons directement les résultats déjà obtenus par J. Bertoin [2, 3]:

Théorème 2.1 *Il existe un processus $(X_t, \dot{X}_t)_{t\geq 0}$, unique en distribution, à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, partant de (0,0), qui remplit les conditions suivantes:*

$$X \text{ est un processus de Markov} \tag{2.1}$$

$$X_t = \int_0^t \dot{X}_t dt \tag{2.2}$$

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X_t=0\}} dt = 0 \tag{2.3}$$

$$X_t = 0 \Rightarrow \dot{X}_t = 0 \quad p.s^2 \tag{2.4}$$

$$X \text{ se comporte comme un processus de Langevin tant que } X{>}0 \tag{2.5}$$

Formellement, la cinquième condition signifie que pour tout temps d'arrêt S dans la filtration naturelle de X, si on définit $\zeta_S = inf\{t \geq S, X_t = 0\}$, alors conditionnellement à $X_S = x_0 > 0$ et $\dot{X}_S = \dot{x}_0$, le processus $(X_{S+t})_{0\leq t\leq \zeta_S}$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et a la même distribution qu'un processus de Langevin partant de x_0 avec vitesse $\dot{x}_0$ et arrêté en 0.

Théorème 2.2 *Il y a existence et unicité faible du problème de réflexion au second ordre inélastique (c=0) du processus de Langevin (partant de 0 avec vitesses initiale nulle)*

Remarque 2.3 *Pour ce deuxième théorème, on observe un fort contraste avec le cas déterministe. En effet, dans le cas déterministe, même avec une force appliquée de classe C^∞, il n'y a pas unicité, tandis que ici la force est un bruit blanc et il y a unicité en distribution.*

Ces deux théorèmes semblent être en un certain sens similaires. Cependant la différence est réelle. Par exemple, le premier théorème demande un processus de Markov alors qu'une solution au problème de réflexion n'est a priori pas forcément markovienne. En fait ces deux versions reflètent deux différents points de vue, le problème de réflexion étant un point de vue équation stochastique tandis que ce théorème adopte le point de vue des excursions. Pour le point de vue équation stochastique, on pourra affirmer qu'une solution est nécessairement markovienne... seulement une fois qu'on aura montré l'unicité faible de la solution.

En ce qui concerne la théorie des excursions des processus de Markov, elle a été particulièrement développée par Itô. Je l'évoque dans la partie 2.3 (sinon se référer par exemple à Blumenthal [4]).

[2]Je rappelle que l'on travaille avec des processus càdlàg, ce qui explique la condition $X_t = 0 \Rightarrow \dot{X}_t = 0$,

2.2 Construction du processus

La théorie des excursions permet – avec du travail – de montrer le théorème 2.1. Mais pour l'existence, Bertoin [2] construit explicitement un processus qui répond à la question, ce qui permet non seulement d'appréhender le processus mais aussi de l'étudier plus aisément.

Soit $(W_t)_t \geq 0$ un mouvement brownien standard partant de 0, de sorte que $Y_t = \int_0^t W_s ds$ définit un processus de Langevin partant de $Y_0 = 0 = \dot{Y}_0$.

Intéressons-nous à ce qu'on obtient lorsqu'on effectue une classique "réflexion à la Skorokhod" sur Y. C'est à dire que l'on définit d'abord le processus infimum $I_t = inf\{Y_s : 0 \leq s \leq t\}$ puis $\widetilde{X}_t = Y_t - I_t$. On peut écrire

$$\widetilde{X}_t = \int_0^t \widetilde{V}_s ds,$$

où

$$\widetilde{V}_t = \mathbf{1}_{\{Y_t > I_t\}} W_t = \mathbf{1}_{\{\widetilde{X} > 0\}} W_t.$$

Avec cette construction, les excursions de $\widetilde{X}$ correspondent aux excursions de Y au-dessus de son minimum. De surcroît, toute excursion de Y au-dessus de son minimum commence nécessairement avec vitesse nulle. En effet la vitesse de départ de l'excursion coïncide avec la vitesse de Y en ce point, et pour Y une vitesse strictement positive interdit de se trouver à son minimum. Et de manière triviale une excursion ne peut pas commencer avec vitessse strictement négative. Ainsi on comprend pourquoi on a construit ce processus $\widetilde{X}$, les excursions de $\widetilde{X}$ ayant "la bonne tête", c'est à dire qu'elles partent avec vitesse nulle et que $\widetilde{X}$ se comporte comme un processus de Langevin tant que $\widetilde{X} > 0$.

