Benoît Jacob

Sous la direction d'Éric Leichtnam

Mémoire de magistère MMFAI - présentation du domaine de recherche

Théorie des nombres et géométrie non-commutative

Cette partie ne constitue qu'un survol de certains thèmes liés à notre domaine de recherche. Les développements techniques qui figurent dans notre mémoire de DEA n'ont pas été reproduits ici.

1 La fonction zêta de Riemann

Le produit de Dirichlet suivant, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, converge absolument pour $\operatorname{Re} s > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Riemann a montré qu'il admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\widehat{\zeta}(s) = \widehat{\zeta}(1-s),$$

où l'on a posé

$$\widehat{\zeta}(s) = 2^{-1/2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s),$$

Γ désignant la fonction Γ d'Euler.

La fonction $\widehat{\zeta}$ a deux pôles simples, en 0 et en 1. Ses zéros sont tous de partie réelle comprise entre 0 et 1 strictement. L'hypothèse de Riemann est l'affirmation qu'ils sont tous de partie réelle 1/2. Les zéros de la fonction ζ sont ceux de $\widehat{\zeta}$ ainsi que les entiers pairs strictement négatifs, que l'on appelle ses zéros *triviaux*.

Soit $C_0^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et à support compact. On montre, en utilisant seulement des techniques élémentaires d'analyse complexe, le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Formule explicite de Weil pour la fonction $\widehat{\zeta}$) *Soit $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit Φ la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$\Phi(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{ts}\,\alpha(t)\,dt.$$

On a l'égalité suivante, où ρ parcourt l'ensemble des zéros de la fonction $\widehat{\zeta}$ et p parcourt l'ensemble des nombres premiers :

$$\begin{aligned}
\Phi(0) - \sum_{\rho} \Phi(\rho) + \Phi(1) \quad &= \quad \sum_{p} \log p \left(\sum_{k \geqslant 1} \alpha(k \log p) + \sum_{k \leqslant -1} p^k \alpha(k \log p) \right) \\
&+ \quad \int_0^{+\infty} \left(\frac{\alpha(t) + e^{-t}\alpha(-t)}{1 - e^{-2t}} - \alpha(0) \frac{e^{-2t}}{t} \right) dt \\
&+ \quad \alpha(0) \log \pi.
\end{aligned}$$

Ce théorème relie la répartition des nombres premiers parmi les nombres réels à celle des zéros de la fonction $\widehat{\zeta}$ parmi les nombres complexes. Il permet par exemple de reformuler l'hypothèse de Riemann en l'énoncé suivant :

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(\sqrt{x} \log x\right),$$

où $\pi(x)$ désigne de nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x,

$$\pi(x) \ = \ \#\,\{\, p \ \mid \ p \leqslant x \},$$

et $\mathrm{Li}(x)$ désigne le logarithme intégral de x,

$$\mathrm{Li}(x) \ = \ \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

À titre de comparaison, le théorème des nombres premiers affirme qu'il existe une constante $a > 0$ telle que

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O\left(x\, e^{-a\sqrt{\log x}}\right).$$

2 Feuilletages

Nous allons maintenant étudier des objets n'ayant *a priori* aucun rapport avec ce qui précède : les *feuilletages*. Ceci nous permettra d'énoncer une formule des traces de Lefschetz, dûe à Álvarez-López et Kordyukov, qui présentera une similarité avec la formule explicite de Weil (théorème 1.1).

2.1 Premières définitions

Commençons par donner une définition des feuilletages. Sur ce sujet, nous référons le lecteur à [Va01] et [MS88].

Pour tout $n \geqslant 1$, notons B^n la boule unité euclidienne ouverte de $\mathbb{R}^n$.

