IRRATIONALITÉ, TRANSCENDANCE ET INDÉPENDANCE $\mathbb{Q}$-LINÉAIRE DES VALEURS DE LA FONCTION ZÊTA AUX POINTS ENTIERS

JIN FANGZHOU ET FRANCESCHI SANDRO

Sous la direction de Joël Merker

RÉSUMÉ. La fonction zêta de Riemann a longtemps intéressé les mathématiciens et est encore à l'heure actuelle très étudiée, car cette fonction est fortement liée aux propriétés des nombres premiers. Dans ce mémoire nous étudierons des propriétés arithmétiques et algébriques des valeurs de la fonction zêta aux points entiers telles que l'irrationalité, la transcendance et l'indépendance $\mathbb{Q}$-linéaire de certaines de ses valeurs. Dans un premier temps, nous montrerons le classique prolongement méromorphe de la fonction zêta sur le plan complexe, avant d'établir le théorème d'Apéry selon lequel $\zeta(3)$ est irrationnel. Nous nous intéresserons ensuite à divers critères d'irrationalité et d'indépendance linéaire qui nous serviront à démontrer le théorème de Rivoal qui prouve l'existence d'une infinité de $\zeta(2n+1)$ irrationnels (résultat purement existentiel). Avec ces techniques, nous redémontrerons aussi la transcendance de π, qui fut établie par Lindemann en 1882.

TABLE DES MATIÈRES

Date: 6-12-2010.

1. Introduction

La fonction zêta de Riemann est définie, pour les valeurs complexes $s \in \mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Re}(s) > 1$, par la série :

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s},$$

qui converge absolument, d'après le principe de comparaison d'une somme avec une intégrale. Classiquement, on démontre (voir la Section 2.1) que cette fonction $s \mapsto \zeta(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un unique pôle au point $s = 1$ qui est simple.

La fonction zêta est en fait très étroitement liée aux propriétés des nombres premiers. Tout d'abord, Euler a établi une représentation fondamentale de $\zeta(s)$ sous forme d'un produit :

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

qui converge absolument lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$. Ensuite, après des décennies d'exploration numérique et de résultats intermédiaires (Legendre, Gauss, Tchebychev), Hadamard et de la Vallée Poussin sont parvenus à démontrer le célèbre :

Théorème des nombres premiers. *Soit $\pi(x)$ le cardinal de l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à un nombre réel $x \geqslant 1$. Alors lorsque x tend vers l'infini, la fonction $x \mapsto \pi(x)$ se comporte asymptotiquement comme :*

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} \sim \frac{x}{\log x}.$$

Leur démonstration repose essentiellement sur le fait que $\zeta(s)$ ne s'annule pas sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$ (Voir [Zagier], pour une preuve complète et très concise de Zagier qui repose sur une simplification essentielle due à Newmann).

Un des grands problèmes mathématiques encore ouverts actuellement sur la fonction zêta est l'*Hypothèse de Riemann* : les zéros de la fonction zêta dans la *bande critique* $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ sont tous situés sur la *droite critique* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. On peut montrer que cette hypothèse est équivalente au fait que

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} = \mathrm{O}\big(\sqrt{x} \log x\big).$$

Un autre aspect de la recherche sur la fonction zêta porte sur l'étude de l'irrationalité des valeurs de la fonction zêta aux entiers naturels. Aux entiers pairs $2n$, les valeurs $\zeta(2n)$

sont connues, ce sont des multiples rationnels de puissances paires de π :

$$\zeta(2n) \in \pi^{2n}\mathbb{Q} \qquad {\scriptstyle (n\geqslant 1)},$$

comme on le redémontrera dans la Section 2.2. Lindemann a montré en 1882 que π est transcendant. Il en découle que les $\zeta(2n)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, donc *a fortiori* irrationnels. Pour les valeurs de zêta aux entiers impairs, le premier résultat n'a été obtenu qu'en 1978 [1].

Théorème [APÉRY]. *Le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel.*

Mais jusqu'à présent on ne connaît aucun nombre irrationnel parmi les $\zeta(2n+1)$ autre que $\zeta(3)$. Cependant, des résultats moins forts, mais d'apparence similaire, ont été établis :

– En 1979, Gutnik a montré dans [Gutnik] que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, au moins un des deux nombres suivants est irrationnel :

$$3\zeta(3) + q\zeta(2), \qquad \zeta(2) + 2q\log(2).$$

– En 1981, Beukers a montré dans [Beukers2] que les deux ensembles suivants contiennent respectivement au moins un nombre irrationnel :

$$\left\{\frac{\pi^4}{\zeta(3)},\ \frac{7\pi^4\log(2)}{\zeta(3)} - 15\pi^2,\ \frac{7\pi^6}{3240\zeta(3)} - \zeta(3)\right\}$$

$$\left\{\frac{\zeta(3)}{\pi^2},\ \frac{\zeta(3)^2}{\pi^2} - \frac{\pi^4}{360},\ \zeta(3)\pi^2 - 30\zeta(5),\ \frac{\zeta(3)\zeta(5)}{\pi^2} - \frac{\pi^6}{2268}\right\}$$

– Plus récemment, en 2001, Zudilin a montré dans [Zudilin] qu'au moins un nombre parmi $\{\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)\}$ est irrationnel.

Néanmoins, au lieu de considérer les $\zeta(2n+1)$ séparément, il est possible de les considérer ensemble. Voici un théorème démontré par Rivoal en 2001, qui est central dans ce mémoire :

Théorème [RIVOAL]. *Il existe une infinité de nombres irrationnels parmi $\{\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots\}$*

Nous donnerons un énoncé quantitatif plus précis dans la Section 4. Plus généralement, nous avons la conjecture suivante, qui est actuellement complètement hors de portée :

Conjecture 1.1. *Les nombres $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \ldots$ sont algébriquement indépendants.*

Nous tenons à remercier M. Joël Merker pour nous avoir présenté ces problèmes intéressants, et pour nous avoir épaulés durant toute la rédaction de ce mémoire.

---

1. Voir [Apéry] pour la publication par l'auteur, qui est postérieure aux articles de Beukers, de Van der Poorten et de Cohen.

2. GÉNÉRALITÉS SUR LA FONCTION ζ DE RIEMANN

2.1. **Prolongement analytique de la fonction ζ.** Rappelons que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, la série $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ est bien définie car elle converge absolument. Notre premier objectif est de montrer que la fonction ζ se prolonge holomorphiquement sur $\mathbb{C} - \{1\}$.

On définit la *fonction* Γ *d'Euler* par $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t$, intégrale qui converge normalement sur tout compact compris du demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$. Par intégration par parties, on vérifie qu'elle satisfait l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, ce qui permet de prolonger la fonction Γ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, qui a pour seuls pôles des entiers négatifs ou nuls.

Lemme 2.1. *Si* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *alors le produit* $\zeta(s)\Gamma(s)$ *est donné par la formule*

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Pour $t > 0$, on a le développement en série géométrique :

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}.$$

En multipliant le tout par t^{s-1}, en intégrant terme par terme, et en observant que, par changement de variable $t \mapsto nt$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{s-1}\mathrm{d}t = n^{-s}\,\Gamma(s),$$

on voit que l'identité du lemme découle du théorème de convergence dominée. □

Lemme 2.2. *Si f est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ à décroissance rapide à l'infini, alors la fonction*

$$s \mapsto L(f,s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f(t)t^{s-1}\mathrm{d}t,$$

définie pour $Re(s) > 0$ admet un prolongement analytique holomorphe à $\mathbb{C}$. De plus, $L(f,-n) = (-1)^n f^{(n)}(0)$

Démonstration. Soit ϕ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, qui vaut 1 sur $[0,1]$ et 0 sur $[2,+\infty[$. On a $f = \phi f + (1-\phi)f$ et donc $L(f,s) = L(\phi f,s) + L\big((1-\phi)f,s\big)$.

Comme $(1-\phi)f$ est nulle dans un voisinage de 0 et à décroissance rapide à l'infini, le théorème de Morera et le théorème de Fubini permettent de montrer le résultat suivant : la fonction

$$s \mapsto L\big((1-\phi)f,s\big) = \int_0^{+\infty} (1-\phi(t))f(t)t^{s-1}\mathrm{d}t$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. De plus, $\frac{1}{\Gamma(s)}$ s'annule aux entiers négatifs, et donc $L((1-\phi)f, -n) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Il suffit alors de montrer le résultat pour $g = \phi f$, qui est à support compact.

Par intégration par parties, on obtient, pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$L(g, s) = -L(g', s+1).$$

Cette formule permet alors de prolonger $L(g, s)$ en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. De plus, en partant de $L(g, -n)$ et en effectuant $n+1$ telles intégrations par parties, on obtient :

$$L(g, -n) = (-1)^{n+1} L(g^{(n+1)}, 1) = (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} g^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t = (-1)^n g^{(n)}(0),$$

d'où le résultat, puisque $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$, évidemment. $\square$

Soit maintenant $f_0(z) = \frac{z}{e^z - 1}$. Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, comme $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$, le Lemme 2.1 donne : $\zeta(s) = \frac{L(f_0, s-1)}{s-1}$. En appliquant le Lemme 2.2 à f_0, on obtient :

Théorème 2.1. *La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, avec un unique pôle au point 1, pôle qui est simple.*

2.2. **Nombres de Bernoulli et valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs.** Comme au voisinage de 0, on a $e^z - 1 = z(1 + \mathrm{O}(z))$, on peut définir les *nombres de Bernoulli* $(B_n)_{n \geqslant 0}$ à travers le développement en série entière (formelle) à l'origine de la fonction f_0 introduite dans la Section 2.1 :

$$f_0(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geqslant 0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} \, z^n.$$

La fonction $\frac{z}{e^z-1} + \frac{1}{2}z$ étant impaire, on en déduit que $B_1 = -\frac{1}{2}$ et que $B_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

On a $B_n = f_0^{(n)}(0)$, et comme il est clair que chaque dérivée de f_0 est une fonction rationnelle en z et en e^z, la valeur de $f_0^{(n)}$ en 0 est rationnelle. On peut voir que les nombres B_n sont rationnels aussi en développant complètement la fraction en série entière :

$$f_0(z) = \frac{1}{\frac{1}{z}(e^z - 1)} = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots} = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \left(\frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots \right)^k,$$

et en collectant les termes en z^n.

