INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE

JIN FANGZHOU

Sous la direction de Frédéric Déglise

RÉSUMÉ. La théorie de motifs est un vaste domaine de mathématiques très étudié qui, dans le language de la géométrie algébrique, travaille sur aussi bien des questions géométriques que des questions arithmétiques. Le terme "motif" désigne l'idée d'un élément constitutif : la motivation de cette théorie est de chercher à établir un cadre dans lequel on peut donner un sens à une cohomologie "universelle". On a dans un premier temps la notion de motifs purs, puis celle de motifs mixtes qui généralise cette dernière ; dans les deux cas la théorie reste incomplète, à cause de plusieurs obstructions majeures bien connues.

TABLE DES MATIÈRES

Notations : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. On note $\mathcal{C}^{op}$ la catégorie opposée, et pour tout X, Y objets de $\mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ l'ensemble des morphismes de X vers Y dans $\mathcal{C}$.

Date: 26-10-2012.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive et R un anneau, on note $\mathcal{C}_R$ la catégorie avec les mêmes objets que $\mathcal{C}$, telle que pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}_R}(A,B) = Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \otimes_{\mathbb{Z}} R$, où l'ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ est vu comme un groupe abélien (i.e. $\mathbb{Z}$-module). On a souvent besoin de tensoriser par un corps car un certain nombre d'énoncés ne sont vrais que dans ce cas.

Dans ce mémoire on note k un corps de base, et les schémas sont définis sur k.

1. Introduction : phénomènes de cohomologie

La théorie de motifs, initiée par les travaux de Grothendieck dans les années 1960, englobe l'étude sur des questions profondes provenant de divers domaines de mathématiques tels que les représentations galoisiennes, la géométrie énumérative, la géométrie arithmétique et la théorie de Hodge. L'idée naïve provient des formules élémentaires de type

- [point]
- [la droite projective]=[point]+[la droite affine]
- [le plan projectif]=[point]+[la droite affine]+[le plan affine]

données par des stratifications des variétés ; c'est en quelque sorte un projet de linéarisation de la géométrie algébrique, tâche trop difficile pour qu'une théorie puisse émerger à l'époque de la naissance de la géométrie algébrique.

Cette idée de motif s'est beaucoup plus développée au cours de la recherche d'une unification des différentes théories de cohomologie, établies par diverses voies avec des méthodes topologiques. Supposons par exemple que k est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et X un schéma projectif lisse sur k, on a les théories de cohomologie suivantes bien connues :

- la cohomologie de de Rham algébrique $H^i_{\mathrm{dR}}(X) = \mathbb{H}^i(\Omega^*_{X/k})$
- la cohomologie de Betti à coefficients rationnels $H^i_{\mathrm{B}}(X) = H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$
- la cohomologie étale l-adique $H^i_l(X) = H^i_{\text{ét}}(X \times \bar{k}, \mathbb{Q}_l)$, où l est un nombre premier et $\bar{k}$ la clôture algébrique de k dans $\mathbb{C}$

On connaît plusieurs isomorphismes de comparaison entre ces différents groupes de cohomologie : par exemple on a l'application des périodes $H^i_{\mathrm{dR}}(X) \otimes \mathbb{C} \to H^i_{\mathrm{B}}(X) \otimes \mathbb{C}$ qui est un isomorphisme ; on a aussi un isomorphisme de comparaison $H^i_l(X) \simeq H^i_{\mathrm{B}}(X, \mathbb{Q}_l)$. Ces isomorphismes montrent en particulier que ces groupes de cohomologie sont de même dimension. [1]

Plus généralement, d'après les idées de Weil, on a une axiomatisation de la notion de cohomologie, qui est valable pour n'importe quelle caractéristique : les cohomologies de de Rham, Betti et l-adique sont en particulier des cohomologies de Weil, dites "classiques". Par les isomorphismes de comparaison, on pourrait prétendre l'existence d'une

1. Notons que ce résultat reste vrai en caractéristique non nulle, ce qui est une conséquence de la démonstration des conjectures de Weil par Deligne.

théorie de nature purement algébrique, telle que toutes les cohomologies de Weil puissent en être déduites comme différentes réalisations, chacune dans son cadre approprié. Cette partie de la cohomologie algébrique constitue l'idée centrale de la théorie motivique chez Grothendieck.

