LISSAGE ET MARCHE ALÉATOIRE DE BRANCHEMENT : LE CAS FRONTIÈRE

BRUNO JAFFUEL

Mémoire de magistère FIMFA sous la direction de Zhan SHI : introduction au domaine de recherche

Résumé. Les travaux de Biggins sur la marche aléatoire de branchement surcritique n'ont cessé d'avancer depuis son article [1] de 1977 et sont fortement liés à un autre problème, celui des lissages et plus précisément de leurs points fixes. C'est ce lien qui sera développé ici, et seront donc passées sous silence les démonstrations antérieures aux outils exposés ici et donc par d'autres méthodes des résultats sur les points fixes des lissages.

L'approche proposée par Lyons dans [8] et [12], qui redémontre en l'améliorant le théorème fondateur de Biggins de 1977, qui semble aujourd'hui la plus prometteuse et qui exploite un argument de changement de mesure, fait l'objet de la seconde section. Elle a été reprise par Biggins et Kyprianou dans [6] mais ces résultats très récents ne figureront pas ici.

Est détaillée par contre dans cet exposé une très élégante méthode de réduction qui permet d'affaiblir certaines hypothèses et d'étendre des résultats au «cas frontière». C'est l'objet de la troisième section.

Enfin la dernière section répond à certaines des autres questions qui apparaissent naturellement dans cette étude.

Table des matières

1. Introduction

1.1. **Le lissage.** On se donne une suite aléatoire de réels positifs $(A_i, i = 1, 2, \dots)$. Étant donnée une variable aléatoire X, on se donne une famille $X_i, i \in \mathbb{N}^*$ de copies de X indépendantes et indépendantes de la suite A_i et on construit la variable aléatoire

$$X' = \sum_i A_i X_i.$$

Dans ces conditions, la loi de X' ne dépend que de la loi de X et de celle de la suite A_i. La loi de A_i étant fixée, on peut appeler T cette application qui à la loi de X associe celle de X'.

On appellera T un lissage. On s'intéresse plus particulièrement aux points fixes non triviaux (la variable aléatoire identiquement nulle étant le point fixe trivial) de cette transformation.

On se limitera au cas où la suite A_i est une suite décroissante (on ne perd pas en généralité à le supposer) de réels positifs nulle à partir d'un certain rang. Une somme ou un produit sur l'indice i se limitera donc en fait aux seuls i tels que $A_i > 0$. On notera N leur nombre (aléatoire, fini presque sûrement).

On s'intéresse aux lois de variables aléatoires X positives et il est commode de les coder par leur transformée de Laplace Φ. Ce qui nous préoccupe dans le lissage, ce sont *les points fixes* non triviaux de cette transformation. On suppose que la famille A_i vérifie

$$E \sum_i A_i = 1,$$

ce qui, si on espère trouver des points fixes d'espérance finie, est une condition nécessaire mais, on le verra, non suffisante en général.

On suppose aussi que le nombre N de i tels que $A_i > 0$ est strictement plus grand que 1 avec une probabilité strictement positive. Sinon l'étude ne nécessite pas les outils exposés ici. Ainsi, dire que X est point fixe s'écrit

$$X \overset{loi}{=} X',$$

qui équivaut, en termes de transformée de Laplace, à

$$\forall \psi \in \mathbb{R}, \Phi(\psi) = E\left[\prod_i \Phi(\psi A_i)\right]$$

où Φ est pris dans $\mathcal{L}$, l'ensemble des transformées de Laplace de variables aléatoires positives finies presque sûrement et non identiquement nulles. On notera $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ l'ensemble des solutions. Des questions se posent tout naturellement , dont celles de l'existence, de l'unicité et de l'intégrabilité des solutions à ces équations. Pour le dernier point, puisque

$$EX = -\Phi'(0),$$

on peut s'interroger de manière plus large sur le comportement de Φ au voisinage de l'origine.

Les réponses à certaines de ces questions s'obtiennent par l'étude d'un nouvel objet, la *marche aléatoire de branchement* dont la présentation fait l'objet du prochain paragraphe.

