Sur le cône effectif de certaines variétés projectives

Zhi Jiang
sous la direction de Olivier Debarre

9 septembre 2007

⋆ Dans ce texte, une variété est un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$, irréductible et réduit.
⋆ Soit X une variété ; une modification de X est un morphisme projectif birationnel $f : Y \to X$ où Y est aussi une variété.
⋆ Soit E un fibré vectoriel sur une variété X, on note $\mathbb{P}(E)$ le fibré projectif de quotient de E.

1 Théorie générale

Soit X une variété projective. Considérons le groupe abélien libre $\mathrm{Div}(X)$ des diviseurs de Cartier sur X. Nous appelerons un élément de $\mathrm{Div}(X)$ (resp. de $\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, resp. de $\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$) un diviseur (resp. un $\mathbb{Q}$-diviseur, resp. un $\mathbb{R}$-diviseur). Des diviseurs D_1 et D_2 sont numériquement équivalents si $(D_1 \cdot C) = (D_2 \cdot C)$ pour toute courbe C sur X. On note $\mathrm{Num}(X)$ le sous-groupe de $\mathrm{Div}(X)$ des diviseurs numériquement équivalents à 0.

Définition 1 Le groupe de Néron-Severi de X est le groupe $N^1(X) = \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Num}(X)$.

Proposition 2 *Le groupe de Néron-Severi $N^1(X)$ est un groupe abélien libre de rang fini.*

Preuve. Un diviseur D détermine une classe de cohomologie $c_1(\mathscr{O}_D) \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Si $c_1(\mathscr{O}_D)$ est nul, D est nul modulo l'équivalence numérique. Donc $N^1(X)$ est un quotient d'un sous-groupe de $H^2(X, \mathbb{Z})$. □

Définition 3 Le rang $\rho(X)$ de $N^1(X)$ est appelé le *nombre de Picard* de X.

Nous notons $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel $N^1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, c'est-à-dire l'espace des $\mathbb{R}$-diviseurs modulo l'équivalence numérique.

Nous notons $Z_1(X)_{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des cycles de dimension 1, c'est-à-dire des sommes formelles $\sum a_i C_i$, où $a_i \in \mathbb{R}$ et $C_i \subset X$ est une courbe irréductible. On note $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ l'espace des 1-cycles modulo l'équivalence numérique. Par définition, nous avons une dualité parfaite :

$$N^1(X)_{\mathbb{R}} \times N_1(X)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \;\; (\delta,\, \gamma) \mapsto (\delta \cdot \gamma).$$

En particulier, $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1.1 Les cônes ample et nef

Définition 4 Un diviseur de Cartier D sur X (avec coefficients dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) est *nef* si

$$(D \cdot C) \geq 0$$

pour toute courbe $C \subset X$. Un $\mathbb{Q}$-diviseur D est ample s'il existe un entier $r > 0$ tel que rD est un diviseur ample. Un $\mathbb{R}$-diviseur D est ample s'il peut être écrit comme une somme finie $D = \sum c_i A_i$, où les $c_i > 0$ sont réels et les A_i des diviseurs amples.

Le théorème classique de Cartan-Serre-Grothendieck est un critère cohomologique pour verifier soit un diviseur ample. Il existe plusieure d'autre critères qui sont plus numerique.

Théorème 5 (Critère de Nakai-Moishezon) *Soit L un fibré en droites sur une variété X. Alors L est ample si et seulement si*

$$\int_V c_1(L)^{\dim V} > 0$$

pour toute sous-variété irréductible V de X de dimension strictement positive.

Remarque 6 Ce théorème a été généralisé par Demailly et Păun dans [DP] : si X est une variété projective, une classe $[w] \subset H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ est une classe kählérienne si et seulement si

$$\int_Y w^{\dim Y} > 0$$

pour toute sous-variété Y de X de dimension strictement positive.

Le critère de Nakai-Moishezon est seulement numerique au sens de théorie d'intersection. Le théorième de Kleiman suivant est essentiel pour obtenir un critere numerique au sens de ce text.

Théorème 7 *Soit X une variété projective. Si D est un $\mathbb{R}$-diviseur nef sur X, alors*

$$(D^k \cdot V) \geq 0$$

pour toute sous-variété $V \subset X$ de dimension k.