Donnons-nous un entier $d \geqslant 2$, une variété M de classe C^∞ de dimension d, un autre entier $n < d$, et $m = d - n$. La donnée d'un *atlas feuilleté de dimension* n (on dit aussi *de codimension* m) sur M

est celle d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M et, pour tout $i \in I$, d'un C^∞-difféomorphisme h_i de U_i sur $B^n \times B^m$, tels que, pour tous i et j, les changements de cartes $h_{ij} = h_j \circ h_i^{-1}$ soient des C^∞-difféomorphismes de la forme

$$h_{ij}(z,t) = (f_{ij}(z,t), g_{ij}(t)),$$

où, à t fixé, $z \mapsto f_{ij}(z,t)$ soit un difféomorphisme de classe C^∞. Deux atlas feuilletés sont dits *équivalents* lorsque leur réunion est un atlas feuilleté. Un *feuilletage* sur M est une classe d'équivalence $\mathcal{F}$ d'atlas feuilletés sur M. Le couple $(M,\mathcal{F})$ sera appelé une *variété feuilletée.*

Une *plaque* est une partie de M de la forme $h_i^{-1}(B^n \times \{t\})$. Une *feuille* est une partie connexe contenant toutes les plaques qu'elle rencontre, et minimale pour cette propriété. Par définition, chaque feuille hérite d'une structure de variété C^∞ de dimension n, les feuilles sont deux à deux d'intersection vide, et leur réunion est égale à M.

Les feuilles n'ont aucune raison d'être compactes, même si M l'est.

Voici un exemple de feuilletage. Choisissons un nombre réel θ. Il est facile de concevoir que les droites de pente θ constituent les feuilles d'un feuilletage sur le plan $\mathbb{R}^2$. En passant au quotient par l'action par translation de $\mathbb{Z}^2$, nous obtenons un feuilletage sur le tore T^2. Si θ est rationnel, les feuilles sont compactes et difféomorphes à S^1, tandis que si θ est irrationnel, elles sont difféomorphes à $\mathbb{R}$, et donc non-compactes. Le lecteur trouvera une figure et plus de détails dans [Co94] et dans [Va01].

2.2 Cohomologie tangentielle

Introduisons maintenant la *cohomologie tangentielle*, qui est l'analogue pour les variétés feuilletées $(M,\mathcal{F})$ de la cohomologie de de Rham pour les variétés M.

Le complexe de de Rham tangentiel $(\Omega^\bullet_{\mathcal{F}}(M),\, d_{\mathcal{F}})$ est la « restriction aux feuilles » du complexe de de Rham classique $(\Omega^\bullet(M),\, d)$. Bien entendu, ceci ne constitue pas une définition rigoureuse : pour une vraie construction, nous nous permettons de renvoyer le lecteur à notre mémoire de DEA, section 4.

Nous définissons la *cohomologie tangentielle* de $(M,\mathcal{F})$

$$\mathrm{H}^\bullet_{\mathcal{F}}(M)$$

comme étant égale à la (co)homologie de ce complexe.

Contrairement aux groupes de cohomologie de de Rham classiques, les groupes de cohomologie tangentielle sont souvent de dimension infinie, même lorsque M est compacte. D'autre part, munis de la topologie quotient, ils peuvent ne pas être séparés. Le k-ième *groupe de cohomologie tangentielle réduite* $\overline{\mathrm{H}}^k_{\mathcal{F}}(M)$ est par définition le quotient de $\mathrm{H}^k_{\mathcal{F}}(M)$ par l'adhérence de $\{0\}$, *i.e.* le quotient séparé maximal. Là encore, nous aurons souvent affaire à des espaces de dimension infinie, même avec M compacte. La définition de la *trace* d'un opérateur agissant sur l'une de ces cohomologies est donc plus délicate que dans le cas de la cohomologie de de Rham, où la définition usuelle de la trace d'une matrice convient.

2.3 Flots, feuilletages transitifs

Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée. Un *automorphisme* de $(M, \mathcal{F})$ est un C^∞-difféomorphisme de M dans elle-même permutant les feuilles, *i.e.* tel que l'image d'une feuille soit une feuille. Les automorphismes forment un groupe que nous noterons $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{F})$.