Mais regardons de plus près ce qui se passe. Visuellement, quand Y atteint en t un nouveau minimum, Y atteint ce nouveau minimum avec une vitesse strictement négative (i.e $W_t < 0$), donc Y reste décroissant sur un intervalle $[t, d_t]$, où bien évidemment $d_t = inf\{s > t : W_s = 0\}$. Ainsi les excursions de $\widetilde{X}$ ont la bonne tête mais $\widetilde{X}$, à chaque passage en 0, y reste un certain temps avant de redécoller. C'est pourquoi Bertoin introduit un changement de temps. On introduit:

$$T_t := \ inf\{s \geq 0 : \int_0^s \mathbf{1}_{\{\widetilde{X}_u > 0\}} du > t\}, \quad t \geq 0,$$

$$X_t = \widetilde{X} \circ T_t, \quad V_t = \widetilde{V} \circ T_t, \quad t \geq 0$$

Proposition 2.4 *Le processus (X, V) remplit les conditions du théorème 2.1*

Informellement, le changement de temps supprime les intervalles de temps pendant lesquels Y coïncide avec I, i.e pendant lesquels $\widetilde{X}$ reste en zéro. C'est pour cette raison que la condition 2.3 du théorème 2.1 sera vérifiée. C'est aussi ce qui supprime le caractère non-markovien du processus lorsqu'il arrive en zéro. Pour plus de rigueur et une preuve complète du résultat, voir [2].

Pour les autres preuves, je ne donne qu'un aperçu des idées de démonstrations, et en particulier ce qui suit directement est surtout prétexte à donner une idée de la théorie des excursions, dont on ne peut se soustraire pour prouver l'unicité du théorème 2.1.

2.3 Unicité dans le théorème 2.1

Soit (X,V) qui remplit les conditions du théorème 2.1. Alors ce processus est markovien et est régénéré à tout temps d'arrêt S tel que $X_S = 0$. On peut en déduire en utilisant la continuité à droite des trajectoires et les propriétés élémentaires du processus de Langevin que X retourne p.s en zéro en des temps arbitrairement petits, et donc (X,V) retourne p.s en zéro en des temps arbitrairement petits (rappelons $X = 0 \Rightarrow V = 0$). On dit que (0,0) est un point régulier pour (X,V). C'est tout ce dont on a besoin pour définir un *processus temps local* $l = (l_t, t \geq 0)$.

Definition 2.5 *Un temps local l est un processus continu croissant au sens large et additif:*

$$l_{t+s} = l_t + l'_s \qquad \textit{p.s, où } l' \textit{ désigne le}$$

$$\textit{temps local du processus translaté } X \circ \theta_t,$$

et qui croît exactement sur l'ensemble des temps auxquels X visite 0, au sens où le support de la mesure aléatoire dl_t coïncide presque sûrement avec $\mathcal{Z} := \{t \geq 0 : X_t = 0\}$