Corollaire 8 *Soit X une variété projective. Si D est un $\mathbb{R}$-diviseur sur X. Alors D est ample si et seulement si il existe une constante $\varepsilon > 0$ tel que $(D \cdot C) \geq \varepsilon$ pour chaque courbe irréductible $C \subset X$.*

On peux maintenant definir l'objects principals par corollaire8 :

Définition 9 Le *cône ample* $\mathrm{Amp}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$ est le cône convexe des $\mathbb{R}$-diviseurs amples. Le *cône nef* $\mathrm{Nef}(X) \subset N^1(X)_{\mathbb{R}}$ est le cône convexe des $\mathbb{R}$-diviseurs nefs.

Le théorème suivant est équivalent à théorème 7 et corollaire 8.

Théorème 10 *Soit X une variété projective. On a :*

(1) *le cône nef est l'adhérence du cône ample :*

$$\mathrm{Nef}(X) = \overline{\mathrm{Amp}(X)} \ ;$$

(2) *le cône ample est l'intérieur du cône nef :*

$$\mathrm{Amp}(X) = \mathrm{int}(\mathrm{Nef}(X)).$$

Définition 11 Le *cône des courbes* $NE(X) \subseteq N_1(X)_{\mathbb{R}}$ est le cône des classes des 1-cycles effectifs de X. Plus précisément,

$$NE(X) = \{\sum_{\text{finie}} a_i[C_i] \mid C_i \subset X \text{ courbe irréductible et } a_i > 0\}.$$

L'adhérence $\overline{NE}(X)$ est le *cône fermé des courbes* sur X.

Il est facile de voir que les cônes $\overline{NE}(X)$ et $\mathrm{Nef}(X)$ sont duaux.

Exemple 12 Soit X une surface lisse. Un diviseur est la même chose qu'un 1-cycle, donc $N_1(X)_\mathbb{R} = N^1(X)_\mathbb{R}$. On a l'inclusion $\mathrm{Nef}(X) \subseteq \overline{NE}(X)$ avec égalité si et seulement si $(C^2) \geq 0$ pour chaque courbe irréductible $C \subset X$. On a aussi ([D1], p. 145) :

(1) la classe d'une courbe irréductible $C \subset X$ satisfaisant $(C^2) \leq 0$ est dans $\partial\overline{NE}(X)$;

(2) la classe d'une courbe irréductible $C \subset X$ satisfaisant $(C^2) < 0$ est extrêmale, c'est-à-dire que si $[C] = [C_1] + [C_2]$, où $[C_1]$, $[C_2] \in \overline{NE}(X)$, alors $[C_1]$, $[C_2] \in \mathbb{R}^+[C]$.

1.2 Les cônes grand et pseudo-effectif

Définition 13 Un fibré en droites L sur une variété irréductible X est *grand* s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $h^0(X, L^{\otimes m}) > \alpha m^{\dim X}$ pour tout $m \gg 0$. Un diviseur D est grand si $\mathscr{O}_X(D)$ l'est.

Un résultat essentiel est un lemme de Kodaira.

Lemme 14 *Soit D un diviseur grand et soit F un diviseur effectif arbitraire. Alors :*

$$H^0(X, \mathscr{O}_X(mD - F)) \neq 0$$

pour tout $m \gg 0$.

Corollaire 15 *Un diviseur D de X est grand si et seulement si, pour chaque diviseur ample A, il existe un entier $m > 0$ et un diviseur effectif N dans X telle que $mD \equiv_{\mathrm{num}} A + N$.*

Définition 16 (Cônes grand et pseudo-effectif) Soit X une variété projective. Le *cône grand*

$$\mathrm{Big}(X) \subseteq N^1(X)_\mathbb{R}$$

est le cône convexe engendré par les classes de diviseurs grands. Le *cône pseudo-effectif*

$$\overline{\mathrm{Eff}}(X) \subseteq N^1(X)_\mathbb{R}$$

est le cône fermé engrendré par les classes de diviseurs effectifs.

On obtient le théorème suivant du lemme de Kodaira.