Un *flot adapté au feuilletage* ϕ sur $(M, \mathcal{F})$ est un morphisme de groupes

$$\begin{array}{rccl} \phi \,:\, & \mathbb{R} & \to & \mathrm{Aut}(M, \mathcal{F}) \\ & t & \mapsto & \phi^t \end{array}$$

tel que l'application

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\phi} \,:\, & \mathbb{R} \times M & \to & M \\ & (t,\, x) & \mapsto & \phi^t(x) \end{array}$$

soit de classe C^∞.

Un flot adapté au feuilletage ϕ est dit *transverse aux feuilles* si, en tout point $x \in M$, en notant ℓ la feuille passant par x et X le champ de vecteurs associé à ϕ, l'on a :

$$\mathrm{T}_x M = X(x)\,\mathbb{R} \oplus \mathrm{T}_x \ell.$$

Un feuilletage est dit *transitif* s'il existe un flot adapté au feuilletage et transverse aux feuilles. Notons que ceci implique qu'il est de codimension 1.

2.4 Feuilletages riemanniens

Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée. Soit g une métrique riemannienne sur M.

La métrique g est dite *bundle-like* pour le feuilletage $(M, \mathcal{F})$ si toute géodésique qui coupe perpendiculairement une feuille coupe perpendiculairement toutes les feuilles qu'elle rencontre.

Une variété feuilletée munie d'une métrique riemannienne bundle-like est appelée un *feuilletage riemannien*. Pour une étude des feuilletages riemanniens, voir [Mo88].

Donnons maintenant une définition équivalente (l'équivalence est dûe à Reinhardt, cf. [Mo88], propositions 3.5 et 6.1) de la propriété bundle-like.

Nous dirons qu'un champ de vecteurs X vérifie la condition (A) pour le feuilletage $\mathcal{F}$ et la métrique g s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(A1) Le flot correspondant est adapté au feuilletage[1].
(A2) En tout point x, le vecteur $X(x)$ est perpendiculaire à la feuille passant par x.

[1] Les champs de vecteurs vérifiant (A1) sont usuellement dits *foliate* en anglais, cf. [Mo88].

Une métrique riemannienne g sur M est *bundle-like* pour le feuilletage $\mathcal{F}$ si, pour tout ouvert U, pour tous champs de vecteurs Y_1 et Y_2 sur U qui vérifient (A)[2], la fonction

$$U \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto g(Y_1(x), Y_2(x))$$

est constante sur chaque feuille.

2.5 Théorie de Hodge en cohomologie tangentielle

Nous nous inspirons directement de [AK00], pp. 160 - 161.

Soit $(M, \mathcal{F}, g)$ un feuilletage riemannien. En considérant les structures riemanniennes induites sur chaque feuille, nous pouvons, à partir de la différentielle extérieure tangentielle $d_{\mathcal{F}}$ vue plus haut, définir la co-différentielle extérieure tangentielle $\delta_{\mathcal{F}}$ puis laplacien tangentiel

$$\Delta_{\mathcal{F}} = (d_{\mathcal{F}} + \delta_{\mathcal{F}})^2 = d_{\mathcal{F}}\delta_{\mathcal{F}} + \delta_{\mathcal{F}}d_{\mathcal{F}}$$

sur $\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}}(M)$. Notons $\mathrm{Harm}^{\bullet}_{\mathcal{F}}(M)$ le noyau de $\Delta_{\mathcal{F}}$. Le produit scalaire usuel des formes différentielles (défini à l'aide de l'opérateur $*$ de Hodge) donne, par restriction, un produit scalaire sur $\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}}(M)$. Notons $\Omega^{\bullet, L^2}_{\mathcal{F}}(M)$ le complété. Nous pouvons considérer $\Delta_{\mathcal{F}}$ comme un opérateur non-borné sur $\Omega^{\bullet, L^2}_{\mathcal{F}}(M)$. Soit $\overline{\Delta}_{\mathcal{F}}$ sa fermeture.

Álvarez-López et Kordyukov ont montré que, la métrique g étant bundle-like, l'opérateur $\overline{\Delta}_{\mathcal{F}}$ est auto-adjoint. Soit $\overline{\Pi}$ la projection orthogonale $\Omega^{\bullet, L^2}_{\mathcal{F}}(M) \to \ker \overline{\Delta}_{\mathcal{F}}$.