Maintenant, une application du Lemme 2.2 à la fonction f_0 donne :

Corollaire 2.1. *Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$.*

Voici une belle équation fonctionnelle, découverte par Riemann, à laquelle satisfait la fonction ζ :

Proposition 2.1. *Pour un nombre complexe s qui n'est égal ni à un entier négatif pair ni à 1, on peut définir la fonction :*

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big)\,\zeta(s),$$

qui est holomorphe sur son domaine de définition.

Alors $\xi(s)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

lorsque s et $1-s$ sont dans le domaine de définition de ξ. En particulier, ξ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0,1\}$.

Démonstration. Supposons que $\mathrm{Re}(s) > 1$. Par le changement de variable $t \mapsto \pi n^2 t$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi t n^2} t^{\frac{s}{2}} \mathrm{d}t = n^{-s}\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big).$$

Si on se souvient maintenant que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ est absolument convergente et vaut $\zeta(s)$, alors par sommation sur n on en déduit :

$$\begin{aligned}\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big)\,\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\pi t n^2} t^{\frac{s}{2}} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi t n^2} t^{\frac{s}{2}} \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

et cette dernière expression peut être réécrite sous la forme :

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (\theta(t) - 1)\, t^{\frac{s}{2}-1} \mathrm{d}t, \tag{1}$$

si on définit pour tout réel $t > 0$ la fonction $\theta(t)$ de Poisson par :

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi t n^2},$$

série qui est absolument convergente.

Admettons à présent l'équation fonctionnelle suivante (démontrée dans Annexe A) :

$$\theta(t) = \tfrac{1}{\sqrt{t}}\,\theta\big(\tfrac{1}{t}\big).$$

En poursuivant le calcul interrompu dans l'équation (1), et en découpant l'intégrale $\int_0^{+\infty} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$, on a alors :

$$\begin{aligned}\xi(s) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (\theta(t)-1)\, t^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\tfrac{1}{\sqrt{t}}\,\theta(\tfrac{1}{t})-1\right) t^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\theta(t)-1)t^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On fait ensuite le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans la première intégrale pour obtenir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\tfrac{1}{\sqrt{t}}\,\theta(\tfrac{1}{t})-1\right)t^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}t &= -\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \theta(\tfrac{1}{t})t^{\frac{s-3}{2}}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\theta(u)u^{-\frac{s+1}{2}}\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} u^{-\frac{s+1}{2}}\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\theta(u)-1)u^{-\frac{s+1}{2}}\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\theta(u)-1)u^{-\frac{s+1}{2}}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Si on additionne à cette dernière expression la deuxième intégrale, on obtient pour tout nombre complexe s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, l'expression suivante, qui est visiblement invariante par $s \mapsto 1-s$:

$$\xi(s) = -\frac{1}{s(1-s)} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{(\theta(t)-1)}{t}(t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}})\mathrm{d}t.$$

La fonction $\theta(t)-1$ étant une fonction à décroissance rapide à l'infini, en appliquant le théorème de Morera et le théorème de Fubini, on obtient que la fonction $s \mapsto \int_1^{+\infty}\frac{(\theta(t)-1)}{t}(t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}})\mathrm{d}t$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Par le théorème du prolongement analytique, la formule précédente vaut sur tout le domaine de définінition de ξ, ce qui permet de la prolonger en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0, 1\}$. De plus, le membre de droite de cette formule est invariant par $s \mapsto 1-s$, donc ξ l'est aussi, ce qui implique que pour tout nombre complexe s différent de 0 et de 1, on a bien $\xi(s) = \xi(1-s)$. $\square$

De ces deux propositions qui précèdent, on déduit :

Proposition 2.2. *Pour tout entier $n \geqslant 1$, la valeur de $\zeta(2n)$ s'exprime en fonction de π^{2n} et B_{2n} :*

$$\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}.$$

Démonstration. On applique la Proposition 2.1 avec $s = 2n$:

$$\pi^{-n}\Gamma(n)\zeta(2n) = \xi(2n) = \xi(1-2n) = \pi^{n-\frac{1}{2}}\Gamma(\tfrac{1}{2}-n)\zeta(1-2n). \tag{2}$$

Afin de trouver la valeur de $\zeta(2n)$, calculons les trois inconnues restantes de cette équation : $\Gamma(n)$, $\zeta(1-2n)$ et $\Gamma(\frac{1}{2}-n)$. Tout d'abord, il est bien connu que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Ensuite, d'après le Corollaire 2.1,

$$\zeta(1-2n) = (-1)^{2n-1}\frac{B_{2n}}{2n} = -\frac{B_{2n}}{2n}.$$

Enfin, en appliquant récursivement la relation $\Gamma(s) = (s-1)\,\Gamma(s-1)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2})\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{3}{2})\Gamma(-\tfrac{3}{2}) = \cdots &= (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\Gamma(\tfrac{1}{2}-n)\\ &= (-1)^n\frac{(2n)!}{4^n n!}\Gamma(\tfrac{1}{2}-n).\end{aligned}$$

Le fait que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ fournit alors $\Gamma(\frac{1}{2}-n) = (-1)^n\sqrt{\pi}\frac{4^n n!}{(2n)!}$. En insérant ces valeurs dans l'équation (2), on trouve $\zeta(2n) = (-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n}$. □

Puisque les nombres de Bernoulli B_n sont rationnels, on a $\zeta(2n) \in \pi^{2n}\mathbb{Q}$: les valeurs de la fonction zêta aux entiers pairs s'expriment en multiples rationnels des puissances de π. Par conséquent, la transcendance de π entraîne l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des $\zeta(2n)$. Inversement, dans la Section 4.1, on redémontrera la transcendance de π grâce à l'étude des $\zeta(2n)$.

2.3. **Irrationalité de $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$.** Apéry a donné en 1978 la première preuve de l'irrationalité de $\zeta(3)$, mais elle était relativement délicate et les contemporains de son annonce, notamment Van der Poorten, Beukers, Cohen et Reyssat ont mis quelques mois chacun de leur côté et par des voies différentes pour compléter tous les détails. On expose ici une preuve simplifiée due à Beukers, qui démontre l'irrationalité de $\zeta(3)$ et celle de $\zeta(2)$ de manière similaire.

Commençons par quelques préliminaires qui seront utilisées pour la démonstration.

• Soit $d_n = \operatorname{ppcm}\{1, 2, \dots, n\}$ le plus petit multiple commun des n premiers entier positifs. Une estimation sur les exposants de ses facteurs premiers donne :

$$\begin{aligned}d_n = \prod_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p^{[\frac{\log n}{\log p}]} &\leqslant \prod_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} p^{\frac{\log n}{\log p}}\\ &= \prod_{\substack{p\leqslant n\\ p \text{ premier}}} n = n^{\pi(n)} = n^{\frac{n}{\log n}+o(1)} = e^{n+o(n)},\end{aligned}$$

où on utilise le théorème des nombres premiers : $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$. Par conséquent, on a $d_n < 3^n$ à partir d'un certain rang.

• Les *polynômes de Legendre*, définis par $P_n(X) = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}(X^n(1-X)^n)$, ont l'expression explicite :

$$P_n(X) = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}X^{n+i} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n+i}{n}X^i.$$

Par conséquent les $P_n(X)$ sont à coefficients entiers et $\deg(P_n) = n$.

• Pour r,s des entiers positifs, on introduit les deux intégrales impropres suivantes

$$I_{r,s} = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$J_{r,s} = \int_0^1\int_0^1 -\frac{\log xy}{1-xy}x^r y^s\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Comme les fonctions dans l'intégrale sont positives, ces deux intégrales ont une valeur bien définie dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Proposition 2.3. **1)** *Lorsque $r > s \geqslant 0$, alors $I_{r,s}$ et $J_{r,s}$ sont des nombres rationnels, dont les dénominateurs divisent respectivement d_r^2 et d_r^3, i.e.*

$$I_{r,s} \in \frac{1}{d_r^2}\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad J_{r,s} \in \frac{1}{d_r^3}\mathbb{Z}.$$

2) *Lorsque $r = s$, on a les expressions suivantes de $I_{r,r}$ et de $J_{r,r}$:*
pour $r = 0$, on a $I_{0,0} = \zeta(2)$ et $J_{0,0} = 2\zeta(3)$;
pour $r \geqslant 1$,

$$I_{r,r} = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \dots - \frac{1}{r^2},$$

et

$$J_{r,r} = 2\Big(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{r^3}\Big).$$

En conséquence, pour tout $r \geqslant 1$, $I_{r,r} \in \zeta(2)\mathbb{Z} + \frac{1}{d_r^2}\mathbb{Z}$ et $J_{r,r} \in \zeta(3)\mathbb{Z} + \frac{1}{d_r^3}\mathbb{Z}$.