Voici un résumé des éléments qui seront abordés dans ce mémoire. Dans le Chapitre 2 on discute sur les cycles algébriques et les relations d'équivalence là-dessus. Le Chapitre 3 est consacré à la théorie des motifs purs, laquelle étudie les cohomologie sur les schémas projectifs lisses. On présentera la construction de la catégorie de motifs purs et les questions autour. Enfin, dans le Chapitre 4, on verra la théorie des motifs mixtes, qui cherche à généraliser les motifs purs à tous les schémas de type fini, et on introduira la catégorie de Voevodsky, qui fournit un cadre convenable pour travailler avec les les motifs mixtes.

2. Autour des cycles algébriques

2.1. **Les cycles algébriques et la théorie de l'intersection.**

Un cycle algébrique sur un schéma X est une classe de cohomologie représentée par une combinaison linéaire de sous-schémas fermés de X. En homologie singulière on a une déscription par le cup-produit, et en théorie de motifs on a une définition adaptée, selon laquelle les cycles algébriques sont les objets concrets fortement liés à la nature algébrique d'une variété algébrique.

On fixe k un corps de base. On note $\mathcal{P}(k)$ la catégorie des k-schémas projectifs lisses, et les morphismes sont les morphismes de schémas propres lisses. Pour tout $X \in \mathcal{P}(k)$, on note $Z^i(X)$ le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres de X de codimension i.[2] Les éléments de $Z^i(X)$ s'appellent les **cycles algébriques** de X de codimension i. On note $Z(X) = \oplus_i Z^i(X)$ le groupe abélien total gradué.

Soit maintenant $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{P}(k)$. Comme on a supposé que f est propre et lisse, on a une application du "push-forward" $f_* : Z(X) \to Z(Y)$, et une application du "pull-back" $f^* : Z(Y) \to Z(X)$ bien définies.

La théorie de l'intersection, comme son nom l'indique, étudie l'intersection de sous-variétés d'une variété donnée. Plus précisément, le produit d'intersection est défini comme une application bilinéaire interne sur les cycles algébriques

$$\begin{aligned} Z(X) \times Z(X) &\to Z(X) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha \cdot \beta, \end{aligned}$$

qui est bien définie si les composantes des cycles se coupent proprement.[3] Cette loi possède un certain nombre de propriétés, par exemple si α et β sont respectivement des

2. Notons qu'on a une bijection entre les points de X et les sous-schémas fermés intègres de X.

3. Deux sous-schémas fermés intègres de X se coupent proprement si la codimension de leur intersection est égale à la somme de leurs codimensions. Cette notion se générallise à tous les cycles algébriques par linéarité.

combinaisons linéaires des classes des sous-schémas fermés intègres $[U_m]$ et $[V_n]$, alors le cycle $\alpha \cdot \beta$ est une combinaison linéaire, avec des multiplicités, des composantes irréductibles des intersections de la forme $U_m \cup V_n$. En particulier, si $\alpha \in Z^i(X)$ et $\beta \in Z^j(X)$, alors $\alpha \cdot \beta \in Z^{i+j}(X)$.

2.2. **L'équivalence rationnelle et l'équivalence numérique.**

On se propose d'introduire ici deux relations d'équivalence sur les cycles algébriques.

On a d'abord la notion d'**équivalence rationnelle** : soit X un k-schéma de type fini. Pour tout W sous-schéma fermé de X de codimension i, et pour $r \in R(W)^*$ fonction rationnelle sur W, on peut définir le diviseur de r, $div(r)$, qui est un élément de $Z^1(W)$, lequel s'envoie dans $Z^{i+1}(X)$. On définit $Rat^{i+1}(X)$ comme le sous-groupe abélien de $Z^{i+1}(X)$ engendré par les éléments de la forme $div(r)$, pour W sous-schéma fermé de X de codimension i et $r \in R(W)^*$. On note $Rat^0(X) = 0$ par convention.

On définit $Rat(X) = \oplus Rat^i(X)$ le groupe abélien total.[4] Pour $\alpha, \beta \in Z(X)$ deux cycles algébriques, on dit qu'ils sont rationnellement équivalents, noté $\alpha \sim_{\text{rat}} \beta$, si leur différence appartient à $Rat(X)$. C'est une relation d'équivalence sur les cycles algébriques, compatible avec la structure du groupe abélien gradué de $Z(X)$. On note $CH^i(X) = Z^i(X)/ \sim_{\text{rat}}$, le i-ième groupe de Chow.