Dans [AK96], ils ont montré que la restriction à $\Omega_{\mathcal{F}}(M)$ de $\overline{\Pi}$ est la projection orthogonale Π : $\Omega_{\mathcal{F}}(M) \to \mathrm{Harm}_{\mathcal{F}}(M)$, et que l'on a une décomposition de Hodge en somme directe orthogonale

$$\Omega^{\bullet}_{\mathcal{F}}(M) = \mathrm{Harm}^{\bullet}_{\mathcal{F}}(M) \oplus^{\perp} \overline{\mathrm{Im}\, d_{\mathcal{F}}} \oplus^{\perp} \overline{\mathrm{Im}\, \delta_{\mathcal{F}}}.$$

L'inclusion $\mathrm{Harm}^{\bullet}_{\mathcal{F}}(M) \subset \ker d_{\mathcal{F}}$ induit alors un isomorphisme de Hodge

$$\mathrm{Harm}^{\bullet}_{\mathcal{F}}(M) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\mathcal{F}}(M).$$

Dans l'autre sens, l'isomorphisme est induit par Π.

2.6 Formule des traces de Lefschetz

Soit $(M, \mathcal{F})$ un feuilletage transitif. Soient ϕ un flot adapté au feuilletage et X le champ de vecteurs correspondant.

Supposons qu'il existe une métrique riemannienne g sur M telle que, en tout point $x \in M$, le vecteur $X(x)$ soit de norme 1 et perpendiculaire à la feuille en x.

[2]Pour le feuilletage restreint à U, s'entend.

On vérifie aisément[3] que ceci implique que g est bundle-like.

Ainsi, $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage riemannien. Soit $\widehat{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\mathcal{F}}(M)$ la complétion L^2 de $\overline{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\mathcal{F}}(M)$. Pour toute fonction $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, soient A_f l'opérateur sur $\widehat{\mathrm{H}}^{\bullet}_{\mathcal{F}}(M)$ défini par

$$A_f = \int_{\mathbb{R}} f(t) \phi^{t*} dt,$$

et $A_f^{(i)}$ sa restriction à $\widehat{\mathrm{H}}^{i}_{\mathcal{F}}(M)$.

Álvarez-López et Kordyukov ont montré dans [AK00] le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Pour tout i, l'opérateur $A_f^{(i)}$ est traçable et l'application $f \mapsto \mathrm{Tr}\left(A_f^{(i)}\right)$ définit une distribution $\beta^i_{\mathrm{dis}}(M, \mathcal{F})$.*

Les distributions $\beta^i_{\mathrm{dis}}(M, \mathcal{F})$ sont appelées les *nombres de Betti distributionnels* du feuilletage. Ils ne dépendent pas de la métrique, et, si nous remplaçons le flot ϕ par un flot ϕ' agissant de la même façon sur l'ensemble des feuilles, ils restent inchangés. En particulier, s'il existe une feuille dense, les $\beta^i_{\mathrm{dis}}(M, \mathcal{F})$, à automorphisme linéaire de $\mathbb{R}$ près, ne dépendent que du feuilletage.

La distribution

$$\chi_{\mathrm{dis}}(M, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{\dim \mathcal{F}} \beta^i_{\mathrm{dis}}(M, \mathcal{F})$$

est appelée la *caractéristique d'Euler-Poincaré distributionnelle* du feuilletage.

Une orbite compacte γ de longueur $\ell(\gamma)$ est dite *simple* si

$$\det(\mathrm{id} - \phi^{\ell(\gamma)*} \ : \ \mathrm{T}^*_x\mathcal{F} \to \mathrm{T}^*_x\mathcal{F}) \neq 0,$$

où x est un point quelconque de γ.