Le temps local est défini à une constante près, constante qui importe peu et dépend de la convention choisie. On peut maintenant introduire l'inverse du temps local, qui est le processus càdlàg défini par

$$l_t^{-1} := inf\{s \geq 0 : l_s > t\}, \qquad t \geq 0.$$

Les sauts de l^{-1} correspondent aux intervalles de temps durant lesquels X effectue une excursion au-dessus de 0. Autrement dit,

$$Z^c = \bigcup \,]l_{t-}^{-1}, l_t^{-1}[,$$

où on a pris l'union sur l'ensemble des temps auxquels l^{-1} saute. Le processus de points

$$t \rightarrow (X_{(l_{t-}^{-1}+s)\wedge l_t^{-1}}, s \geq 0), \quad \text{t temps de saut de } l^{-1} \text{ et t} < 1 \ ,$$

est un processus de points de Poisson. Il prend ses valeurs dans l'espace des excursions, constitué des trajectoires continues u de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, qui partent de 0, quittent instantanément 0 et sont absorbées en 0 à leur temps de premier retour. Son intensité $\mathbf{n}$ est appelée mesure d'excursion, ou mesure de Poisson des excursions. Cette mesure n'est pas nécessairement finie, toutefois elle assigne un poids fini à l'ensemble des excursions dont la norme infinie est supérieure à η ou à l'ensemble des excursions dont la durée de vie est supérieure à η, ce pour tout $\eta > 0$.

Cette mesure caractérise le processus X, et on peut reconstruire le processus X à partir de n, ce que l'on appelle le programme d'Itô. Par ailleurs, à partir d'une mesure qui vérifie certaines conditions on peut construire un processus *dont on ne connaît pas l'existence au préalable.* C'est ainsi que la preuve de l'existence dans le théorème 2.1 est également réalisable par la théorie des excursions.

Par la suite, par une étude fine en particulier du processus de Langevin, Bertoin montre qu'il y a unicité de la mesure n construite sur n'importe quelle solution, or cette mesure détermine la distribution du processus, donc il y a bien unicité en distribution.

2.4 Le théorème 2.2

Pour l'existence dans le théorème 2.2, le processus (X,V) défini précédemment permet relativement aisément d'expliciter une solution. En effet, en gardant les notations précédentes, et en notant $\mathcal{W}_t$ la filtration canonique du mouvement brownien W et $\mathcal{F}_t = \mathcal{W}_{T_t}$, la proposition suivante est vérifiée:

Proposition 2.6 *Soit*

$$A_t := \int_0^{T_t} \mathbf{1}_{\{Y_s = I_s\}} dW_s \quad et \quad B_t := \int_0^{T_t} \mathbf{1}_{\{Y_s > I_s\}} dW_s, \quad t \geq 0$$

Alors, pour $t \geq 0$,

$$V_t = \dot{X}_t = A_t + B_t \quad et \quad A_t = -\sum_{0 < s \leq t} \dot{X}_{s-} \mathbf{1}_{\{X_s = 0\}}$$

et B_t est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien

En conséquence, (X,V) fournit bien une solution faible.

Pour montrer l'unicité faible, on s'inspire encore de la construction précédente mais en l'effectuant en sens inverse. Précisément, on part d'une solution $(X, \dot{X})$ à l'équation différentielle stochastique relativement à un mouvement brownien B. On veut redéfinir un processus de Langevin L, par rapport à un mouvement brownien W, de sorte que si on effectue la construction précédente sur L, on retombera sur X.

Formulé comme cela, le procédé peut sembler mystérieux. En fait l'étape qui rend la tâche délicate est le changement de temps T_t, qui fait que l'on "oublie" ce qui se passe pendant les sauts de T_t et que la solution construite est une solution relativement au mouvement brownien B et non W. Pour pouvoir "revenir en arrière", il va falloir "recréer de l'information". C'est pourquoi Bertoin fait appel à un nouveau mouvement brownien B', indépendant de B, dans l'idée que B' décrira le comportement de W pendant les sauts de T_t. Effectivement on peut définir un processus W en recollant de manière adéquate (ce que je ne détaille pas) les accroissements de B et ceux de B'. On peut alors montrer que W est bien un brownien, et que effectivement la construction effectuée ci-dessus, mais à partir de ce W défini ici, redonne bien le processus X dont on est parti.

A Annexe: non-unicité dans le cas déterministe

Je donne ici un exemple de problème de réflexion au second ordre avec une force extérieure appliquée $\mathcal{C}^k$, et pour lequel il n'y a pas unicité de la solution.