Démonstration. On remarque que les fonctions dans l'intégrale $I_{r,s}$ et $J_{r,s}$ sont toutes positives, ce qui permet de permuter les signes intégrale et somme. En développant donc $\frac{1}{1-xy} = \sum_{i=0}^{+\infty}(xy)^i$, le calcul de $I_{r,s}$ et $J_{r,s}$ se ramène à une série d'intégrales qui se calculent aisément. En effet, il est évident que :

$$\int_0^1\int_0^1 x^p y^q\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{(p+1)(q+1)},$$

et aussi avec $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ et par intégrations par parties on a :

$$\int_0^1 \int_0^1 -x^p y^q \log(xy) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{(p+1)^2(q+1)} + \frac{1}{(p+1)(q+1)^2}.$$

On en déduit donc :

$$I_{r,s} = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^1 x^{r+i} y^{s+i} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+i+1)(s+i+1)},$$

$$J_{r,s} = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^1 -\log(xy) x^{r+i} y^{s+i} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(r+i+1)^2(s+i+1)} + \frac{1}{(r+i+1)(s+i+1)^2} \right).$$

1) Premier cas : $r > s$. En écrivant les termes dans la sommation sous forme de différence, on arrive à simplifier la sommation en une somme finie de termes

$$I_{r,s} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+i+1)(s+i+1)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{s+i+1} - \frac{1}{r+i+1} \right) = \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{s+1} + \cdots + \frac{1}{r} \right).$$

$$\begin{aligned} J_{r,s} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(r+i+1)^2(s+i+1)} + \frac{1}{(r+i+1)(s+i+1)^2} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{(r+i+1)(s+i+1)} - \frac{1}{(r+i+1)^2} + \frac{1}{(s+i+1)^2} - \frac{1}{(r+i+1)(s+i+1)} \right) \\ &= \frac{1}{r-s} \left(\frac{1}{(s+1)^2} + \cdots + \frac{1}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Comme $r > s$ et que $(r-s)|d_r$ et $(s+i)|d_r$ pour $i = 1, 2, \ldots, r-s$ on en déduit que $I_{r,s} \in \frac{1}{d_r^2}\mathbb{Z}$ et $J_{r,s} \in \frac{1}{d_r^3}\mathbb{Z}$.

2) Deuxième cas : $r = s$. Le calcul est simple :

$$I_{r,r} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+i+1)^2} = \sum_{i=r+1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} = \begin{cases} \zeta(2) & \text{si } r = 0 \\ \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{r^2} & \text{si } r \geqslant 1. \end{cases}$$

$$J_{r,r} = 2\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+i+1)^3} = 2\sum_{i=r+1}^{+\infty} \frac{1}{i^3} = \begin{cases} 2\zeta(3) & \text{si } r = 0 \\ 2\left(\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \frac{1}{2^3} - \cdots - \frac{1}{r^3}\right) & \text{si } r \geqslant 1. \end{cases}$$

□

• On se servira du critère d'irrationalité suivant, qu'on étudiera plus en détail dans la Section 3.1 :

Critère d'irrationalité d'un nombre réel *Un nombre réel x est irrationnel si et seulement s'il existe deux suites d'entiers $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ telles que $a_n x + b_n \neq 0$ et que $a_n x + b_n \to 0$.*

• Dans la suite on utilisera le principe suivant dans l'étude du comportement de certaines fonctions :

Principe du col *Soient g et w deux fonctions analytiques sur un ouvert simplement connexe D du plan complexe. Supposons qu'il existe $z_0 \in D$ tel que $w'(z_0) = 0$ et $w''(z_0) \neq 0$. Si L est un chemin inclus dans D le long duquel $\mathrm{Re}(w(z))$ admet un maximum global en z_0, alors*

$$\left(\left|\int_L g(z)e^{nw(z)}\mathrm{d}z\right|\right)^{\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{\mathrm{Re}(w(z_0))}.$$

On s'attaque maintenant à l'irrationalité de $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$.

Théorème 2.2. *Le nombre $\zeta(2)$ est irrationnel.*

Démonstration. Soit M_n l'intégrale suivante :

$$M_n = \int_0^1\int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Comme $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ et $deg(P_n) = n$, en développant le numérateur de l'intégrande de M_n en monômes de x et y, on sait que M_n est une combinaison à coefficients entiers des $I_{r,s}$ avec $n \geqslant r \geqslant s \geqslant 0$. D'après la Proposition 2.3, il existe des entiers A_n, B_n tels que

$$M_n = \frac{1}{d_n^2}(A_n + B_n\zeta(2)).$$

On a donc

$$0 < |A_n + B_n\zeta(2)| = d_n^2|M_n|.$$

On chercher donc à montrer que M_n tend vers 0 assez vite pour pouvoir utiliser le critère d'irrationalité précédent.

En appliquant n intégrations par partie par rapport à x, on obtient

$$M_n = (-1)^n\int_0^1\int_0^1 \frac{y^n(1-y)^n x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} \neq 0.$$

Dans l'intégrande le terme $\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}$ apparaît en puissance n. D'après le principe du col, il faut trouver le maximum de la fonction $(x,y)\mapsto \frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy}$ définie sur $[0,1]^2 - \{(1,1)\}$. Etudions cette fonction : on montre d'abord que lorsque le produit xy est fixé, le maximum est atteint lorsque $x = y$, pour une raison de symétrie. Si $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, soit $t = \sqrt{xy}$, on a $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $x + y \geqslant 2t$, et alors

$$\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} = \frac{t^2(1-y-x+t^2)}{1-t^2} \leqslant \frac{t^2(1-2t+t^2)}{1-t^2} = \frac{t^2(1-t)}{1+t}.$$

On se ramène donc à une fonction à une variable réelle. Par une étude simple de la dérivée, on sait que cette dernière fonction en t prend son maximum $(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^5$ en $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. En majorant la fonction par son maximum, on a

$$\frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} \leqslant (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^5,$$

ce qui implique que

$$0 < |M_n| \leqslant \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n} \zeta(2).$$

Grâce à l'inégalité précédente, pour n suffisamment grand tel que $d_n < 3^n$, on a la majoration souhaitée :

$$0 < |A_n + B_n\zeta(2)| = d_n^2|M_n| \leqslant d_n^2(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{5n}\zeta(2) < 9^n(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{5n}\zeta(2).$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. D'après le critère d'irrationalité, le nombre $\zeta(2)$ est irrationnel. □

Pour l'irrationalité de $\zeta(3)$, on suit le même schéma de démonstration, en s'intéressant à une autre intégrale :

Théorème 2.3. *Le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel.*

Démonstration. On regarde l'intégrale suivante :

$$N_n = \int_0^1 \int_0^1 -P_n(x)P_n(y)\frac{\log(xy)}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Le développement de $P_n(x)P_n(y)$ en somme des termes en x^ry^s est à coefficients entiers, avec $0 \leqslant r, s \leqslant n$. Donc N_n est la somme des $J_{r,s}$ à coefficients entiers, $0 \leqslant r, s \leqslant n$. D'après la Proposition 2.3, il existe des entiers $(C_n)_{n\geqslant 0}$, $(D_n)_{n\geqslant 0}$ tels que $N_n = \frac{1}{d_n^3}(C_n + D_n\zeta(3))$. On a donc

$$0 < |C_n + D_n\zeta(3)| = d_n^3|N_n|.$$

On cherche donc à montrer que N_n tend vers 0 assez vite pour pouvoir utiliser le critère d'irrationalité.

On remarque que $-\frac{\log(xy)}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}\mathrm{d}z$. On l'applique dans l'expression précédente :

$$N_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Maintenant on applique n intégrations par partie par rapport à x, ce qui donne

$$N_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n z^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Par le changement de variable $z = \frac{1-w}{1-(1-xy)w}$, on obtient :

$$N_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-w)^n P_n(y)}{1-(1-xy)w}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}w.$$

On applique ensuite n fois intégration par partie par rapport à y, ce qui donne :

$$N_n = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n(1-y)^n w^n(1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}w \neq 0.$$

Le terme $\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w}$ apparaît en puissance n dans l'intégrande. D'après le principe du col, il faut trouver la maximum de cette fonction. On remarque la symétrie par rapport à x et à y, et essaie de se ramener au cas $x = y$: pour $0 \leqslant x, y, w \leqslant 1$, notons $t = \sqrt{xy}$, alors $x + y \geqslant 2t$,

$$x(1-x)y(1-y) = t^2(1-x-y+t^2) \leqslant t^2(1-2t+t^2) = t^2(1-t)^2.$$

Et

$$\frac{w(1-w)}{1-(1-xy)w} = \frac{w(1-w)}{1-(1-t^2)w}.$$

On fixe provisoirement t et fait varier w. Pour un t donné, cette fonction en w prend son maximum $\frac{1}{(1+t)^2}$ en $w = \frac{1}{1+t}$. En multipliant les inégalités précédentes on obtient

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \leqslant \frac{t^2(1-t)^2}{(1+t)^2}.$$

Cette dernière fonction est à une variable réelle. Après une étude simple de sa dérivée, on sait qu'elle prend son maximum $(\sqrt{2}-1)^4$ en $t = \sqrt{2}-1$. En majorant la fonction par son maximum on a l'inégalité

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \leqslant (\sqrt{2}-1)^4,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 < |M_n| &\leqslant (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)w} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}w \\ &= (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log(xy)}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité précédente, pour n suffisamment grand tel que $d_n < 3^n$, on a la majoration souhaitée :

$$0 < |C_n + D_n\zeta(3)| = d_n^3 |N_n| \leqslant 2\zeta(3) d_n^3 (\sqrt{2}-1)^{4n} < 2\zeta(3) 27^n (\sqrt{2}-1)^{4n}.$$

Ce dernier terme tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. D'après le critère d'irrationalité, le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel. □

Malheureusement, on n'arrive pas à généraliser directement cette méthode pour démontrer l'irrationalité de $\zeta(5)$, qui reste toujours un mistère, tout comme celles des autres $\zeta(2n+1)$. Pourtant, une généralisation est envisageable, comme nous le verrons dans la Section 4.2 où on remarque que dans l'étude des polylogarithmes, il y a des intégrales qui ressemblent à celles utilisées dans cette section pour la preuve de l'rrationalité de $\zeta(2)$ et de $\zeta(3)$.