1.2. **La marche aléatoire de branchement.** On généralise ici le célèbre processus de Galton-Watson et la marche aléatoire classique en les combinant : à chaque génération les individus se reproduisent et se déplacent. Ici, il s'agira d'une marche aléatoire de branchement unidimensionnelle, donc sur l'axe réel. Elle est construite comme suit : Soit Z un processus ponctuel (que l'on notera abusivement - vu qu'on tolère des répétitions - comme un ensemble aléatoire) de cardinal fini presque sûrement. Sans donner de définition propre générale, on peut assimiler Z dans le cas de la marche unidimensionnelle à un couple aléatoire (n, f) où n est un entier positif et f un n-uplet croissant (au sens large) de réels positifs, l'ensemble de ces couples étant muni de la tribu la plus petite telle que n soit mesurable et dont la restriction à n fixé à $\{(n, f), f\ n\text{-uplet}\}$ coïncide avec les boréliens de $\mathbb{R}^n$.

Initialement, il y a un individu situé à l'origine. Il donne naissance à une première génération distribuée selon Z. La génération $n+1$ est obtenue récursivement à partir de la génération n en faisant se reproduire chaque individu u de la génération n selon une copie Z^u de Z indépendante des autres et indépendamment du passé, Z^u donnant les déplacements des enfants de u par rapport à la position de u. On numérote les individus classiquement (étiquetage de Ulam-Harris) selon leur position dans l'arbre généalogique : la première génération est $1, 2, \ldots$, les enfants de 1 sont 11, 12, ... et ainsi de suite, de sorte qu'un individu u a pour descendants directs $u1, u2, \ldots, uk$ où k est le nombre d'enfants de u, et que si

$$Z^u = \{z'^u_1 \leq z'^u_2 \leq \cdots \leq z'^u_k\},$$

alors pour $i = 1, 2, \ldots, k$,

$$z_{ui} = z_u + z'^u_i.$$

On notera $|u|$ la génération de u. u est alors formellement un $|u|$-uplet. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des individus. $u < v$ signifiera que u est un ancêtre de v, ou plus formellement un préfixe (au sens strict).

Cette construction confère au processus une propriété de branchement, à savoir que

$$z_{iu} = z_i + z^i_u,$$

avec z^i_u le déplacement de iu par rapport à son ancêtre i de sorte que, en notant $\mathcal{T}^i = \{u, iu \in \mathcal{T}\}$, et en associant à chaque u la position z^i_u, on obtient une nouvelle marche aléatoire de branchement (issue de l'individu i de la première génération) de même loi que la marche considérée et que les marches issues des différents individus de la première génération sont indépendantes entre elles et indépendantes de la loi de la première génération.

On a bien sûr la propriété de branchement à partir d'une génération quelconque, il suffit de remplacer dans la phrase précédente i par v et «première génération» par «génération n» pour obtenir un résultat analogue :

$$z_{vu} = z_v + z_u^v.$$

On notera toujours avec un exposant u l'analogue dans la marche de branchement issue de u du même objet noté sans exposant (ou avec l'exposant vide, ce qui correspond de toute façon à la marche issue de l'individu initial, qui n'est autre que la marche «sans précision» : il n'y a pas d'ambiguité).

La marche aléatoire de branchement qui nous intéresse pour étudier le lissage associé à A_i est donnée par

$$Z = \{-\log A_i, i \text{ tels que } A_i > 0\}.$$

On notera z_i' pour $-\log A_i$.

On notera $|u|$ la génération de u. u est alors formellement un $|u|$-uplet. On note $\mathcal{T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{i_1 i_2 \dots i_n / i_1 \in \mathbb{N}^*, i_2 \in \mathbb{N}^*, \dots, i_n \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des individus. On notera $F(u)$ l'ensemble des fils de u.

1.3. **La martingale additive W_n.** La manière la plus naturelle de chercher un point fixe au lissage est de l'itérer à partir d'une variable aléatoire arbitraire. Le choix le plus simple de variable aléatoire initiale et qui va nous être utile est celui de la variable aléatoire constante de valeur 1. Notons W_n une variable aléatoire de loi sa $n^{\text{ème}}$ itérée par le lissage. On doit avoir

$$W_0 = 1,$$
$$\forall n, W_{n+1} \overset{loi}{=} \sum_i W_n^i A_i$$

où les W_n^i sont des copies de W_n indépendantes et indépendantes de la suite A_i.