Théorème 17 *Le cône grand est l'intérieur du cône effectif et le cône pseudo-effectif est l'adhérence du cône grand :*

$$\mathrm{Big}(X) = \mathrm{int}(\mathrm{Eff}(X)) \ , \quad \overline{\mathrm{Eff}}(X) = \overline{\mathrm{Big}(X)}.$$

Un théorème profond récent de Boucksom, Demailly, Păun et Peternell [BDPP] caractérise le cône dual du cône pseudo-effectif dans $N_1(X)_{\mathbb{R}}$.

Définition 18 Une courbe irréductible C dans X est dite *mobile* s'il existe une modification $f : Y \to X$ et des classes amples $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sur Y tels que $C = f_*(a_1 \cap \cdots \cap a_{n-1})$. Le *cône mobile*

$$\overline{\mathrm{Mov}}(X) \subseteq N_1(X)_{\mathbb{R}}$$

de X est le cône convexe fermé engendré par les classes de courbes mobiles.

Théorème 19 *Soit X une variété projective. Les cônes*

$$\overline{\mathrm{Eff}}(X) \quad et \quad \overline{\mathrm{Mov}}(X)$$

sont duaux.

2 Liens avec le Programme du Modèle Minimal (MMP)

La structure de $NE(X)$ est centrale dans la théorie de Mori, qui est un programme pour déterminer la géométrie birationnelle d'une variété projective. Soit X une variété projective et soit D un diviseur de Cartier sur X. On note $\overline{NE}(X)_{D\geq 0}$ le sous-cône

$$\overline{NE}(X) \cap \{\xi \in N_1(X)_{\mathbb{R}} \mid (\xi \cdot D) \geq 0\}.$$

La définition de $\overline{NE}(X)_{D\leq 0}$ est similaire.

Théorème 20 (Mori) *Soit X une variété projective lisse pour laquelle K_X n'est pas nef.*

(1) *Il existe une famille au plus dénombrable $\{C_i\}$ de courbes rationnelles telle que $0 \leq -(K_X \cdot C_i) \leq n+1$ et*

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geq 0} + \sum_i \mathbb{R}^+[C_i].$$

(2) *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et toute classe ample* h*, il existe des courbes rationnelles* $C_1, \ldots, C_t$ *telles que* $0 \leq -((K_X + \varepsilon h) \cdot C_i) \leq n+1$ *et*

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X+\varepsilon h \geq 0} + \sum_{i=1}^{t} \mathbb{R}^+[C_i].$$

En particulier, si X est une variété de Fano, c'est-à-dire si $-K_X$ est ample, alors $NE(X) = \overline{NE}(X)$ est un cône polyédral.

Étant donnée une variété projective, un des buts de la géométrie birationnelle est de trouver un[1] modèle minimal Y de X, c'est-à-dire que K_Y est nef et que Y et X sont birationnels. Une idée naïve est de contracter les courbes dont la classe est dans $\overline{NE(X)}_{K_X<0}$. Après les efforts de plusieurs mathématiciens, notamment Kawamata, Kollár, Mori, Reid et Shokurov, on sait qu'un morphisme de contraction existe.

Théorème 21 *Soit* X *une variété projective lisse et soit* R *une arête* K_X*-négative.*

(1) *Il existe une courbe irréductible* C *engendrant* R*.*
(2) *Le morphisme de contraction* $c_R : X \to Y$ *existe et est unique.*
(3) *Il y a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y) \xrightarrow{c_R^*} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\cdot C} \mathbb{Z}.$$

Les ingrédients de la démonstration incluent un théorème intéressant en lui-même.

Théorème 22 *Soit* D *un diviseur nef sur* X *et soit* $k > 0$ *un entier tel que* $kD - K_X$ *est un diviseur nef et grand. Alors* $\mathscr{O}_X(bD)$ *est engrendré par ses sections globales pour tout* $b \gg 0$*.*

En fait X peut être (légérement) singulière. Dans la théorie de Mori, on doit permettre à X d'avoir des singularités modérées (par exemple des singularités terminales). Une raison est que l'image d'un morphisme de contraction est souvent une variété singulière. Donc pour continuer de contracter les classes K_X-négatives, il faut développer une théorie dans une catégorie où les objets sont des variétés singulières. Pour les détails, on laisse le lecteur consulter [D1].