3. Critères d'irrationalité et indépendance

3.1. **Critères d'irrationalité.**

Proposition 3.1. *Un nombre réel β est rationnel si et seulement s'il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout couple d'entiers $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\beta \neq \frac{p}{q}$, l'inégalité suivante soit satisfaite :*

$$|\beta - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{1}{qq_0}.$$

Démonstration. Montrons d'abord le sens direct. Si β est rationnel, soit $\beta = \frac{p_0}{q_0}$. Alors $|\beta - \frac{p}{q}| = \frac{|pq_0 - qp_0|}{|qq_0|}$. Si le numérateur est non nul, sa valeur absolue est $\geqslant 1$. D'où $|\beta - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{1}{qq_0}$.

Réciproquement, soit β un nombre irrationnel. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouvons un couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$|\beta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qn}.$$

Pour x un nombre réel, notons $\{x\}$ la partie fractionnaire de x et $[x]$ la partie entière de x, alors $x = \{x\} + [x]$. Considérons la suite $\{\beta\}, \{2\beta\}, \{3\beta\}, \ldots$, qui est à valeurs dans

$[0, 1[$. Cette suite est injective car β est irrationnel. Donc il existe 2 termes distincts dont la distance entre eux est inférieure à $\frac{1}{n}$, i.e. $\exists a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$, $|\{a\beta\} - \{b\beta\}| < \frac{1}{n}$. Et alors

$$|a\beta - b\beta - [a\beta] + [b\beta]| = |\{a\beta\} - \{b\beta\}| < \frac{1}{n}.$$

En posant $q = a - b$ et $p = [a\beta] - [b\beta]$ on obtient $|q\beta - p| < \frac{1}{n}$, donc le couple (p, q) convient.

Par contraposée, s'il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\beta \neq \frac{p}{q}$, on a $|\beta - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{1}{qq_0}$, alors β est rationnel. □

On en déduit le critère d'irrationalité déjà évoqué dans la Section 2.3 :

Corollaire 3.1. *(Critère d'irrationalité d'un nombre réel) Soit x un nombre réel, alors x est irrationnel si et seulement s'il existe deux suites d'entiers $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ telles que $a_n x + b_n \neq 0$ et que $a_n x + b_n \to 0$.*

Corollaire 3.2. *Si β est un nombre réel tel qu'il existe $\delta > 0$ et des suites d'entiers $(p_n)_n$, $(q_n)_n$ telles que $|q_n| \to \infty$ et que $|\beta - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^{1+\delta}}$, alors β est irrationnel.*

A propos de l'approximation d'un nombre réel par des rationnels, on exhibe quelques résultats inéressants ici sans en donner la preuve. La théorie des fractions continues permet tout d'abord de démontrer le résultat suivant, qui donne une approximation par des rationnels $\frac{p}{q}$ avec précision en $\frac{1}{q^2}$:

Théorème 3.1. *Si β est un nombre irrationnel, alors il existe deux suites d'entiers $(p_n)_n$,$(q_n)_n$ telles que $|q_n| \to \infty$ et que*

$$|\beta - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Certes, il existe des nombres réels très bien approchables par des rationnels, par exemple les nombres de Liouville de type $\sum_{i=0}^{+\infty} 10^{-i!}$. Pourtant, dans le théorème précédent, il se trouve que le terme $\frac{1}{q^2}$ ne peut pas être améliorée, comme on va le voir dans le Théorème 3.2.

Définition 3.1. *pour $\epsilon > 0$, on note S_ϵ l'ensemble suivant :*

$$\begin{aligned} S_\epsilon =& \{x \in \mathbb{R} |\text{ il existe 2 suites d'entiers } (p_n)_n, (q_n)_n \text{ telles que } |q_n| \to \infty \\ & \text{et que } |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^{2+\epsilon}}\}. \end{aligned}$$

Alors on a le résultat suivant :

Théorème 3.2. *Pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble S_ϵ est de mesure de Lebesgue nulle.*

i.e., pour tout $\epsilon > 0$ presque aucun nombre réel (au sens de la mesure de Lebesgue) ne peut être approchée par des rationnels $\frac{p}{q}$ avec précision en $\frac{1}{q^{2+\epsilon}}$.

De plus, en ce qui concerne les nombres algébriques, le théorème de Roth donne un résultat plus précis :

Théorème 3.3. *(Roth) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, $\alpha \notin S_\epsilon$*

Voir le mémoire de maîtrise de François-Régis André et Thibault Verron pour plus de détails.

3.2. **Un critère d'indépendance linéaire : le théorème de Nesterenko.**

3.2.1. *Théorème de Nesterenko et corollaire.* Le théorème de Nesterenko est un critère d'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$. Il ressemble par certains aspects aux critères d'irrationalités vus dans la section précédente. Il s'agit ici non pas de savoir si un nombre réel est irrationnel mais de mesurer quantitativement à quel point un vecteur θ de $\mathbb{R}^m$ a ses composantes linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Les hypothèses du théorème de Nesterenko ressemblent donc aux hypothèses des critères d'irrationalités. Il s'agit d'approcher θ par des hyperplans rationnels en contrôlant d'une part la vitesse à laquelle les hyperplans rationnels se rapprochent de θ et d'autre part en s'assurant que ces hyperplans n'explosent pas trop en norme.

Théorème 3.4. [NESTERENKO] *Soient $c, c_1, c_2, \tau, \tau_1, \tau_2 > 0$ des constantes, et soit $\sigma(n)$ une fonction strictement croissante telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(n) = +\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} = 1.$$

Soit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{R}^m$ un vecteur quelconque, et supposons que pour tout $n \geqslant N_0$, il existe une forme linéaire L_n sur $\mathbb{R}^m$ à coefficients entiers telle que :

$$\|L_n\| \leqslant ce^{\tau\sigma(n)} \quad \text{et} \quad c_1 e^{-\tau_1\sigma(n)} \leqslant \|L_n(\theta)\| \leqslant c_2 e^{-\tau_2\sigma(n)}.$$

Alors parmi les nombres $\theta_1, \dots, \theta_m$, il existe au moins $\frac{\tau+\tau_1}{\tau+\tau_1-\tau_2}$ nombres qui sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Nous retiendrons pour la démonstration de l'irrationalité d'une infinité des $\zeta(2n+1)$ la version suivante qui se déduit facilement du théorème précédent en prenant $c_1 = c_2 = 1, \alpha_1 = e^{-\tau_1}, \alpha_2 = e^{-\tau_2}, \beta = e^\tau, c = N, \sigma(n) = n + \mathrm{o}(n)$ et $L_n(\theta) = \sum_{l=0}^N p_{l,n}\theta_l$.

Critère d'indépendance de Nesterenko. *Soient N réels $\theta_1, \dots, \theta_N$. Soient $0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 < 1$ et $\beta > 1$. Supposons que pour tout $n \geqslant N_0$ il existe $(p_{1,n}, \dots, p_{N,n}) \in \mathbb{Z}^N$ satisfaisant la majoration :*

$$|p_{l,n}| \leqslant \beta^{n+o(n)} \qquad {\scriptstyle (l=1,\dots,N)},$$

et l'encadrement

$$\alpha_1^{n+o(n)} \leqslant \|\textstyle\sum_{l=1}^N p_{l,n}\theta_l\| \leqslant \alpha_2^{n+o(n)}.$$

Alors la dimension de l'espace engendré par $\theta_1, \dots, \theta_N$ sur $\mathbb{Q}$ satisfait la minoration explicite :

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\theta_1 + \cdots + \mathbb{Q}\theta_N) \geqslant \frac{\log(\beta) - \log(\alpha_1)}{\log(\beta) - \log(\alpha_1) + \log(\alpha_2)}.$$

3.2.2. *Rappels et lemmes préliminaires.* Nous donnons ici quelques définitions et propriétés qui serviront pour la démonstration du théorème de Nesterenko.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension m, muni du produit scalaire usuel (,).

Définition-Proposition 3.1. *Soient $a_1, \dots, a_r \in E$.*

Alors $\{a_1, \dots, a_r\}$ sont linéairement indépendants si et seulement si le déterminant de Gram $\Delta_r = det\big((a_k, a_l)_{k,l}\big) > 0$.

*On définit alors $V(a_1, ..., a_r) = \sqrt{\Delta_r}$ le **volume** du parallélépipède .*

Si $L = vect(a_1, ..., a_r)$ on a $V(b, a_1, ..., a_r) = \|p_{L^\perp}(b)\| V(a_1, ..., a_r)$.

Si $L_1 \subset L_2$ sont des sous espaces vectoriels de E alors pour tout $\theta \in E$ $\|p_{L_1^\perp}(\theta)\| \geqslant \|p_{L_2^\perp}(\theta)\|$.