On a aussi la notion d'**équivalence numérique** : notons d'abord que $Z^{dim\ X}(X)$ est le groupe abélien engendré par les points fermés de X.[5] Le degré d'un point fermé de X est défini comme le degré d'extension de son corps résiduel sur le corps k, ce qui permet de définir un morphisme de groupes abéliens $deg : Z^{dim\ X}(X) \to \mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}$-linéarité. Maintenant on dit qu'un cycle $\alpha \in Z^i(X)$ est numériquement équivalent à 0 si pour tout $\beta \in Z^{dim\ X-i}(X)$, le produit d'intersection $\alpha \cdot \beta$, bien défini comme un élément de $Z^{dim\ X}(X)$, est de degré 0. Par linéarité, on voit que cela définit une relation d'équivalence $\sim_{\text{num}}$ sur $Z(X)$ entier, toujours compatible avec la structure du groupe abélien gradué de $Z(X)$.

On peut montrer que l'équivalence rationnelle est plus fine que l'équivalence numérique, au sens où pour tout cycle $\alpha \in Z(X)$, la condition $\alpha \sim_{\text{rat}} = 0$ implique que $\alpha \sim_{\text{num}} = 0$. Une conjecture prédit que ces deux équivalences coïncident si k est un corps fini. On sait que ceci n'arrive jamais en caractéristique 0.[6]

---

4. De manière équivalente le groupe $Rat(X)$ est le sous-groupe de $Z(X)$ engendré par des éléments de la forme $W(0) - W(\infty)$, où W est un sous-schéma intègre de $X \times \mathbb{P}^1$ plat et dominant sur $\mathbb{P}^1$, et $W(0)$, $W(\infty)$ sont les fibres du morphisme $W \to \mathbb{P}^1$ au-dessus des points 0 et ∞.

5. Ici on utilise un abus de notation : lorsque X n'est pas équidimensionnel, il faut voir $dim\ X$ comme une fonction localement constante sur X, puis prendre le groupe $\oplus_i Z^{dim\ X_i}(X)$, où les X_i sont les composantes connexes de X. On prend cette convention pour toute la suite.

6. Plus généralement on a la notion de relation d'équivalence adéquate. A part l'équivalence rationnelle et l'équivalence numérique, l'équivalence algébrique $\sim_{\text{alg}}$ et les équivalences homologiques $\sim_{\text{hom}}$ sont des équivalences adéquates bien connues. L'équivalence rationnelle est la plus fine des équivalences adéquates,

3. CATÉGORIE DES MOTIFS PURS

La catégorie des motifs purs se construit à partir de la catégorie $\mathcal{P}(k)$ via les étapes suivantes : on construit d'abord la catégorie des correspondances, en élargissant les morphismes dans $\mathcal{P}(k)$; on prend ensuite l'enveloppe pseudo-abélienne de cette catégorie des correspondances pour obtenir la catégorie des motifs purs effectifs ; enfin on inverse le motif de Lefschetz pour construire la catégorie des motifs purs. Comme on le verra, la catégorie obtenue n'est toujours pas très loin de la catégorie $\mathcal{P}(k)$. La construction dépendant du choix d'une relation d'équivalence $\sim$ sur les cycles algébriques, on traitera le cas de $\sim_{\mathrm{rat}}$, le cas de $\sim_{\mathrm{num}}$ étant similaire. Après la construction, on verra les différentes propriétés de la catégorie de motifs purs.

3.1. **Catégorie des correspondances.**

La notion de correspondance en géométrie algébrique généralise celle de morphisme de schémas : une correspondance est, vue comme objet concret, un cycle algébrique. Plus précisément, pour $X, Y \in \mathcal{P}(k)$, l'ensemble des correspondances de X vers Y est défini comme

$$Corr_{\mathrm{rat}}(X, Y) = CH^{dim\ X}(X \times Y).$$

C'est effectivement une généralisation de morphisme de schémas, car à tout morphisme de schémas $f : Y \to X$ on peut associer le transposé de son graphe, qui correspond exactement à un élément de $Corr_{\mathrm{rat}}(X, Y)$.[7] L'idée est de remplacer la notion du morphisme de schémas, qui est de nature local-global par recollement, par un objet algébrique qui est le cycle algébrique.