[1] Quand X est de dimension ≥ 3, Y n'est pas unique à cause de l'existence de flops.

3 Exemples

Étant donnée une variété projective, il n'est en général pas facile de caractériser leurs cônes, même si X est très simple.

3.1 Cônes d'une surface cubique

Soit X une surface cubique lisse dans $\mathbb{P}^3$. On note H la classe d'un hyperplan, de sorte que $K_X = -H$. Par la théorie de Hodge, on sait que $\rho(X) = h^{1,1}(X) = \dim H^2(X, \mathbb{R}) = 7$. Il est bien connu que X contient 27 droites. En fait X est l'image de l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en 6 points généraux (c'est-à-dire que trois quelconques d'entre eux ne sont pas colinéaires et que les 6 points ne sont pas situés sur une conique), notés $x_1, \ldots, x_6$, par le système linéaire des cubiques passant par $x_1, \ldots, x_6$. L'image des 6 diviseurs exceptionnels sont 6 droites, notées $L_1, \ldots, L_6$. L'image de la droite (x_i, x_j), $1 \leq i < j \leq 6$, est aussi une droite dans X, notée L_{ij}. Les droites restantes sont les images des coniques contenant 5 des 6 points $(x_1, \ldots, \overset{\wedge}{x_i}, \ldots, x_6)$, notées L_{-i}, $1 \leq i \leq 6$. On a

$$NE(X) = \overline{NE(X)} = \sum_{1 \leq i \leq 6} \mathbb{R}[L_{\pm i}] + \sum_{1 \leq i < j \leq 6} \mathbb{R}[L_{ij}],$$

avec $L_{-i} \equiv_{\text{num}} 2H - \sum_{t \neq i} L_t$ et $L_{ij} \equiv_{\text{num}} H - L_i - L_j$.

3.2 Cônes d'une surface K3 algébrique

Soit X une surface K3, c'est-à-dire une surface complexe compacte simplement connexe qui admet une 2-forme holomorphe partout non nulle. Un exemple typique de surface K3 est une surface lisse de degré 4 dans $\mathbb{P}^3$. Il est bien connu que toutes les surfaces K3 sont kählériennes et difféomorphes entre elles et que $H^2(X, \mathbb{Z})$ est libre de rang 22, de signature $(3, 19)$ pour la forme d'intersection. La structure de $NE(X) \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ est beaucoup plus compliquée que pour une surface cubique. Kovács [Kov] a donné une description explicite quand X est algébrique ; $\rho(X)$ varie de 1 à 20. Je me contente de citer le théorème suivant.

Théorème 23 (Kovács) *Soit X une surface K3 projective lisse avec nombre de Picard au moins 3. L'une des propriétés suivantes est vraie :*

(1) *X ne contient aucune courbe C telle que $(C^2) < 0$.*
(2) *$\overline{NE}(X) = \overline{\sum \mathbb{R}^+[\ell]}$ où la somme porte sur toutes les courbes rationnelles ℓ contenues dans X.*

3.3 Cônes d'une variété abélienne

Soit X une variété abélienne de dimension n et soit H un diviseur ample fixé. Un fait intéressant est que l'équivalence homologique et l'équivalence numérique sont les mêmes. Comme X est un groupe algébrique, tous les diviseurs effectif sont nefs. Il est relativement facile de caractériser le cône ample. Nous adaptons la proposition suivante de [CP].

Proposition 24 *Un $\mathbb{R}$-diviseur D sur X est ample si et seulement si $(D^k \cdot H^{n-k}) > 0$ pour tout $0 \leq k \leq n$, et D est nef si et seulement si $(D^k \cdot H^{n-k}) \geq 0$.*

En général, le cône nef n'est pas du tout un cône polyédral mais d'après Bauer [B], c'est le cas si et seulement si X est isogène à un produit de variétés abéliennes simples de nombre de Picard 1 et mutuellement différentes. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 25 *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) *le cône fermé des courbes $\overline{NE}(X)$ est un cône polyédral ;*
(ii) *le cône nef $\mathrm{Nef}(X)$ est un cône polyédral ;*
(iii) *$N^1(X)$ est engendré par un nombre fini d'éléments ;*
(iv) *X est isogène à $X_1 \times \cdots \times X_r$, où chaque X_i est simple et de nombre de Picard 1, et les X_i sont mutuellement différentes pour $1 \leq i \leq r$.*