La formule des traces de Lefschetz établie dans [AK00] est alors la suivante :

Théorème 2.2

$$\chi_{\mathrm{dis}}(M, \mathcal{F}) = \chi_\Lambda(M, \mathcal{F})\delta_0 + \sum_\gamma \ell(\gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} (\mathrm{sgn} \det(\mathrm{id} - \phi^{k\ell(\gamma)*} \ : \ \mathrm{T}^*_x\mathcal{F} \to \mathrm{T}^*_x\mathcal{F}))\delta_{k\ell(\gamma)}.$$

Dans ce théorème, nous avons noté χ_Λ la caractéristique d'Euler-Poincaré de Connes associée à une mesure transverse invariante par holonomie Λ. Ici, Λ peut se construire à partir de la métrique riemannienne induite sur les transversales par notre métrique bundle-like.

3 Comparaisons formule explicite - formule des traces

La formule explicite de Weil (théorème 1.1) peut se reformuler en l'égalité suivante entre distributions sur $\mathbb{R}$ (cf. [De01], p. 16) :

$$1 - \sum_\rho e^{t\rho} + e^t = W_\infty + \sum_p \log p \left(\sum_{k \geqslant 1} \delta_{k \log p} + \sum_{k \leqslant -1} p^k \delta_{k \log p} \right),$$

[3] À l'aide de la deuxième définition donnée de la propriété bundle-like.

où W_∞ désigne la contribution de la place à l'infini, ρ parcourt l'ensemble des zéros de $\widehat{\zeta}$, et p l'ensemble des nombres premiers.

Si maintenant nous réécrivons la formule des traces du théorème 2.2 dans le cas où les feuilles sont de dimension 2 et où $\chi_\Lambda(M, \mathcal{F}) = 0$, en revenant à la définition de χ_{dis}, nous obtenons :

$$\beta^0_{\mathrm{dis}}(M, \mathcal{F}) - \beta^1_{\mathrm{dis}}(M, \mathcal{F}) + \beta^2_{\mathrm{dis}}(M, \mathcal{F}) = \sum_\gamma \ell(\gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{0\}} (\operatorname{sgn} \det(\mathrm{id} - \phi^{k\ell(\gamma)*} \;:\; \mathrm{T}^*_x\mathcal{F} \to \mathrm{T}^*_x\mathcal{F}))\delta_{k\ell(\gamma)}.$$

Nous voyons une certaine similarité entre ces formules. La comparaison suggère de nous devrions chercher un système dynamique vérifiant les hypothèses ci-dessus, dont les orbites soient en bijection avec les nombres premiers, et tel que l'orbite correspondant à p soit de longueur $\log p$. Nous pourrions alors espérer mettre en bijection les zéros de la fonction $\widehat{\zeta}$ avec les valeurs propres pour l'action d'un générateur infinitésimal du flot sur $\widehat{\mathrm{H}}^1_{\mathcal{F}}(M)$.

Cependant, cette analogie n'est pas parfaite.

Pour commencer, dans la formule explicite, nous avons un terme W_∞ qui n'a pas d'analogue dans la formule des traces. Ensuite, la distribution de la formule explicite n'est pas symétrique par rapport à $t \mapsto -t$, contrairement à celle de la formule des traces.

La première difficulté amène à considérer des flots admettant des points fixes : de même que les orbites compactes de longueur > 0 sont en bijection avec les nombres premiers, qui sont les places finies de $\mathbb{Q}$, nous allons avoir des points fixes en bijection avec les places infinies (ce qui, dans le cas de $\mathbb{Q}$, signifie que l'on aura un unique point fixe).

La seconde difficulté a amené Deninger à ne plus faire l'hypothèse que l'espace total est une variété différentiable. Ainsi, nous travaillons sur une généralisation des feuilletages, appelés *laminations*, où l'espace total est un simple espace topologique. Les feuilles, bien entendu, continuent d'être des variétés différentiables.

Dans ce cadre élargi, Deninger a pu associer à certains corps globaux[4] des systèmes dynamiques laminés réalisant entièrement l'analogie envisagée ici.

Le lecteur intéressé par ces sujets trouvera plus de détails dans les articles de Deninger, ainsi que dans notre mémoire de DEA, qui constitue la suite de ce mémoire de magistère.

Pour terminer, ajoutons que l'approche de Deninger n'est pas la seule. Connes a établi d'importants résultats sur ces sujets : voir [Co98] entre autres.