Ainsi, on a envie de construire la catégorie des correspondances $Corr_{\mathrm{rat}}(k)$ comme suit : les objets de $Corr_{\mathrm{rat}}(k)$ sont ceux de $\mathcal{P}(k)$, et pour $X, Y \in \mathcal{P}(k)$, l'ensemble des morphismes de X vers Y dans cette catégorie est $Corr_{\mathrm{rat}}(X, Y)$. Pour que cette construction donne bien une catégorie, il reste à définir la loi de composition des correspondances (et le morphisme identité correspondant). On la définit de manière suivante : soient $X, Y, Z \in \mathcal{P}(k)$, $\alpha \in Corr_{\mathrm{rat}}(X, Y)$ et $\beta \in Corr_{\mathrm{rat}}(Y, Z)$. On note

$$p_{XYZ}^{XY} : X \times Y \times Z \to X \times Y$$

la projection canonique, idem pour p_{XYZ}^{XZ} et p_{XYZ}^{YZ}. Alors on définit

$$\beta \circ \alpha := {p_{XYZ}^{XZ}}_*({p_{XYZ}^{XY}}^*(\alpha) \cdot {p_{XYZ}^{YZ}}^*(\beta)).$$

tandis que l'équivalence numérique est la moins fine. Notons que le fait que l'équivalence rationnelle est adéquate découle du "moving lemma" de Chow.

7. Attention la théorie des motifs purs de Grothendieck est contravariante, dans laquelle on travaille sur la catégorie $\mathcal{P}(k)^{op}$.

On peut vérifier que le produit d'intersection dans la formule précédente est bien défini dans ce cas de figure, et que $\beta \circ \alpha$ est un élément de $Corr_{\text{rat}}(X, Z)$. [8] On peut voir que cette définition est assez naturelle : dans le cas où α, β sont respectivement des graphes de deux morphismes $f : Y \to X$ et $g : Z \to Y$, les deux cycles $({p^{XY}_{XYZ}}^*(\alpha)$ et ${p^{YZ}_{XYZ}}^*(\beta))$ sont respectivement $\{(f(y), y)\} \times Z$ et $X \times \{(g(z), z)\}$ vus comme sous-ensembles de $X \times Y \times Z$; leur intersection (ensembliste) est l'ensemble $\{f \circ g(z), g(z), z\}$, dont le push-forward par p^{XZ}_{XYZ} est le sous-ensemble $\{f \circ g(z), z\}$ de $X \times Z$, qui est le transposé du graphe du morphisme composé $f \circ g$. On peut vérifier que la multiplicité de ce cycle est 1, et alors cette loi de composition est en particulier compatible avec la composition de morphismes de schémas. Le morphisme identité d'un objet X est donné par le transposé du graphe du morphisme identité $id_X : X \to X$, à savoir la diagonale de X dans $X \times X$, qui correspond à un élément de $Corr_{\text{rat}}(X, X)$.

Notons qu'on a un foncteur $\mathcal{P}(k)^{op} \to Corr_{\text{rat}}(k)$ naturel, car tout ce qu'on a fait est d'élargir la classe des morphismes.

3.2. **Catégorie des motifs purs effectifs.**

Il n'est pas difficile de voir que la catégorie des correspondances $Corr_{\text{rat}}(k)$ construite précédemment est une catégorie additive [9] : la somme directe est donnée par la réunion disjointe de schémas, l'objet zéro est le k-schéma vide, les groupes de Chow sont des groupes abéliens, et la loi de composition décrite précédemment est bilinéaire. En algèbre homologique, il y a un type de catégories additives qui ont de très bonnes propriétés : les catégories abéliennes, lesquelles se comportent tout comme la catégorie des modules sur un anneau A, Mod_A. Il n'y a aucune raison qu'une catégorie additive quelconque soit abélienne, tel est le cas de la catégorie $Corr_{\text{rat}}(k)$; mais en général il y a un moyen de s'en rapprocher, par l'enveloppe pseudo-abélienne, que l'on va décrire maintenant.

Une catégorie pseudo-abélienne est quelque chose située entre une catégorie additive et une catégorie abélienne : c'est une catégorie additive $\mathcal{C}$, telle que pour tout objet X de $\mathcal{C}$, tout endomorphisme p de X dans $\mathcal{C}$ qui est idempotent (i.e. $p^2 = p$, aussi appelé projecteur) admet un noyau $\ker p$ dans $\mathcal{C}$, et qu'on a $X \simeq \ker p \oplus \operatorname{im} p$. [10] En bref, c'est une catégorie additive dans laquelle tout projecteur provient d'un facteur direct.