Il est facile de voir que si X est simple et $\rho(X) \geq 2$, alors $N^1(X)$ n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments. Puis, si $X \to Y$ est une isogénie, pour vérifier $N^1(X)$ est engendré par un nombre fini d'éléments, il suffit de vérifier que $N^1(Y)$ l'est. Le dernier ingrédient est qu'il existe un isomorphisme $N^1(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathrm{End}^s(X)_{\mathbb{Q}}$, où $\mathrm{End}^s(X)_{\mathbb{Q}} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}$ est le sous-groupe des endomorphismes symétriques pour l'involution de Rosati.

3.4 Cônes et stabilité des fibrés vectoriels

Théorème 26 (Miyaoka) *Soit E un fibré vectoriel sur une courbe projective lisse C. Alors*

$$E \text{ est semistable} \iff \text{les cônes nef et pseudo-effectif de } \mathbb{P}(E) \text{ coïncident.}$$

Preuve. Comme C est une courbe, $N^1(\mathbb{P}(E))$ est engendré par f et ξ, où f est la classe d'une fibre de $\pi : \mathbb{P}(E) \to C$ et ξ est la classe de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. Supposons que E est semistable, le rang de E est r et $c_1(E) = d$. Soit $af + b\xi$ une classe effective. Alors $H^0(C, \mathbf{S}^b E \otimes L) \neq 0$, où L est un fibré en droites sur C et $\deg(L) = a$. Comme $\mathbf{S}^b E$ est semistable, on a $b\frac{d}{r} \geq -a$. Le point essentiel est qu'un fibré vectoriel semistable E sur une courbe projective lisse est nef [2] si et seulement si $\deg(E) \geq 0$. On obtient que $\mathbf{S}^b E \otimes L$ est nef et donc $af + b\xi$ est nef. Inversement, on suppose que les cônes nef et pseudo-effectif de $\mathbb{P}(E)$ coïncident. Si F est un fibré vectoriel quotient de E, il faut montrer que $\frac{\deg(F)}{\mathrm{rank}(F)} \geq \frac{d}{r}$. Soient D un $\mathbb{Q}$-diviseur sur C tel que $\frac{d}{r} > \deg(D)$ et kD un diviseur, alors on a

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{P}(E), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(k) \otimes \pi^*(\mathscr{O}_C(-kD))) &= h^0(C, \mathbf{S}^k E \otimes \mathscr{O}_C(-kD)) \\ &\geq \chi(C, \mathbf{S}^k E \otimes \mathscr{O}_C(-kD)) \\ &= \binom{k+r-1}{k}(k(\frac{d}{r} - deg(D)) + 1 - g), \end{aligned}$$

hence $\xi - \deg(D)f$ est une classe grande dans $\mathbb{P}(E)$. Il existe un entier positif k tel que $k(\xi - \deg(D)f)$ est effectif et par hypothèse, il est nef.

La restriction de $\xi - \deg(D)f$ sur $\mathbb{P}(F)$ est aussi nef. Par le théorème 7, on a $((\xi - \deg(D)f)_{|\mathbb{P}(F)})^{\mathrm{rank}(F)} = \deg(F) - \mathrm{rank}(F)\deg(D) \geq 0$. Comme $\deg(D) < \frac{\deg(E)}{\mathrm{rank}(E)}$ est arbitraire, on a $\frac{\deg(F)}{\mathrm{rank}(F)} \geq \frac{d}{r}$. $\square$

Lorsque C est une surface (projective lisse), la situation est beaucoup plus compliquée, même lorsque E est de rang 2. On montre sans trop de difficulté que si les cônes nef et pseudo-effectif de $\mathbb{P}(E)$ sont les mêmes, alors E est semi-stable (relativement à toute classe ample). En revanche, la réciproque est fausse en général. On considère le cas où E est un fibré vectoriel stable très général de rang 2 sur $\mathbb{P}^2$, de première classe de Chern 0 et seconde classe de Chern $c \geq 2$. De nouveau, le nombre de Picard du fibré projectif $\mathbb{P}(E)$ est 2. Les cônes nef et pseudo-effectif de $\mathbb{P}(E)$ sont donc des cônes convexes fermés plans, qui sont ainsi chacun délimités par deux arêtes. L'une d'elle est commune : c'est la classe d'une fibre. Il s'agit donc de déterminer les deux autres arêtes.