Définition-Proposition 3.2. *Un sous espace vectoriel L est dit **rationnel** s'il existe $f_1, \dots, f_r$, des formes linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (ou dans $\mathbb{Q}$) telles que $L = \{x \in E | f_1(x) = ... = f_r(x) = 0\}$.*

Si $\dim L = m - r$, le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel des formes linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$ qui s'annulent sur L est de dimension r. Dans ce cas les vecteurs associés aux formes linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ s'annulant sur L forment alors un réseau ou un $\mathbb{Z}$ module libre. Soit $(a_1, ..., a_r)$ une base de ce réseau qui est aussi une base de $L^\perp$. On définit alors $V(L) = V(a_1, ..., a_r)$, qui ne dépend pas de la base choisie.

Démonstration. La proposition énonce des résultats classiques sur la matrice de Gram $G = (a_k, a_l)_{k,l} = {}^tMM$ où M est la matrice des coordonnées des vecteurs a_i dans la base canonique.

$V(L)$ est bien défini car il est indépendant de la base choisie, en effet les matrices de changement de base sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et ont donc pour déterminant ± 1. □

Lemme 3.1. *Si L et L_1 sont des sous espaces rationnels de E tels que* $\dim L_1 = m - 1$ *et $L \not\subset L_1$. Soit $M = L \cap L_1$. Alors :*

$$V(M) \leqslant V(L)V(L_1)$$

$$V(M)\|p_{M^\perp}(\theta)\| \leqslant V(L)V(L_1)(\|p_{L^\perp}(\theta)\| + \|p_{L_1^\perp}(\theta)\|)$$

Démonstration. Si $\dim L = m - r$. Soit $(a_1, ..., a_r)$ une base du réseau associé à L comme défini dans la Définition 3.2 ci dessus et (b) une base du réseau associé à L_1. $V(L) = V(a_1, ..., a_r)$ et $V(L_1) = \|b\|$. On a alors directement la première inégalité :

$$V(M) = V(b, a_1, ..., a_r) = \|p_L(b)\|V(a_1, ..., a_r) \leqslant \|b\|V(a_1, ..., a_r) = V(L)V(L_1).$$

Comme $V(M) = \|p_L(b)\|V(L)$ et que $V(L_1) = \|b\|$ la deuxième inégalité à démontrer est équivalente à :

$$\|p_L(b)\|\|p_{M^\perp}(\theta)\| \leqslant \|(b)\|(\|p_{L^\perp}(\theta)\| + \|p_{L_1^\perp}(\theta)\|).$$

Posons $\tau = p_{M^\perp}(\theta) \in M^\perp$. Alors $\theta - \tau = p_M(\theta) \in M = L \cap L_1$. Donc $\|p_{M^\perp}(\theta - \tau)\| = (\|p_{L^\perp}(\theta - \tau)\| = \|p_{L_1^\perp}(\theta - \tau)\| = 0$ et on a : $\|p_{M^\perp}(\theta)\| = \|p_{M^\perp}(\tau)\|$, $(\|p_{L^\perp}(\theta)\| = (\|p_{L^\perp}(\tau)\|$ et $\|p_{L_1^\perp}(\theta)\| = \|p_{L_1^\perp}(\tau)\|$. On peut donc se restreindre à $\theta \in M^\perp$.

Quitte à diviser l'inégalité par $\|b\|\|\theta\|$ on peut se restreindre à $\|b\| = \|\theta\| = 1$.

Il suffit alors de démontrer pour $\theta \in M^\perp$:

$$\|p_L(b)\| \leqslant (\|p_{L^\perp}(\theta)\| + \|p_{L_1^\perp}(\theta)\|).$$

Le fait que $\theta \in M^\perp$ et $L^\perp \subset M^\perp$ implique que $p_L(\theta) = \theta - p_{L^\perp}(\theta) \in L \cap M^\perp$.
De même $b \in L_1^\perp \subset M^\perp$ et $L^\perp \subset M^\perp$ implique que $p_L(b) = b - p_{L^\perp}(b) \in L \cap M^\perp$.
Il est facile de montrer que $dimL_1 = m - 1$, $L \not\subset L_1$ et $M = L \cap L_1$ implique que $\dim(L \cap M^\perp) = 1$.
De $p_L(\theta) \in L \cap M^\perp$, $p_L(b) \in L \cap M^\perp$ et $dim(L \cap M^\perp) = 1$ on déduit :

$$\begin{aligned}\|p_L(\theta)\|\|p_L(b)\| &= |(p_L(\theta), p_L(b))| = |(p_L(\theta), b)| = |(\theta, b) - (p_{L^\perp}(\theta), b)| \\ &\leqslant |(\theta, b)| + |(p_{L^\perp}(\theta), b)| = \|p_{L_1^\perp}(\theta)\| + |(p_{L^\perp}(\theta), p_{L^\perp}(b))| \\ &\leqslant \|p_{L_1^\perp}(\theta)\| + \|p_{L^\perp}(\theta)\|\|p_{L^\perp}(b))\|.\end{aligned}$$

De plus $\|p_{L^\perp}(\theta)\|^2 + \|p_{L^\perp}(\theta)\|^2 = \|\theta\| = 1$ d'où :

$$\|p_L(b)\|^2 = (\|p_{L^\perp}(\theta)\|\|p_{L^\perp}(\theta)\|)^2 + (\|p_{L^\perp}(\theta)\|\|p_{L^\perp}(\theta)\|)^2.$$

En utilisant $\|p_L(\theta)\|\|p_L(b)\| \leqslant \|p_{L_1^\perp}(\theta)\| + \|p_{L^\perp}(\theta)\|\|p_{L^\perp}(b))\|$, $\|p_{L^\perp}(b)\|^2 + \|p_{L^\perp}(b)\|^2 = 1$ et $\|p_{L^\perp}(b)\| \leqslant 1$ on déduit de cette égalité :

$$\begin{aligned}\|p_L(b)\|^2 &\leqslant \|p_{L_1^\perp}(\theta)\|^2 + 2\|p_{L_1^\perp}(\theta)\|\|p_{L^\perp}(\theta)\|\|p_{L^\perp}(b)\| + \|p_{L^\perp}(\theta)\| \\ &\leqslant (\|p_{L^\perp}(\theta)\| + \|p_{L_1^\perp}(\theta)\|)^2.\end{aligned}$$

□

3.2.3. *Démonstration.* On va démontrer la proposition suivante qui implique le théorème de Nesterenko.

Proposition 3.2. *Sous les hypothèses du théorème de Nesterenko et $\delta > \tau_1 - \tau_2 \geqslant 0$ on a le résultat suivant :*

Pour tout $r \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant r \leqslant \frac{\tau+\tau_1}{\tau+\delta}$, il existe $\gamma_r > 0$ tel que pour tout espace rationnel $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^m$ avec $dim\mathcal{L} = r$ on ait l'inégalité

$$\|p_{\mathcal{L}^\perp}(\theta)\| \geqslant \gamma_r V(\mathcal{L})^{-\frac{\tau+\tau_1}{\tau+\tau_1-r(\tau+\delta)}}.$$

Démonstration du théorème de Nesterenko

Ce lemme nous permet en effet de conclure. Supposons que r soit le nombre maximal de θ_i linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ parmi $\theta_1, ..., \theta_m$. Il existe alors $m - r$ formes linéaires indépendantes à coefficients rationnels $M_1, ..., M_{m-r}$ qui s'annulent en θ. Soit $\mathcal{L}$ l'espace rationnel défini par $M_1(x) = 0, \ldots, M_{m-r}(x) = 0$. On a $\dim \mathcal{L} = r$, $\theta \in \mathcal{L}$ et donc $p_{\mathcal{L}^\perp}(\theta) = 0$.

On a donc $r \geqslant \frac{\tau+\tau_1}{\tau+\delta}$ car sinon en admettant le lemme on aurait $\|p_{\mathcal{L}^\perp}(\theta)\| > 0$. Ceci est vrai pour tout $\delta > \tau_1 - \tau_2$, on a donc $r \geqslant \frac{\tau+\tau_1}{\tau+\tau_1-\tau_2}$ ce qui fallait obtenir.

Démonstration du lemme

La démonstration se fait par récurrence sur r.

Pour $r = 0$ on a nécessairement $\mathcal{L} = \{0\}$ et donc $V(\mathcal{L}) = 1$ et $\|p_{\mathcal{L}^\perp}(\theta)\| = \|\theta\|$. Donc $\gamma_r = \|\theta\|$ convient.

Supposons $1 \leqslant r \leqslant \frac{\tau+\tau_1}{\tau+\delta}$. Pour tout sous espace rationnel de $\mathbb{R}^m$ de dimension $r - 1$ il existe γ_r tel que l'on a l'inégalité désirée.

Pour simplifier les notations posons $\lambda_k = \frac{\tau+\tau_1}{\tau+\tau_1-k(\tau+\delta)}$.

Raisonnons par l'absurde. Soit $\gamma_r > 0$ quelconque, supposons qu'il existe $\mathcal{L}$ espace rationnel de dimension r tel que :

$$\|p_{\mathcal{L}^\perp}(\theta)\| < \gamma_r V(\mathcal{L})^{-\lambda_r}.$$

On fixe un nombre ϵ qui vérifie

$$0 < \epsilon < \frac{\tau_2 - \tau(\lambda_{r-1} - 1)}{\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}(\tau_1 + \tau)} - 1.$$

Ce qui est possible, il suffit de le vérifier. En effet après calcul et en utilisant $r \leqslant \frac{\tau+\tau_1}{\tau+\delta}$ et $\delta > \tau_1 - \tau_2 \geqslant 0$ on remarque que $0 < \frac{\tau_2-\tau(\lambda_{r-1}-1)}{\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}(\tau_1+\tau)} - 1$. Ce choix pour ϵ est justifié a posteriori à la fin de la preuve.