Maintenant soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive. Par définition, pour qu'elle soit pseudo-abélienne, il faut que chaque objet de $\mathcal{C}$ admette suffisamment de facteurs directs. Ce fait nous conduit à la définition de l'**enveloppe pseudo-abélienne** de $\mathcal{C}$, $Split(\mathcal{C})$: ses objets sont de la forme (X, p), où X est un objet de $\mathcal{C}$ et p un projecteur de X ; on

8. Plus généralement cet énoncé vaut pour toute relation d'equivalence adéquate, car la définition de cette dernière est faite pour avoir cette propriété.

9. On rappelle qu'une catégorie $\mathcal{C}$ est dite additive si elle admet un objet zéro et des sommes directes finies, et telle que pour tous les $A, B \in \mathcal{C}$, l'ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ est un groupe abélien, et que la loi de composition est bilinéaire.

10. Notons que dans une catégorie abélienne, non seulement les projecteurs, mais *tout* morphisme admet un noyau et un conoyau.

définit $Hom_{Split(\mathcal{C})}((X,p),(Y,q)) := q \circ Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \circ p$. Alors on peut vérifier que $Split(\mathcal{C})$ est une catégorie pseudo-abélienne ; de plus, on a un foncteur pleinement fidèle $\mathcal{C} \to Split(\mathcal{C})$, où on associe à tout objet X de $\mathcal{C}$ le couple (X, id_X), qui fait de $Split(\mathcal{C})$ la catégorie universelle pour cette propriété.

On applique alors cette construction à la catégorie $Corr_{\text{rat}}(k)$: on note $CHM^{eff}(k)$ son enveloppe pseudo-abélienne, appelée la catégorie des motifs de Chow effectifs. On a ainsi un foncteur pleinement fidèle $Corr_{\text{rat}}(k) \to CHM^{eff}(k)$.

3.3. **Motifs de Chow et motifs numériques.**

Dans ce qui précède on s'est restreint aux groupes de Chow dont l'indice est "correct" (i.e. les groupes de la forme $CH^{dimX}(X \times Y)$). Mais les autres groupes de Chow sont eux aussi intéressants : en effet, considérer les groupes de Chow d'indices différents consiste à ajouter les "twists de Tate" dans la catégorie, ce qui est indispensable si on veut établir une théorie concernant toutes les cohomologies ; de plus, comme on le verra dans la section suivante, ce procédé permet en effet d'avoir une dualité dans la catégorie de motifs.

On va encore élargir l'ensemble des objets et définir les ensembles de morphismes correspondants. D'abord on définit les correspondances avec degré [11] : pour tout $j \in \mathbb{Z}$, et $X, Y \in \mathcal{P}(k)$, l'ensemble des correspondances de X vers Y de degré j est défini comme

$$Corr_{rat,\ j}(X,Y) = CH^{dim\ X+j}(X \times Y).$$

Ainsi les correspondances au sens de la Section 3.1 ne sont rien d'autre que les correspondances de degré 0 au sens précédent.

On construit la **catégorie des motifs de Chow**, $CHM(k)$, de manière suivante : les objets de $CHM(k)$ sont de la forme (X,p,r), où X est un élément de $\mathcal{P}(k)$, p est un projecteur de X et $r \in \mathbb{Z}$; on définit

$$Hom_{CHM(k)}((X,p,r),(Y,q,r')) := Corr_{rat,\ r'-r}(X,Y)$$

comme l'ensemble des morphismes dans la catégorie $CHM(k)$. On peut montrer que la catégorie $CHM(k)$ ainsi obtenue reste pseudo-abélienne, et on a un foncteur pleinement fidèle $CHM^{eff}(k) \to CHM(k)$, qui à un élément (X,p) associe l'élément $(X,p,0)$.

On peut montrer que toute la construction qui précède reste valable si on remplace la relation $\sim_{\text{rat}}$ par $\sim_{\text{num}}$. On note $NM(k)$ la catégorie obtenue à la place de $CHM(k)$, appelée la **catégorie des motifs purs numériques**. Comme $\sim_{\text{rat}}$ est plus fine que $\sim_{\text{num}}$, on a un foncteur canonique $CHM(k) \to NM(k)$.