[2] Un fibré vectoriel E sur une variété projective est nef si le fibré en droites $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ est nef.

De façon générale, ces deux arêtes sont situées de part et d'autre d'une demi-droite de pente $\sqrt{c/3}$ (dans une base convenable). On en déduit facilement que si $c/3$ est un carré parfait, les cônes nef et pseudo-effectif sont les mêmes, délimités par cette arête. Dans le cas contraire, si de plus $2 \leq c \leq 7$, des calculs explicites montrent que les cônes sont différents.

La situation reste cependant ouverte pour $c \geq 8$ et $c/3$ non carré parfait. On espère montrer que pour $c \gg 0$, les deux cônes sont les mêmes. Cela donnerait un exemple explicite de cônes avec une arête irrationnelle.

3.5 Produits d'une courbe

Les cônes nef et pseudo-effectif des produits symétriques d'une courbe (projective lisse) C ont été beaucoup étudiés ([Ko], [P]), même s'ils ne sont pas encore entièrement connus. De façon plus frappante, presque rien n'est connu pour les cône nef et pseudo-effectif d'un produit $C \times C$, pour C courbe très générale de genre g. Le nombre de Picard est ici 3. On a donc affaire à des cônes (convexes fermés) dans l'espace à trois dimensions. Soit α la classe (ample) du diviseur $(\{c\} \times C) + (C \times \{c\})$ (où c est un point quelconque de C).

Lorsque C est une courbe elliptique très générale (donc de genre $g = 1$), Kollár a montré dans [K] que les cônes nef et pseudo-effectif coïncident et sont caractérisés par les conditions $x^2 \geq 0$ et $x \cdot \alpha \geq 0$.

Lorsque C est une courbe très générale de genre $g \geq 4$, la situation est différente. Soit Δ la diagonale de $C \times C$. On rappelle que $\Delta^2 = 2 - 2g < 0$, de sorte que la classe de Δ est effective mais pas nef.

On conjecture que le cône nef est caractérisé par les conditions $x^2 \geq 0$, $x \cdot \alpha \geq 0$ et $x \cdot \Delta \geq 0$. De façon équivalente, Δ serait la seule courbe irréductible de $C \times C$ dont l'auto-intersection est strictement négative.

Références

[B] Th. Bauer, On the cone of curves of an abelian variety, *Amer. J. Math.* **120**(1998), 997–1006.

[BDPP] S. Boucksom, J-P. Demailly, M. Păun, Th. Peternell, The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension, preprint 2004.

[CP] F. Campana, Th. Peternell, Algebraicity of the ample cone of projective varieties, *J. Reine Angew. Math.* **407** (1990), 160–166.

[D1] O. Debarre, *Higher-Dimensional Algebraic Geometry,* Springer-Verlag, New York, 2001.

[D2] O. Debarre, Classe de cohomologie positives dans les variétés kählériennes compactes, *Séminaire Bourbaki n°943, 2004/2005,* Astérisque **307** (2006), 199-227.

[DP] J.-P. Demailly, M. Păun, Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold, *Ann. of Math.* **159** (2004), 1247–1274.

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, New York, 1997.

[KM] J. Kollár, S. Mori, *Birational Geometry of Algebraic Varieties,* Cambridge Tracts in Math. **134**, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Ko] A. Kouvidakis, Divisors on symmetric products of curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* **337** (1993), 117–128.

[Kov] S. Kovács, The cone of curves of a K3 surface, *Math. Ann.* **300** (1994), 681–691.

[L] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **48** and **49**, Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.

[P] G. Pacienza, On the nef cone of symmetric products of a generic curve, *Amer. J. Math.* **125** (2003), 1117–1135.