Il vient par récurrence qu'on peut prendre :

$$\begin{aligned}
\forall n, W_n &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} A_{i_1} A_{i_2}^{i_1} \dots A_{i_n}^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \\
&= \sum_{i_1} A_{i_1} \sum_{i_2, i_3, \dots, i_n} A_{i_2}^{i_1} \dots A_{i_n}^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \\
&= \sum_{i_1} A_{i_1} W_{n-1}^{i_1}
\end{aligned}$$

où les $(A_i^u)_i$ pour $|u| < n$ sont des copies indépendantes de $(A_i)_i$ et les autres notations sont évidentes.

On cherchait une égalité en loi ; en fait on a obtenu une égalité au sens presque sûr dont on va donner une formulation plus naturelle :

En écrivant, pour i dans $\mathbb{N}$ et u dans $\mathcal{T}$, $z'^u_i = -\log A_i^u$, on obtient

$$\forall n, W_n = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \exp - \left(z'_{i_1} + z'^{i_1}_{i_2} + \cdots + z'^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}_{i_n} \right).$$

Cette expression en termes de la marche aléatoire de branchement donnée par $Z = \{-\log A_i, i \text{ tel que } A_i > 0\}$ se simplifie agréablement si on se souvient que z'^u_i est le déplacement du $u^{\text{ième}}$ fils de u par rapport à u, car

$$z'_{i_1} + z'^{i_1}_{i_2} + \cdots + z'^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}_{i_n} = z_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Finalement,

$$\forall n, W_n = \sum_{|u|=n} \exp - z_u.$$

La condition $E \sum A_i = 1$ entraîne que W_n est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma\{(A_i^u)_i, |u| < n\}$:

$$E[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \sum_{|u| \le n} E\left[\sum_i \exp - (z_u + z'^u_i)\right] = \sum_{|u| \le n} \exp - z_u = W_n.$$

On reconnaît les W_n^i comme les copies de W_n correspondant aux marches issues des individus i de la première génération.

W_n est une martingale positive. Elle converge donc presque sûrement vers une limite que l'on note W. Le processus d'itération aboutit ainsi à un point fixe : avec $W^i, i \in \mathbb{N}^*$ des copies de W indépendantes et indépendantes de W associées aux marches issues des individus i de la première génération, on a

$$W = \sum_i A_i W^i.$$

Il ne faut cependant pas crier victoire trop vite : le lemme de Fatou donne $EW \le 1$, ce qui entraîne que $W < \infty$ ps mais il arrive que W soit nulle presque sûrement, et on savait déjà que 0 est un point fixe trivial du lissage. Une question naturelle est celle de l'effet sur la marche aléatoire de branchement des transformations triviales que constituent les dilatations de l'espace sur le lissage correspondant. En fait, si on dilate l'espace de $\theta \in \mathbb{R}$, les A_i sont élevés à la puissance θ. Mais alors, le plus souvent,

$$E \sum A_i^\theta \ne 1.$$

On notera cette quantité $m(\theta)$. On prendra aussi la notation

$$v(\theta) = \log m(\theta) = \log E\left[\sum A_i\right].$$

En posant

$$A'_i = \frac{A_i^\theta}{m(\theta)},$$

on définit un nouveau lissage et la martingale correspondant à son itération est donnée par

$$W_n(\theta) = \sum_{|u|=n} \frac{\exp -\theta z_u}{m(\theta)}.$$

Le W_n défini plus haut correspond avec cette notation à $W_n(1)$. Il est naturel de se demander comment varient les propriétés du lissage et celles de ses points fixes lorsqu'on fait varier le paramètre θ. Avant cette étude, remarquons qu'en notant ν la mesure intensité de $Z = -\log A_i, i$, on a

$$m(\theta) = E \int e^{-\theta x} Z(dx) = \int e^{-\theta x} \nu(dx)$$

et ainsi v est la log-Laplace de ν. C'est donc une fonction convexe. Définissons aussi

$$m'(\theta) = -\int x e^{-\theta x} \nu(dx)$$

dès que cette intégrale à un sens, même si on ne peut pas parler de dérivée de m en 1. On en dérive

$$v'(\theta) = \frac{m'(\theta)}{m(\theta)}.$$

Prendre $\theta = 0$ revient à regarder des particules fixes : c'est le processus de Galton-Watson classique. $m(0)$ est le nombre moyen d'enfants d'un individu. On suppose $m(0) > 1$, qu'on peut encore écrire $v(0) > 0$, autrement dit le processus est surcritique. Sinon il s'éteindrait presque sûrement et on aurait donc $W = 0$ ps.