3.4. **Propriétés de la catégorie des motifs purs.**

On commence par la propriété de dualité des motifs. Jusqu'ici on n'a pas mentionné le rôle du produit fibré dans la catégorie des motifs ; en fait celui-ci donne une structure de catégorie monoïdale symétrique à la catégorie $\mathcal{P}(k)$. On a un foncteur canonique h :

11. Ici le mot "degré" se réfère aux indices des groupes de Chow, et non pas au degré d'une application.

$\mathcal{P}(k)^{op} \to CHM(k)$, qui à un élément X de $\mathcal{P}(k)$ associe $(X, id_X, 0)$, appelé le motif de X. Et alors $CHM(k)$ hérite de cette structure monoïdale symétrique : on a un foncteur

$$\otimes : CHM(k) \times CHM(k) \to CHM(k)$$
$$((X,p,r),(Y,q,r')) \mapsto (X \times Y, p \otimes q, r + r'),$$

dont l'objet unité est le motif $h(Spec\ k)$, que l'on note aussi $\mathbb{Z}$. [12] En outre la catégorie possède une auto-dualité pour cette structure : si $X \in \mathcal{P}(k)$ est de dimension pure d, le dual de l'objet (X,p,r) est $(X,^t p, d-r)$ (^tp étant le transposé de p), et le cas déneral s'en déduit par additivité. Cette auto-dualité fait de la catégorie $CHM(k)$ une catégorie **rigide**. [13] La sous-catégorie $CHM^{eff}(k)$ n'est pas rigide : elle n'est pas stable sous le foncteur d'auto-dualité.

On a aussi la notion de motif réduit : soit $X \in \mathcal{P}(k)$, avec un point rationnel $x : Spec\ k \to X$. En le composant avec le morphisme structural $X \to Spec\ k$, on obtient un endomorphisme de X qui est un projecteur, ce qui entraîne une décomposition dans $CHM(k)$ de la forme $h(X) = \mathbb{Z} \oplus \tilde{h}(X)$. Le motif $\tilde{h}(X)$ s'appelle le **motif réduit** du k-schéma pointé (X,x). Dans le cas particulier $X = \mathbb{P}^1$, il se trouve que la décomposition $h(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z} \oplus \tilde{h}(\mathbb{P}^1)$ ne dépend pas, à isomorphisme près, du point rationnel choisi. Le motif $\tilde{h}(\mathbb{P}^1)$ s'appelle le **motif de Lefschetz**, noté $\mathbb{L}$.

On a les opérations de décalage dans la catégorie $CHM(k)$: pour tout motif $M = (X,p,r)$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $M(n)$ le motif $(X,p,r+n)$. On peut montrer que le motif de Lefschetz est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}(-1)$. Son dual, qui s'identifie alors à $\mathbb{Z}(1)$, s'appelle le **motif de Tate**. Les opérations $M \mapsto M(n)$ s'appellent les "twists de Tate", dont la terminologie provient de théorie de la cohomologie l-adique. Le motif de Lefschetz joue en quelque sorte le rôle de la droite affine (laquelle n'est pas un objet de $\mathcal{P}(k)$) dans la catégorie $CHM(k)$, avec le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soit $X \in \mathcal{P}(k)$. On suppose que X admet une filtration finie par des sous-schémas fermés $X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_n \supset X_{n+1} = \emptyset$, et que pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$ on a une fibration affine [14] $X_i \setminus X_{i+1} \to Y_i$ de dimension relative d_i, où $Y_i \in \mathcal{P}(k)$. Alors dans la catégorie $CHM(k)$ on a une décomposition $h(X) = \oplus_i\, h(Y_i)(-d_i)$*

On a donc par exemple $h(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(-1) \oplus \mathbb{Z}(-2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}^2$. On retrouve ainsi les formules élémentaires dans l'introduction, et c'est sous cette forme-là que l'idée de linéarisation de la géométrie algébrique s'incarne dans la catégorie des motifs de Chow.

12. Il y a un peu d'ambiguïté ici, le symbole $\mathbb{Z}$ signifie aussi bien un motif qu'un anneau. En fait la notation est faite pour s'adapter au changement de base : on notera $\mathbb{Q}$ l'objet unité si on tensorise par $\mathbb{Q}$.

13. On ne donne pas la définition précise d'une catégorie rigide ici. Grosso modo dire qu'une catégorie tensorielle est rigide est équivalent à l'existence des applications d'évaluation et de coévaluation, qui vérifient des conditions usuelles de commutativité et d'associativité.

14. Une fibration affine de dimension relative d est un morphisme de schémas $f : X \to Y$ plat tel que la fibre de f au-dessus de tout point de Y est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^d$. Cette notion généralise celle du fibré vectoriel.