De plus il existe $N_1 \geqslant N_0$ tel que pour tout $t \geqslant N$,

$$\sigma(t + 1) \leqslant (1 + \epsilon)\sigma(t).$$

Introduisons alors μ tel que

$$\mu e^{\tau_1\sigma(N_1)}\|L_{N_1}\| < 1 \quad \text{et} \quad 2cc_2(c\mu)^{\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}} < \gamma_{r-1},$$

et restreignons-nous au choix de γ_r tel que

$$\gamma_r < c_1\mu,$$

ce qui ne changera en rien la conclusion de la démonstration.

Soit N le plus grand entier vérifiant

$$V(\mathcal{L})^{\lambda_r} \geqslant \mu e^{\tau_1\sigma(N)}\|L_N\|,$$

qui est bien défini car $V(\mathcal{L}) \geqslant 1$, $\mu e^{\tau_1\sigma(N_1)}\|L_{N_1}\| < 1$ et $\lim_{n->\infty}\sigma(n) = +\infty$. On note alors $\mathcal{L}_1$ le sous espace vectoriel rationel défini par l'équation $L_N(x) = 0$. Les diverses hypothèses impliquent alors

$$\|p_{\mathcal{L}_1^\perp}(\theta)\| = \frac{|L_N(\theta)|}{\|L_N\|} \geqslant c_1 e^{-\tau_1\sigma(N)}\|L_N\|^{-1} \geqslant c_1\mu V(\mathcal{L})^{-\lambda_r} > \gamma_r V(\mathcal{L})^{-\lambda_r} > \|p_{\mathcal{L}^\perp}(\theta)\|.$$

Ce qui implique que $\mathcal{L} \not\subset \mathcal{L}_1$ d'après la Définition-Proposition 3.1. On pose donc naturellement $M = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}$ pour pouvoir appliquer le Lemme 3.1 qui donne :

$$\begin{aligned} V(M) &\leqslant V(\mathcal{L})\|L_N\|, \\ V(M)\|p_{M^\perp}(\theta)\| &\leqslant V(\mathcal{L})\|L_N\|(\|p_{\mathcal{L}^\perp}(\theta)\| + \|p_{\mathcal{L}_1^\perp}(\theta)\|) \\ &\leqslant V(\mathcal{L})\|L_N\|2\|p_{\mathcal{L}_1^\perp}(\theta)\| = 2V(\mathcal{L})\|L_N(\theta)\|. \end{aligned}$$

On applique maintenant l'hypothèse de récurrence à M puis les conclusions ci-dessus du Lemme 3.1 :

$$\begin{aligned} \gamma_{r-1} &\leqslant \|p_{M^\perp}(\theta)\|V(M)^{\lambda_{r-1}} \\ &\leqslant 2V(\mathcal{L})\|L_N(\theta)\|V(M)^{\lambda_{r-1}-1} \\ &\leqslant 2V(\mathcal{L})^{\lambda_{r-1}}\|L_N\|^{\lambda_{r-1}-1}\|L_N(\theta)\|. \end{aligned}$$

De plus vu le choix de N et $\|L_{N+1}\| \leqslant ce^{\tau\sigma(N+1)}$ et $\sigma(t+1) \leqslant (1+\epsilon)\sigma(t)$:

$$\begin{aligned} V(\mathcal{L})^{\lambda_r} < \mu e^{\tau_1\sigma(N+1)}\|L_{N+1}\| &\leqslant \mu c e^{(\tau_1+\tau)\sigma(N+1)} \\ &\leqslant \mu c e^{(\tau_1+\tau)(1+\epsilon)\sigma(N)}. \end{aligned}$$

Les deux inégalités précédentes, $\|L_N\| \leqslant ce^{\tau\sigma(N)}$ et $\|L_N(\theta)\| \leqslant c_2 e^{-\tau_2\sigma(N)}$ donnent alors :

$$\gamma_{r-1} \leqslant 2(\mu c)^{\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}} c c_2 e^{\left(\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}(\tau_1+\tau)(1+\epsilon)+\tau(\lambda_{r-1}-1)-\tau_2\right)\sigma(N)}.$$

Puisque $2cc_2(c\mu)^{\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}} < \gamma_{r-1}$ il faut $\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}(\tau_1+\tau)(1+\epsilon)+\tau(\lambda_{r-1}-1)-\tau_2 > 0$. Contradiction.

Donc il existe $\gamma_r > 0$ (et $\gamma_r < c_1\mu$) tel que $\|p_{\mathcal{L}^\perp}(\theta)\| \geqslant \gamma_r V(\mathcal{L})^{-\lambda_r}$. La récurence est établie. $\square$

Cette démonstration est la preuve originale de Nesterenko, nous l'avons adapté à un cas un tout petit peu plus général.

4. IRRATIONALITÉ D'UNE INFINITÉ DE $\zeta(2n+1)$ ET TRANSCENDANCE DE π

4.1. **Théorèmes.** Nous allons dans cette partie démontrer plusieurs théorèmes qui sont l'aboutissement de ce mémoire.

Théorème 4.1. *Soit a un entier impair $\geqslant 3$. Soit $\delta(a)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}$ par $1, \zeta(3), \zeta(5), ..., \zeta(a)$. Alors*

$$\delta(a) \geqslant \frac{1}{3}\log(a) \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Donc la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les $\zeta(2n+1)$ est infinie. En particulier, une infinité parmi les nombres $\zeta(2n+1)$ sont irrationnels.

Théorème 4.2. *La dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les $\zeta(2n)$ est infini. En particulier, comme on a $\zeta(2n) \in \pi^{2n}\mathbb{Q}$, π, ainsi que les $\zeta(2n)$, sont transcendants.*

4.2. **Polylogarithmes.** Les fonctions polylogarithmes sont définies pour $s \in \mathbb{N}^*$ et pour $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| \leqslant 1$ et $(s,z) \neq (1,1)$ par

$$Li_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}.$$

En particulier $Li_s(1) = \zeta(s)$.

L'objectif est de trouver des relations linéaires entre les $Li_s(z)$ qui, appliquées en $z = 1$ permettront d'appliquer le théorème de Nesterenko.

Pour la suite, on emploie le *symbole de Pochhammer* : pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \geqslant 0$ un entier, on note $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)...(\alpha+k+1)$.

On définit

$$R_n(X) = \frac{A_n(X)}{X^a(X+1)^a...(X+n)^a} \in \mathbb{Q}(X),$$

où $A_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$ et $deg(A_n) \leqslant a(n+1) - 2$.

Décomposons $R_n(X)$ en éléments simples :

$$R_n(X) = \sum_{l=1}^{a} \sum_{j=0}^{n} \frac{c_{l,j,n}}{(X+j)^l}.$$

On définit alors S_n et les $P_{l,n}$ comme

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} R_n(k) z^{-k},$$

$$P_{l,n}(X) = \sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} X^j,$$

et

$$P_{0,n}(X) = -\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=1}^{j} \frac{X^{j-k}}{k^l}.$$

On prendra pour la suite pour les besoins de la démonstration

$$A_n(X) = n!^{a-2r}(X-rn)_{rn}(X+n+1)_{rn},$$

où $a \geqslant 2$ est un entier, $1 \leqslant r \leqslant \frac{a}{2}$. Un tel choix sera justifié plus tard.

Proposition 4.1. *i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant 1$ et $z \neq 1$, on a*

$$S_n(z) = P_{0,n}(z) + \sum_{l=1}^{a} P_{l,n}(z)Li_l(\frac{1}{z}).$$

De plus $S_n(1)$ converge, $P_{1,n}(1) = 0$ et pour tout $l \in \{1, ..., a\}$, $z^n P_{l,n}(\frac{1}{z}) = (-1)^{a(n+1)+l} P_{l,n}(z)$

ii) La limite $\lim_{n\to\infty} |S_n(1)|$ existe, et vérifie

$$0 < \lim_{n\to\infty} |S_n(1)|^{\frac{1}{n}} \leqslant 2^{r+1}r^{2r+1}.$$

iii) Pour tout $l \in \{1, ..., a\}$ on a $d_n^a P_{l,n}(1) \in \mathbb{Z}$, et

$$\limsup_{n\to\infty} |P_{l,n}(1)|^{\frac{1}{n}} \leqslant 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}.$$

Démonstration. i) Comme $R_n(X) = \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} \frac{c_{l,j,n}}{(X+j)^l}$, on a

$$S_n(z) = \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{(k+j)^l} = \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n} z^j \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k^l} - \sum_{k=1}^{j} \frac{z^{-k}}{k^l}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{a} Li_l(\frac{1}{z}) \sum_{j=0}^{n} c_{l,n,j} z^j - \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,n,j} \sum_{k=1}^{j} \frac{z^{-k}}{k^l} = P_{0,n}(z) + \sum_{l=1}^{a} P_{l,n}(z) Li_l(\frac{1}{z}).$$

Comme $1 \leqslant r \leqslant \frac{a}{2}$, la série $S_n(1)$ est convergente alors que le terme $P_{l,n}(z)Li_1(\frac{1}{z}) = -P_{1,n}(z)\log(1-\frac{1}{z})$ est le seul qui peut diverger en $z = 1$: cela implique nécessairement que le polynôme $P_{1,n}(z)$ s'annule en 1.