On limitera de plus notre étude des lissages au cas où $v(1) = 0$ et $v'(1) \leq 0$. Lorsqu'on perturbe un lissage en faisant varier θ comme évoqué ci-dessus, on constate que l'on a $v'(1) < 0$ pour θ dans un certain intervalle ouvert, $v'(1) = 0$ à la frontière de cet intervalle et $v'(1) > 0$ en dehors.

Le cas $v'(1) = 0$ est donc le cas frontière entre les deux autres et c'est le plus difficile. On verra comment ramener une partie de son étude au cas $v'(1) < 0$, en réduisant l'équation fonctionnelle.

Bilan des hypothèses, qu'on peut dessiner en se rappelant que v est convexe :

$$v(0) > 0, v(1) = 0, v'(1) \leq 0.$$

2. Étude de W : CNS pour que $W \neq 0$

Cette partie reprend essentiellement [12].

Lemme 2.1. *$P(W(\theta) = 0)$ vaut 1 ou q, où q est la probabilité d'extinction du processus de Galton-Watson sous-jacent.*

Démonstration. $W \overset{loi}{=} \sum A_i W^i$ entraîne que

$$P(W = O) = E\left[\prod_{i\text{tel que}A_i>0} P(W^i = 0)\right].$$

Et donc $P(W = 0)$ est un point fixe de la fonction génératrice de la loi de reproduction du processus de Galton-Watson.

Remarque 2.2. Sur la partie de l'espace de probabilité où la population s'éteint, $W = 0$. Le lemme précédent dit donc que sur l'événement «la population tend vers l'infini» (qui est le complémentaire de «la population s'éteint» aux ensembles négligeables près), W est soit identiquement nulle, soit partout strictement positive.

On a $q < 1$; en effet on a supposé le processus de Galton-Watson sous-jacent surcritique. Le théorème suivant est une version améliorée due à R. Lyons du théorème fondateur de Biggins :

Théorème 2.3. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $m'(\theta)$ existe et est fini. On pose $\log^+(x) = \max(\log x, 0)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $P(W(\theta) = 0) = q$,
(ii) $P(W(\theta) = 0) < 1$,
(iii) $E[W(\theta)] = 1$,
(iv) $E[W_1(\theta)\log^+(W_1(\theta))] < \infty$ *et* $\theta v'(\theta) < \log(m(\theta))$.

3. Réduction de l'équation fonctionnelle

Cette section emprunte beaucoup à [4].

3.1. **La martingale multiplicative.** Le principe : il s'agit de trouver un nouveau lissage qui admettra comme point fixe les points fixes du lissage de départ, mais possédant de meilleures propriétés. Par exemple, les itérés d'un lissage fixent encore les points fixés par le lissage. L'idée est encore ici d'accélérer le temps, de sauter des générations mais de manière non uniforme en considérant que certains individus se reproduisent plus vite que d'autres.

Précisément, $\Phi \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ peut s'écrire

$$\forall \psi \geq 0, \Phi(\psi) = E\left[\prod_{|u|=1} \Phi(\psi e^{-z_u})\right].$$

Si on arrive à écrire la même équation remplaçant le produit sur u dans la première génération par celui sur u dans un certain ensemble dénombrable l, éventuellement aléatoire, d'individus, alors Φ sera aussi un point fixe pour le lissage associé à la famille

$$A_u^* = e^{-z_u}, u \in l$$

que l'on peut transformer en suite décroissante très facilement par changement d'indice. On la notera alors $(A_i^*)_i$.

Théorème 3.1. *Pour $\phi > 0$,*

$$M_n(\phi) = \prod_{|u|=n} \Phi(\psi e^{-z_u})$$

définit une martingale bornée (car $0 < \Phi(\psi) < 1$), que l'on appelle martingale multiplicative relativement à $\mathcal{F}_n$. Cette martingale converge donc ps et dans L^1 vers une limite $M(\psi)$. En particulier $EM(\psi) = \Phi(\psi)$ et $P(M(\psi) < 1) > 0$ pour tout $\psi > 0$.