Les propriétés précédentes dites "linéaires" restent valables dans $NM(k)$, i.e. si on remplace $\sim_{\mathrm{rat}}$ par $\sim_{\mathrm{num}}$. Maintenant on va comparer les différentes équivalences en les reliant aux cohomologies de Weil, et on verra que cette différence pose un problème crucial dans la théorie de motifs purs.

On a d'abord une certaine propriété universelle des motifs de Chow. Une cohomologie de Weil est un certain foncteur H de la catégorie $\mathcal{P}(k)$ vers une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ (par exemple $\mathcal{A}$ est la catégorie $VectGr_{\mathbb{Q}}$ des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels gradués). Alors on peut montrer que dans un sens convenable, le foncteur H se factorise par le foncteur $h : \mathcal{P}(k)^{op} \to CHM^{eff}(k)$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(k) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "H"'] & CHM^{eff}(k) \arrow[d, "R_H"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

i.e., la donnée d'une cohomologie de Weil H est équivalente à la donnée d'un foncteur $R_H : CHM^{eff}(k) \to \mathcal{A}$, appelé le foncteur de réalisation du foncteur H, avec la philosophie que toute cohomologie de Weil devrait être une réalisation de la cohomologie algébrique.

Mais la vraie théorie des motifs purs exige un peu plus de choses : la "catégorie des motifs purs" proprement dite sera une catégorie abélienne semi-simple, qui vérifie cette propriété universelle de factorisation.

Grothendieck a proposé de prendre la catégorie $NM(k)^{eff}_{\mathbb{Q}}$ pour telle catégorie. La semi-simplicité de $NM^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$, que Grothendieck avait alors conjecturée, a été démontrée par Jannsen en 1992 :

Théorème 3.2 (Jannsen)**.** *Soit F un corps. Alors la catégorie $NM(k)_F$ est abélienne semi-simple. Il en résulte que la catégorie $NM^{eff}(k)_F$ est aussi abélienne semi-simple.*

De plus, l'équivalence numérique est la seule équivalence adéquate avec cette propriété.

On sait donc que la catégorie des motifs de Chow effectifs contient trop de morphismes pour être semi-simple. Mais la catégorie $NM^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$, au contraire, risque ne pas en avoir assez, avec le problème grave suivant : est-ce que la propriété de factorisation vaut pour $NM^{eff}(k)_{\mathbb{Q}}$?

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(k) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "H"'] & CHM^{eff}(k) \arrow[r] \arrow[d, "R_H"] & NM^{eff}(k)_{\mathbb{Q}} \arrow[dl, dotted, "\bar{R}_H"'] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

Une reformulation de la question est sous la forme suivante : est-ce que pour toute cohomologie de Weil, l'équivalence homologique coïncide avec l'équivalence numérique ? [15] Cette question fait partie des fameuses conjectures standard de Grothendieck ([Grothendieck]), et est une obstruction majeure pour obtenir une théorie de motifs complète.

L'idée des autres conjectures standard dit en gros que certains éléments ou applications qu'on construit sur la cohomologie proviennent des cycles algébriques. A l'heure actuelle on a assez peu de moyens pour traiter ce type d'énoncés d'algébricité, et ces conjectures ne sont connues que dans des cas particuliers ou en petite dimension, et sont considérés comme des questions difficiles.

4. CATÉGORIE DES MOTIFS DE VOEVODSKY

Dans ce chapitre on note $Sm(k)$ la catégorie des schémas lisses de type fini sur k, dont les morphismes sont les morphismes de schémas lisses.

4.1. **Les motifs mixtes.**

La théorie des motifs mixtes cherche à généraliser la théorie des motifs purs aux schémas non nécessairement projectifs. [16]

La terminologie vient de la théorie de Hodge : dans une structure de Hodge mixte, la notion de graduation dans le cas pur est remplacée par celle de filtration. C'est exactement le phénomène qui a lieu lorsqu'on regarde les schémas non projectifs : si le corps de base est infini, on peut trouver des exemples dans ce cas avec dont les groupes de cohomologie forment une suite exacte courte non scindée. L'existence des extensions non triviales est une caractéristique importante dans la théorie des motifs mixtes.