L'identité $(\alpha)_k = (-1)^k(-\alpha-k+1)_k$ implique la relation $R_n(-X-n) = (-1)^{a(n+1)} R_n(X)$. Comme

$$R_n(-X-n) = \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} \frac{c_{l,j,n}}{(-X+j-l)^l} = \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} (-1)^l \frac{c_{l,n-j,n}}{(X+j)^l},$$

par unicité de la décomposition en élément simple, on en déduit que $c_{l,n-j,n} = (-1)^{a(n+1)+l} c_{l,n,j}$, et alors $z^n P_{l,n}(\frac{1}{z}) = (-1)^{a(n+1)+l} P_{l,n}(z)$.

ii) On admet [2] que $S_n(1)$ peut s'exprimer sous une forme intégrale similaire à celle de M_n et N_n dans la Section 2.3 : pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$S_n(1) = \frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}} \int_{[0,1]^{a+1}} \frac{\prod_{j=1}^{a+1} x_j^{rn}(1-x_j)^n \mathrm{d}x_j}{(1-x_1\dots x_{a+1})^{(2r+1)n+2}}.$$

La formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ implique :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{((2r+1)n+1)!}{n!^{2r+1}}\right)^{\frac{1}{n}} = (2r+1)^{2r+1}.$$

En notant

$$I_n = \int_{[0,1]^{a+1}} \frac{\prod_{j=1}^{a+1} x_j^{rn}(1-x_j)^n \mathrm{d}x_j}{(1-x_1\dots x_{a+1})^{(2r+1)n+2}},$$

d'après le principe du col,

$$\lim_{n\to+\infty} (I_n)^{\frac{1}{n}} = \max_{(x_1,\dots,x_{a+1})\in[0,1]^{a+1}} \left(\frac{\prod_{j=1}^{a+1} x_j^{r}(1-x_j)}{(1-x_1\dots x_{a+1})^{2r+1}}\right) \neq 0.$$

L'existence de la limite de $|S_n(1)|^{\frac{1}{n}}$ en découle.

Maintenant pour les $x_i \in [0,1]$, étudions la fonction

$$F(x_1,\dots,x_{a+1}) = \frac{\prod_{j=1}^{a+1} x_j^{r}(1-x_j)}{(1-x_1\dots x_{a+1})^{2r+1}}.$$

Soit $s = (x_1\dots x_{a+1})^{\frac{1}{a+1}}$ la moyenne géométrique des x_j. La fonction $x \mapsto \log(1-e^x)$ étant concave sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, l'inégalité de Jensen montre que :

$$\prod_{j=1}^{a+1} (1-x_j) \leqslant (1-s)^{a+1}.$$

Et donc

$$F(x_1,\dots,x_{a+1}) \leqslant \frac{s^{r(a+1)}(1-s)^{a+1}}{(1-s^{a+1})^{2r+1}},$$

avec l'égalité lorsque les x_j sont tous égaux.

Par l'étude d'une fonction à une variable réel, on sait que le maximum de la fonction $G(s) = \frac{s^{r(a+1)}(1-s)^{a+1}}{(1-s^{a+1})^{2r+1}}$ définie sur $[0,1]$ est atteint pour la valeur de $s = s_0$, où s_0 est

2. Voir [Ball-Rivoal] pour la démonstration.

l'unique zéro dans $]0,1[$ du polynôme $rx^{a+2}-(r+1)x^{a+1}+(r+1)x-r$, et alors on a $s_0^{a+1}=\frac{(r+1)s_0-r}{r+1-rs_0}$. On en déduit l'encadrement $\frac{r}{r+1}<s_0<1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}|S_n(1)|^{\frac{1}{n}} &= (2r+1)^{2r+1}\frac{s^{r(a+1)}(1-s)^{a+1}}{(1-s^{a+1})^{2r+1}}\\ &= ((r+1)s_0-r)^r(r+1-rs_0)^{r+1}(1-s_0)^{a-2r}\\ &\leqslant \frac{(2r+1)^{2r+1}}{(r+1)^{a-r+1}}\leqslant\frac{(2r+2)^{2r+1}}{(r+1)^{a-r+1}}\leqslant\frac{2^{r+1}}{r^{a-2r}},\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

iii) On distingue 2 cas : $l=0$ ou $l\in\{1,\ldots,a\}$.

Si $l\in\{1,\ldots,a\}$, il suffit de majorer les coefficients $c_{l,j,n}$ puisque $P_{l,n}(1)=\sum_{j=0}^n c_{l,j,n}$. Pour cela on utilise la formule de Cauchy :

$$c_{l,j,n}=\frac{1}{2i\pi}\int_{|z+j+1|=\frac{1}{2}}R_n(z)(z+j+1)^{l-1}\mathrm{d}z,$$

où $|z+j+1|=\frac{1}{2}$ désigne le cercle de centre $-j-1$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Sur ce cercle, on a

$$\begin{aligned}|(z-rn+1)_{rn}| &\leqslant (j+2)_{rn},\\ |(z+n+2)_{rn}| &\leqslant (n-j+2)_{rn},\\ |(z+1)_{n+1}| &\geqslant \frac{1}{2^3}(j-1)!(n-j-1)!.\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}|c_{l,j,n}| &\leqslant \frac{(rn+j+1)!}{(j+1)!(j!(n-j)!)^r}\cdot\frac{((r+1)n-j+1)!}{(n-j+1)!(j!(n-j)!)^r}\\ &\quad\cdot\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)^{a-2r}\cdot(j(n-j))^a8^a\\ &\leqslant (2r+1)^{(2r+1)n+2}2^{(a-2r)n}(2n^2)^a.\end{aligned}$$

On a les majorations suivantes des coefficients multinômiaux :

$$\frac{(rn+j+1)!}{(j+1)!(j!(n-j)!)^r}\leqslant(2r+1)^{rn+j+1},$$

et

$$\frac{((r+1)n-j+1)!}{(n-j+1)!(j!(n-j)!)^r}\leqslant(2r+1)^{(r+1)n-j+1}.$$

On a donc

$$\limsup_{n\to+\infty}|P_{l,n}(1)|^{\frac{1}{n}}\leqslant 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}.$$

Si $l=0$, on a l'expression

$$P_{0,n}(1) = -\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n}\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{(k+1)^l}.$$

Comme

$$\sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{(k+1)^l} \leqslant \sum_{k=0}^{j-1}\frac{1}{k+1} \leqslant j \leqslant n,$$

on a bien là aussi

$$\limsup_{n\to+\infty} |P_{0,n}(1)|^{\frac{1}{n}} \leqslant 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1}.$$

On admet ici le fait que pour tout $l \in \{1,\dots,a\}$, $d_n^a P_{l,n}(1) \in \mathbb{Z}$. Voir Annexe B pour la démonstration.

□

4.3. **Démonstration.** Commençons par démontrer le premier des deux théorèmes. Le deuxième aura une démonstration tout à fait similaire.

On cherche donc des relations linéaires entre 1 et les $\zeta(2n+1)$ afin d'appliquer Nesterenko.

On suppose a impair et $n=2m$ pair. Donc le (i) de la Proposition 4.1 implique que $P_{l,n}(1)=0$ pour $l \geqslant 2$ pair. De plus $\lim_{n\to\infty} P_{1,n}(z)Li_1(\frac{1}{z}) = 0$. On a par (i), en prolongeant par continuité en 1 et avec $p_{l,m} = d_{2m}^a P_{l,2m}(1) \in \mathbb{Z}$

$$L_m = d_{2m}^a S_{2m}(1) = p_{0,m} + p_{3,m}\zeta(3) + \dots + p_{a,m}\zeta(a).$$

Donc d'après (ii) et (iii) il existe N_0, tel que pour tout $n \geqslant N_0$,

$$|L_n| = \alpha^{(m+o(m))} \leqslant (e^a 2^{r+1} r^{2r+1})^{2(m+o(m))},$$

$$|p_{l,m}| \leqslant (e^a 2^{a-2r}(2r+1)^{2r+1})^{2(m+o(m))} = \beta^{(m+o(m))}.$$

On choisit alors $r = [\frac{a}{\log^2(a)}]$ et on vérifie que $0<\alpha<1$ et $\beta>1$. (On a $0<\alpha\leqslant e^{-2(1+o(1))a\log(a)}$ et $\beta = e^{(1+\log(2))a+o(a)}$).

On peut alors appliquer le critère de Nesterenko et on a après calculs

$$\delta(a) \geqslant 1 - \frac{\log(\alpha)}{\log(\beta)} \geqslant \frac{1+o(1)}{1+\log(2)}\log(a) \geqslant \frac{1}{3}\log(a)$$

d'où le Théorème 4.1.