3.2. **Les lignes optionnelles.** Une *ligne* est un ensemble d'individus tel qu'aucun d'entre eux n'est l'ancêtre d'un autre.

Une ligne coupe donc l'arbre horizontalement contrairement à une ligne de descente qui est vue comme verticale. À noter qu'une ligne ainsi définie n'intersecte pas nécessairement toutes les lignées.

A une ligne l on associe la tribu $\mathcal{G}_l$ de ce qui se passe strictement au dessus de l, autrement dit la tribu contenant toute l'information sur les vies des individus qui n'en font pas partie et qui ne sont pas non plus des descendants d'individus de l.

L'ordre partiel sur les individus induit un ordre sur les lignes : $l_1 \leq l_2$ si tout membre de l_2 est un descendant (au sens large) d'un membre de l_1. Une *ligne optionnelle* est une ligne aléatoire l telle que pour toute ligne fixe l', $\{l \leq l'\} \in \mathcal{G}_{l'}$. Autrement dit on sait si un groupe d'individus formant une ligne optionnelle est au dessus d'une ligne donnée en regardant ce qui se passe avant cette ligne : cela généralise la notion de temps d'arrêt.

Pour une ligne l, on note on note $E_l(n)$ l'ensemble des membres de l appartenant à la génération n et $A_l(n)$ les individus de la génération qui n'ont aucun ancêtre dans l.

Cela permet de définir $\overline{g}(l) = \sup\{n/A_l(n) \neq \emptyset\}$ la dernière génération contenant un membre sans ancêtre dans l et $\underline{g}(l) = \inf_{u \in l} |u|$ la première génération contenant un membre de l.

Quand $\overline{g}(l) < \infty$, l coupe vraiment l'arbre en deux.

On définit pour toute ligne optionnelle l

$$M^l(\psi) = \prod_{u \in l} \Phi(\psi y_u).$$

Lemme 3.2. *Supposons l optionnelle avec $\overline{g}(l)$ fini presque sûrement. Alors*

$$E\left[M(\psi)|\, \mathcal{F}^l\right] = M^l(\psi).$$

Théorème 3.3. *Soit $(l(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ une famille croissante de lignes optionnelles telle que, presque sûrement,*

$$\forall t, \overline{g}(l(t)) < \infty.$$

Alors

$$M^{l(t)}(\psi) = \prod_{u \in l(t)} \Phi(\psi y_u)$$

est une martingale bornée pour la filtration $\mathcal{F}^{l(t)}$. De plus, pourvu que, presque sûrement, $\underline{g}(l(t)) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$, $M^{l(t)}(\psi)$ converge vers $M(\psi)$ presque sûrement et dans L^1. Dans ce cas, si de plus $\sup_{u\in l(t)} y_u \to 0$ *quand $t \to +\infty$ alors*

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{u \in l(t)} y_u L(\psi y_u) = -\log M(\psi)$$

avec

$$L(\psi) = \frac{1 - \Phi(\psi)}{\psi}.$$

3.3. **Le processus de Crump-Mode-Jagers (CMJ).** Reste à construire une famille de lignes optionnelles intéressante. Le résultat suivant, qui concerne la position B_n de l'individu de la génération n le plus à droite est fondamental pour la suite :

Théorème 3.4. *Pourvu qu'il existe $\theta > 0$ tel que $m(\theta) \leq 1$, $B_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.*

Corollaire 3.5. *Sous les hypothèses* $v(0) > 0$, $v(1) = 0$ *et* $v'(0) \leq 0$, $B_n \to \infty$.

Donc la population migre globalement vers la droite de l'axe réel. Ce résultat joue un rôle clef dans la construction qui suit :

Définissons pour la marche aléatoire associée au lissage

$$\mathcal{C} = \{u, z_u > 0 \text{ mais } \forall v < u, z_v \leq 0\},$$

l'ensemble des individus qui sont les premiers de leur ligne de descente à être à droite de 0.