On considère la suite strictement croissante $u_n := 2^n$, et on définit $s_n = u_{2n}$ et $t_n = u_{2n+1}$. On introduit encore α (respectivement β) la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ continue convexe linéaire sur les intervalles $[s_n, s_{n+1}]$ (resp. $[t_n, t_{n+1}]$) et telle que $\alpha(s_n) = s_n^{k+3}$ (resp. $\beta(t_n) = t_n^{k+3}$). Il est commode de noter que α et β jouissent de la propriété d'auto-similarité

$$\alpha(4v) = 4^{k+3}\alpha(v) \quad et \quad \beta(4v) = 4^{k+3}\beta(v), \quad v \geq 0.$$

Maintenant on peut construire une fonction φ de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k+3}$ qui est bornée à la fois par α et β, qui satisfait la même propriété d'auto-similarité, et telle que

$$\begin{aligned} \varphi(v) = \alpha(v) &\quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z} : v = s_n, \\ \varphi(v) = \beta(v) &\quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{Z} : v = t_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(s_n) = &\quad \dot{\alpha}(s_n+) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \\ \dot{\varphi}(t_n) = &\quad \dot{\beta}(t_n+) \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

On peut faire un dessin pour se convaincre de l'existence de φ. Plus précisément, on commence par construire φ sur l'intervalle [1,4] de sorte que pour m = 0,...,k+3, on ait $\varphi^{(m)}(4-) = 4^{k+3-m}\varphi^{(m)}(1+)$. Alors φ s'étend par auto-similarité en une fonction $\mathcal{C}^{k+3}$ sur $]0, \infty[$, puis en posant $\varphi(0) = 0$ en une fonction $\mathcal{C}^{k+2}$ sur $[0, \infty[$ avec $\varphi^{(m)}(0+) = 0$ pour m=0,...,k+2.

Maintenant si on se pose le problème de réflexion au second ordre sous la force $-\ddot{\varphi}$, on a deux solutions distinctes, à savoir $X_v = \alpha(v) - \varphi(v)$, associée à $A_v := \dot{\alpha}(v)$, et $X_v = \beta(v) - \varphi(v)$, associée à $A_v := \dot{\beta}(v)$

En mimant la construction précédente, on peut construire un grand nombre de contre-exemples à l'unicité de la solution. A savoir il suffit de choisir une fonction strictement convexe strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ (la fonction "puissance k+3" dans l'exemple précédent) et deux suites de points strictement croissantes $(s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui tendent vers 0 en $-\infty$.

Dans tous les exemples ainsi construits la force extérieure $F = -\ddot{\varphi}$ prend des valeurs strictement positives et strictement négatives à des temps arbitrairement petits. Notons que cela ne peut se produire si F est analytique (cas où l'unicité a été montrée). Dans le cas étudié dans ce mémoire, F est un bruit blanc donc on aurait pu s'attendre également à de multiples soutions. Le résultat d'unicité (même faible) montre un fort contraste entre le cas aléatoire et le cas déterministe.

References

[1] P. Ballard, *The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints*, Arch. Rational Mech. Anal. **154** (2000), 199–274.

[2] Jean Bertoin, *Reflecting a langevin process at an absorbing boundary*, Journal European Math soc (à paraître).

[3] ______, *A second order sde for the langevin process reflected at a completely inelastic boundary*, Prépublications du laboratoire de probabilités et modèles aléatoires (2006), no. prépublication 1095.

[4] R. M. Blumenthal, *Excursions of markov processes*, (1992).

[5] A. Bressan, *Incompatibilità dei teoremi di esistenza e di unicità del moto per un tipo molto comune e regolare di sistemi meccanici*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Serie III **14** (1960), 333–348.

[6] D. Percivale, *Uniqueness in the elastic bounce problem*, J.Differential Equations **56** (1985), 206–215.

[7] M. Schatzman, *Uniqueness and continuous dependence on data for one dimensional impact problems*, Math. Compuut. Modelling **28** (1998), 1–18.