Références

[AK96] J. A. Álvarez López et Y. Kordyukov, *Long time behaviour of leafwise heat flow for Riemannian foliations*, arXiv : math.dg-ga/**9612010** et Compositio Math. **125** (2001), pages 129-153.

[4] Genre 1, caractéristique positive. Voir [De02].

[AK00] J. A. Álvarez López et Y. Kordyukov, *Distributional Betti numbers of transitive foliations of codimension one*, Foliations : geometry and dynamics (Warsaw, 2000), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (2002), pp. 159-183.

[Ba81] K. Barner, *On A. Weil's explicit formula*, J. für reine u. angew. Math. **323**, 1981, pp. 139-152.

[Co94] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.

[Co98] A. Connes, *Trace formula in noncommutative Geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, arXiv : math.NT/**9811068**, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), no. 1, 29-106.

[D70] P. Deligne, *Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers*, Lecture Notes in Mathematics, **163**, Springer-Verlag, 1970.

[De92] C. Deninger, *Local $L-$factors of motives and regularized determinants*, Inv. Math. **107** (1992), pp. 135-150.

[De94] C. Deninger, *Motivic $L-$functions and regularized determinants* , Proc. Symp. Pure Math. **55**, 1 (1994), pp. 707-743.

[De98] C. Deninger, *Some analogies between number theory and dynamical systems on foliated spaces*, Doc. Math. J. DMV. Extra volume ICM I, (1998), pp. 23-46.

[De99] C. Deninger, *On dynamical systems and their possible significance for Arithmetic Geometry*, In : A. Reznikov, N. Schappacher (eds.), Regulators in Analysis, Geometry and Number Theory. Progress in Mathematics **171**, (1999), Birkhauser, pp. 29-87 (aussi disponible sur le web).

[De01] C. Deninger, *Number theory and dynamical systems on foliated spaces*, arXiv : math.NT/**0204110** et Jahresberichte der DMV. **103**, (2001), No 3, pages 79-100.

[De02] C. Deninger, *On the nature of the "explicit formulas" in analytic number theory - a simple example*, arXiv : math.NT/**0204194** et Number theoretic methods (Iizuka, 2001), Dev. Math., 8, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (2002), pages 97-118.

[DeS00] C. Deninger et W. Singhof, *A note on dynamical trace formulas*, Dynamical, spectral and arithmetic zeta functions (San Antonio, TX, 1999), Contemp. Math., 290, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001), pp. 41-55.

[Gh97] E. Ghys, *Laminations par surfaces de Riemann*, Panoramas et synthèses, **8**, 1999, et http ://www.umpa.ens-lyon.fr/~ghys/.

[Lei03] E. Leichtnam, *An invitation to Deninger's work on arithmetic zeta functions*, à paraître ; issu d'un cours donné à l'université de Bar Ilan en 2002.

[Lei04] E. Leichtnam, *Renormalization group flow and arithmetic zeta functions*, en préparation ; exposé au MPI à Bonn en juin 2004.

[Mo88] P. Molino, *Riemannian foliations*, Progress in Math., **9**, Birkhaüser, 1988.

[MS88] C. C. Moore et C. Schochet, *Global analysis on foliated spaces*, MSRI Publications, **9**, Springer-Verlag, 1988.

[Oo73] F. Oort, *Lifting an endomorphism of an elliptic curve to characteristic zero*, Indag. Math. 35 (1973), pages 466-470.

[Ro00] M. Rosen, *Number theory in function fields*, Graduate Texts in Mathematics, **210**, Springer-Verlag, 2000.

[SGA1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, 1960-61, arXiv : math.AG/**0206203**.

[Si86] J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics, **106**, Springer-Verlag, 1986.

[Va01] S. Vassout, *Feuilletages et résidu non-commutatif longitudinal*, Thèse de doctorat, Université Paris VI, http ://www.math.jussieu.fr/~vassout/.

[We52] A. Weil, *Sur les formules explicites de la théorie des nombres*, Izv. Mat. Nauk., (Ser. Mat.) **36**, 1952, pp. 3-18.