On construit maintenant une nouvelle marche aléatoire de branchement en considérant que les éléments de $\mathcal{C}$ sont les enfants de l'individu initial, et qu'ils se reproduisent de la même manière, c'est-à-dire que les descendants directs de u sont les éléments de $\mathcal{C}(z_u) \bigcap \{v, v > u\}$ avec

$$\mathcal{C}(t) = \{u, z_u > t \text{ mais } \forall v < u, z_v \leq t\}.$$

Et ainsi de suite, de sorte qu'on obtient une nouvelle marche aléatoire de branchement dont la reproduction et les déplacements de tous les individus sont des copies indépendantes de $\mathcal{C}$.

La propriété de migration vers $+\infty$ a ainsi été renforcée : les déplacements de la nouvelle marche aléatoire sont tous strictements positifs. Une telle marche est appelée un processus de CMJ, pour Crump-Mode-Jagers. On appellera donc la marche ainsi construite le processus CMJ induit. t sera interprété comme le temps et on oubliera les générations indexées par des entiers pour s'intéresser à $\mathcal{C}(t)$, la génération en gestation à l'instant t.

On définit pour $t \in \mathbb{R}^+$

$$M_t(\psi) = \prod_{u \in \mathcal{C}(t)} \Phi(\psi e^{-z_u}).$$

Sous les hypothèses du corollaire, le théorème de la section précédente s'applique et donne :

Théorème 3.6. *Pour chaque* $\psi \geq 0$, $M_t(\psi)$ *est une martingale bornée qui converge vers* M. *En particulier, on obtient*

$$\Phi(\psi) = E\left[\prod_{u \in \mathcal{C}} \Phi(\psi e^{-z_u})\right].$$

3.4. **La réduction.** On définit A^* comme indiqué au début de la section avec $l = \mathcal{C}$. On note de même v^*, ν^*, ...les équivalents pour le processus CMJ induit de v, ν, ...

Certaines propriétés de A se transmettent à A^* :

Théorème 3.7. *Soit* $\Phi \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$.

(a) *Alors* Φ *est aussi solution de*

$$\Phi(\psi) = E\left[\prod \Phi(\psi A_i^*)\right] \ \ et\ \max A_i < 1.$$

(b) *Si* $v(0) > 0$, $v(1) = 0$ *et* $v'(1) \leq 0$, *alors* $v^*(0) > 0$, $v^*(1) = 0$ *et* $v^{*\prime}(1) < 0$.

(c) *Si il existe* $\theta < 1$ *tel que* $v(\theta) < \infty$ *pour* A, *alors* $v(\theta) < \infty$ *aussi pour* A^*.

(d) *Si* N *est fini presque sûrement, alors* N^* *aussi.*

(e) $\exists \theta' > 1, v(\theta') < +\infty$.

3.5. **Une application : amélioration d'un résultat d'unicité.** L'étude des points fixes du lissage via

Théorème 3.8. *Supposons que* $v'(1) < 0, (\exists \theta < 1, v(\theta) < \infty), (\exists \theta' < 1, v(\theta') < \infty)$ *et* $\Phi \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$. *Alors* Φ *est unique à un facteur multiplicatif près dans son argument.*

Remarque 3.9. On ne peut avoir mieux puisque la multiplication de l'argument de Φ revient à une multiplication de X, et que le lissage agit linéairement sur les variables aléatoires.

Grâce au résultat précédent, on peut affaiblir les hypothèses sur A, pourvu que A^* vérifie les hypothèses du théorème précédent. En effet Φ, point fixe pour A l'est aussi pour A^*. Et le théorème précédent s'applique. On obtient ainsi :

Théorème 3.10. *Supposons que* $v'(1) \leq 0, (\exists \theta < 1, v(\theta) < \infty)$ *et* $\Phi \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$. *Alors* Φ *est unique à un facteur multiplicatif près dans son argument.*

On s'est ainsi débarrassé de la condition technique $\exists \theta' < 1, v(\theta') < \infty$ mais surtout on a étendu le résultat au cas $v'(1) < 1$.

4. Variation lente et conséquences

4.1. La variation lente.

Théorème 4.1. *Soit $\Phi \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ un point fixe non trivial et*

$$L(\psi) = \frac{1 - \Phi(\psi)}{\psi}.$$

Supposons $v'(1) < 0$. Alors L est à variation lente quand $\psi \to 0$.