Pour le Théorème 4.2, la même méthode s'applique aux $\zeta(2n)$ en choisissant a pair. On a alors cette fois ci $S_n(1)$ est une combinaisons linéaire de ζ pairs. On montre de même que la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les $\zeta(2n)$ est infinie. Comme $\zeta(2n) \in \pi^{2n}\mathbb{Q}$, on en déduit que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}[\pi]$ est de dimension infinie.On vient donc de redémontrer la transcendance de π, et par conséquent les $\zeta(2n)$ sont tous transcendants et linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

5. Perspectives

Les résultats actuellement connus sur la nature diophantienne des nombres $\zeta(2n+1)$ sont assez pauvres. Pendant ces dernières années, le développement dans la théorie des séries polyzêtas, qui est en fait un contexte plus général dans lequel se placent ces résultats, permet d'approfondir les connaissances là-dessus. Les séries polyzêtas sont définies, pour des entiers positifs $s_1 \geqslant 2$ et $s_i \geqslant 1$ par

$$\zeta(\underline{s}) = \zeta(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geqslant 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}}.$$

L'entier $s_1 + s_2 + \cdots + s_k$ est le *poids* de $\zeta(\underline{s})$. Ces séries apparaissent naturellement quand on considère les produits des valeurs de la fonction zêta : par exemple on a $\zeta(n)\zeta(m) = \zeta(n+m) + \zeta(n,m) + \zeta(m,n)$, ce qui permet en quelque sorte de "linéariser" ces produits. Il existe une riche structure algébrique associée aux polyzêtas (Voir [Colmez]). On s'est en particulier intéressé aux $\mathbb{Q}$-sous espaces vectoriels Z_p de $\mathbb{R}$, où Z_p est engendré par les 2^{p-2} polyzêtas de poids p, avec $p \geqslant 2$:

$$Z_2 = \mathbb{Q}\zeta(2),$$

$$Z_3 = \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}\zeta(2,1),$$

$$Z_4 = \mathbb{Q}\zeta(4) + \mathbb{Q}\zeta(3,1) + \mathbb{Q}\zeta(2,2) + \mathbb{Q}\zeta(2,1,1),$$

et ainsi la suite. Posons $v_p = \dim_{\mathbb{Q}}(Z_p)$, et on a la conjecture suivante :

Conjecture 5.1. *i) (Zagier) Pour tout entier $p \geqslant 2$, on a $v_p = c_p$, où l'entier c_p est défini par la récurrence linéaire homogène $c_{p+3} = c_{p+1} + c_p$, avec conditions initiales $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$.*
ii) Les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels Z_p, $p \geqslant 2$, sont en somme directe.

Un théorème de Terasoma affirme que $v_p \leqslant c_p$ pour tout $p \geqslant 2$. Par contre aucune minoration non triviale de v_p n'est connue à ce jour : par exemple l'égalité $v_5 = 2$ est équivalente à l'irrationalité du nombre $\frac{\zeta(5)}{\zeta(2)\zeta(3)}$, qui est actuellement encore ouverte. On peut alors voir que cette conjecture est naturellement liée à la Conjecture 1.1 dans l'introduction et qu'elle pourrait aider à comprendre la nature arithmétique des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs.

ANNEXE A. ÉTUDE LA FONCTION θ

On se rappelle que la fonction θ est définie pour un réel $t > 0$ par

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2},$$

série qui est absolument convergente.

On se propose de montrer l'équation fonctionnelle suivante :

Proposition A.1. *Pour tout réel $t > 0$, la fonction θ vérifie l'équation fonctionnelle :*

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta(\frac{1}{t}).$$

Démonstration. Un résultat classique donne, pour $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2 - 2i\pi xy}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi y^2}{t}}.$$

(On étudie la fonction $z \mapsto f(z) = e^{-\pi t z^2}$ dans le plan complexe. Pour calculer l'intégrale à gauche on se ramène à intégrer f suivant une droite horizontale orientée vers la droite, et le théorème de Cauchy permet de montrer qu'elle est égale à l'intégrale de f suivant l'axe réel orienté vers la droite, puis on conclut sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}$.)

Soit $\phi(x) = e^{-\pi t x^2}$. Alors la transformée de Fourier de la fonction ϕ est :

$$\hat{\phi}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)e^{-2i\pi yx}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi y^2}{t}}.$$

ϕ est une fonction à décroissance rapide à l'infini, on a donc la formule sommatoire de Poisson :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}(n).$$

D'où :

$$\theta(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\pi n^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta(\frac{1}{t}),$$

ce qui achève la preuve. □

ANNEXE B. DÉMONSTRATION DU FAIT $d_n^a P_{l,n}(1) \in \mathbb{Z}$

On garde les notations dans la Section 4.2. On se propose de montrer le résultat suivant :

Proposition B.1. *Pour tout $l \in \{0,\dots,a\}$, $d_n^a P_{l,n}(1) \in \mathbb{Z}$.*

On va en fait montrer la proposition suivante plus forte, dont la proposition précédente est une conséquence :

Proposition B.2. *Pour tout $l \in \{0,\dots,a\}$, $d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.*

Démonstration. L'évaluation du dénominateur des coefficients $c_{l,j,n}$ repose sur une réécriture de $R_n(t)$. Fixons les entiers n et j. On décompose alors le numérateur de $R_n(t)$ en $2r$ prosuits de n facteurs consécutifs :

$$R_n(t)(t+j+1)^a = \Big(\prod_{l=1}^{r} F_l(t)\Big) \cdot \Big(\prod_{l=1}^{r} G_l(t)\Big) \cdot H(t)^{a-2r},$$

où pour $l \in \{1, \dots, a\}$,

$$F_l(t) = \frac{(t-nl+1)_n}{(t+1)_{n+1}}(t+j+1),$$

$$G_l(t) = \frac{(t+nl+2)_n}{(t+1)_{n+1}}(t+j+1),$$

$$H(t) = \frac{n!}{(t+1)_{n+1}}(t+j+1).$$

Décomposons $F_l(t)$, $G_l(t)$ et $H(t)$ en fractions partielles :

$$F_l(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)f_{p,l}}{t+p+1},$$

$$G_l(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)g_{p,l}}{t+p+1},$$

$$H(t) = \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)h_p}{t+p+1}.$$

où

$$\begin{aligned} f_{p,l} &= \frac{(-p-nl)_n}{\prod_{\substack{h=0\\h\neq p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^n((l-1)n+p+1)_n}{(-1)^p p!(n-p)!} \\ &= (-1)^{n-p}\begin{pmatrix} nl+p \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}, \\ g_{p,l} &= \frac{(-p+nl+1)_n}{\prod_{\substack{h=0\\h\neq p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^p((l+1)n-p)!}{(nl-p)!p!(n-p)!} \\ &= (-1)^{n-p}\begin{pmatrix} n(l+1)-p \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

et

$$h_p = \frac{n!}{\prod_{\substack{h=0\\h\neq p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^p n!}{p!(n-p)!} = (-1)^p \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}.$$

Pour tout entier $\lambda \geqslant 0$, on note $D_\lambda = \frac{1}{\lambda!}\frac{\mathrm{d}^\lambda}{\mathrm{d}t^\lambda}$, et on a alors :

$$(D_\lambda F_l(t))_{|t=-j-1} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{(j-p)f_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}},$$

$$(D_\lambda G_l(t))_{|t=-j-1} = \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{(j-p)g_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}},$$

$$(D_\lambda H(t))_{|t=-j-1} = \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} (-1)^\lambda \frac{(j-p)h_p}{(p-j)^{\lambda+1}},$$

avec $\delta_{0,\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = 0 \\ 0 & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}.$

On a donc montré que $d_n^\lambda (D_\lambda F_l(t))_{|t=-j-1}$, $d_n^\lambda (D_\lambda G_l(t))_{|t=-j-1}$, $d_n^\lambda (D_\lambda H(t))_{|t=-j-1}$ sont des entiers pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$. En vertu de la formule de Leibniz

$$D_{a-l}(R(t)(t+j+1)^a) = \sum_{\substack{(\mu_1,\dots,\mu_a)\in\mathbb{N}^a\\ \mu_1+\dots+\mu_a=a-l}} (D_{\mu_1}F_1)\dots(D_{\mu_r}F_r)(D_{\mu_{r+1}}G_1)\dots(D_{\mu_{2r}}G_r)(D_{\mu_{2r+1}}H)\dots(D_{\mu_a}H),$$

on en déduit que $d_n^{a-l}c_{l,j,n} \in \mathbb{Z}$ et donc $d_n^{a-l}P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$. □

RÉFÉRENCES

[Apéry] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Astéristique **61** (1979), 11–13

[Ball-Rivoal] K. Ball et T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. **146.**1 (2001), 193–207. MR1859021 (2003a :11086)

[Beukers1] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London. Math. Soc. **11**, no. 33, 268–272 (1978).

[Beukers2] F. Beukers, *The values of Polylogarithms*, "Topics in classical number theory", Vol. I, II (Budapest, 1981), 219–228, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 34, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[Colmez] P. Colmez, *Arithmétique de la fonction zêta*, in *La fonction zêta*, Edition Éc. Polytech. , 2003 , 37–164. www.math.polytechnique.fr/xups/xups02-02.pdf

[Gutnik] L.A. Gutnik, *The irrationality of certains quantities involving* $\zeta(3)$, Russ. Math. Surv. **34**, no. 3, 200 (1979). En russe dans Acta Arith. **42**, no. 3, 255–264(1983)

[Nesterenko] Yu. V. Nesterenko, *On the linear independence of numbers*, Versnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., (1985), 46–49, 108.

[Rivoal] T. Rivoal, *Valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann*, survol pour la revue Quadrature (2003), www-fourier.ujf-grenoble.fr/$\sim$rivoal/articles/quaddefi.pdf

[Van der Poorten] A. Van der Poorten, *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intellig. **1** (1979), 195–203

[Waldschmidt] M. Waldschmidt, *Valeurs zêtas multiples. Une introduction*, J. Théor. Nombres de Bordeaux **12**(2000),581–595

[Zagier] D. Zagier *Neuman's short proof of the Prime Number Theorem*, Amer. Math. Monthly, Vol.**104** (1997), no. 8, 705–708

[Zudilin] W. Zudilin *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values*, J. Théor. Nombres de Bordeaux **16** (2004), no. 1, 251–291.