Remarque 4.2. L'argument de réduction s'applique encore ici, de sorte que le résultat reste valable en supposant $v'(1) \leq 0$ au lieu de $v'(1) < 0$.

4.2. **L'unicité des solutions.** Voici un analogue du théorème 3.3 (appliqué avec $l(t) = \mathcal{C}(t)$) qu'on peut expliquer heuristiquement grâce à la variation lente de L et au fait que les $z_u, u \in \mathcal{C}(t)$ sont de l'ordre de t, et par conséquent $L(e^{-t})$ est proche de y_u :

Lemme 4.3.

$$L(e^{-t}) \sum_{u \in \mathcal{C}(t)} y_u \to -\log M(1).$$

Lemme 4.4. *On a :*

(i) $M(\psi) = M(1)^{\psi}$ *;*
(ii) $-\log M(1)$ *a pour transformée de Laplace* Φ *;*
(iii) $P(M(\psi) = 0) = 0$ *;*
(iv) $\{M(\psi) < 1\}$ *coïncide avec l'ensemble de survie.*

Théorème 4.5. *Un point fixe $\Phi \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$ d'un lissage est unique à un facteur multiplicatif prêt dans son argument.*

4.3. **La renormalisation de Seneta-Heyde.** On a vu précédemment que dans le cas $v'(1) < 0$, il fallait encore une condition sur le «moment» d'ordre $X \log X$ de W_1 pour avoir l'uniforme intégrabilité de W_n et la non dégénérescence de la limite. On peut contourner ce problème en renormalisant la martingale de manière à avoir une limite non nulle.

Lemme 4.6. *Si $v'(1) < 0$, alors, en probabilité et sur l'ensemble de survie, on a*

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} \to 1.$$

Théorème 4.7. *Sous les conditions $v'(1) < 0$ et m finie dans un voisinage autour de 1, il existe une suite c_n telle que W_n/c_n converge en loi vers le point fixe non trivial du lissage.*

Remarque 4.8. En fait la convergence en loi ci-dessus peut s'améliorer en une convergence en probabilité sans hypothèse supplémentaire, au simple prix d'une preuve plus technique.

Remarque 4.9. On a déjà vu une convergence presque sûre analogue pour le processus CMJ induit : c'est le lemme 4.3 vu à la lumière du (ii) du lemme 4.4.

Références

1. J. D. Biggins, *Martingale convergence in the branching random walk*, J. Appl. Probab. **14** (1977), 25–37.
2. ———, *Lindley-type equations in the branching random walk*, Stoch. Proc. Appl. **75** (1998), 105–133.
3. R. Durrett, *Probability : theory and examples*, Wadsworth, Pacific Grove, California.
4. J. D. Biggins et A. E. Kyprianou, *Seneta-heyde norming in the branching random walk*, Ann. Probab. **25** (1997), 337–360.
5. ———, *Fixed points of the smoothing transform : the boundary case*, Electronic Journal of Probability **10** (2004), 609–631.
6. ———, *Measure change in multitype branching*, Adv. Appl. Probab. **36** (2004), 544–581.
7. R. Durrett et M. Liggett, *Fixed points of the smoothing transform*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete **64** (1983), 275–301.
8. R. Lyons ; R. Pemantle et Y. Peres, *Conceptual proofs of $l \log l$ criteria for mean behavior of branching processes*, Ann. Prob. **23** (1995), 1125–1138.
9. A. E. Kyprianou, *Slow variation and uniqueness of solutions to the fonctional equation in the branching random walk*, J. Appl. Probab. **35** (1998), 795–802.
10. Q. Liu, *Fixed points of a generalized smoothing transform and applications to the branching processes*, Adv. Appl. Probab. **30** (1998), 85–112.
11. ———, *On general multiplicative cascades*, Stoc. Proc. Appl. **86** (2000), 263–286.
12. R. Lyons, *A simple path to Biggins' martingale convergence for branching random walk*, Classical and Modern Branching Processes, IMA Vol. Math. Appl. **84** (1997), 217–221.
13. O. Nerman, *On the convergence of supercritical general (C-M-J) branching process*, Z. Wahrsch. verw. Gebiete **57** (1981), 365–395.