Un autre point de vue important est d'adapter les méthodes de topologie algébrique en géométrie algébrique. Dans le cas mixte, les cohomologies que l'on considère sont des foncteurs $H^* : Sm(k)^{op} \to \mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne. On constate via des exemples connus que les foncteurs H^* ont souvent les deux propriétés suivantes :

– l'invariance par $\mathbb{A}^1$-homotopie, i.e pour tout $X \in Sm(k)$, le morphisme
$$H^*(X) \xrightarrow{pr^*} H^*(X \times \mathbb{A}^1)$$
est un isomorphisme, où $pr : X \times \mathbb{A}^1 \to X$ est la projection canonique

– la propriété de Mayer-Vietoris, i.e. pour tout $X \in Sm(k)$ avec un recouvrement par deux ouverts U et V, on a une suite exacte longue
$$\cdots \to H^{i-1}(U \cap V) \to H^i(X) \to H^i(U) \oplus H^i(V) \to H^i(U \cap V) \to \cdots$$

15. On n'a pas défini l'équivalence homologique pour une cohomologie de Weil. A priori elle dépend de la cohomologie de Weil choisie, et est plus finie que l'équivalence numérique.

16. La construction de la catégorie de motifs de Voevodsky ne fait intervenir que des schémas lisses, mais il se trouve que si le corps de base admet des résolutions de singularités, on peut plonger, non seulement les schémas lisses, mais tous les schémas de type fini sur k dans cette catégorie, avec des propriétés voulues. Dans ce mémoire on se limite au cas lisse pour simplifier.

L'invariance par $\mathbb{A}^1$-homotopie suggère de regarder l'homologie plutôt que la cohomologie, et essayer de trouver des analogies avec la topologie algébrique. Cette méthode est employée par de plus en plus de travaux récents sur la théorie de motifs.

Historiquement, c'est Beilinson qui conjecture l'existence de la catégorie des motifs mixtes : on s'attend à une catégorie abélienne monoïdale $MM(k)$, avec un foncteur $Sm(k)^{op} \to MM(k)$, qui contient les motifs de Chow dans un sens convenable ; de plus, on peut définir la cohomologie motivique dans cette catégorie par certains groupes Ext, lesquels sont censés coïncider avec les groupes obtenus par la K-théorie algébrique.

A l'heure actuelle, on n'a aucun candidat pour la catégorie $MM(k)$. [17] Cependant, comme l'a proposé Deligne, à la place de la catégorie $MM(k)$ on peut chercher à construire sa catégorie dérivée $D^b(MM(k))$ (on expliquera le sens de ce terme plus tard). Aujourd'hui on a plusieurs constructions, telles que celles de Hanamura, de Levine et de Voevodsky. [18] On présente dans ce chapitre l'approche de Voevodsky, laquelle a l'avantage d'être assez élémentaire.

4.2. **Les correspondances finies.**

Comme dans le cas des motifs purs, on cherche dans un premier temps à enrichir la classe des morphismes dans cette catégorie.

Rappelons que la construction des motifs purs dépend d'une relation d'équivalence (par exemple $\sim_{\mathrm{rat}}$ ou $\sim_{\mathrm{num}}$). La raison principale est que tous les cycles ne s'intersectent pas proprement en général, et qu'il faut alors prendre un quotient pour que toute intersection devienne propre. Une première idée importante de Voevodsky est d'introduire les **correspondances finies** : au lieu de quotienter, on se restreint à une petite classe de correspondances, sur laquelle les intersections sont propres. Concrètement, pour tous $X, Y \in Sm(k)$, le groupe des correspondances finies de X vers Y, $c(X, Y)$ est défini comme le groupe abélien libre engendré par les sous-schémas fermés intègres W de $X \times Y$, tels que le morphisme composé $W \to X \times Y \xrightarrow{pr_1} X$ soit fini et surjectif sur une composante connexe de X.

On peut montrer que la loi de composition usuelle des correspondances, ainsi que le morphisme identité, sont valables dans ce cas. On note alors $SmCor(k)$ la catégorie dont les objets sont ceux de $Sm(k)$, et pour tous $X, Y \in Sm(k)$, on définit $Hom_{SmCor(k)}(X, Y) := c(X, Y)$. C'est une catégorie additive, dont la somme directe de deux schémas est leur réunion disjointe.

4.3. **Quelques notions d'algèbre homologique.**

On a besoin de quelques notions d'algèbre homologique pour la suite.

17. Nori a proposé une définition de la catégorie des motifs mixtes, mais on ne sait toujours pas assez pour démontrer des propriétés voulues sur cette catégorie.

18. Notons qu'on a montré que la construction de Voevodsky et celle de Levine, tensorisées par $\mathbb{Q}$, sont équivalentes.

On a d'abord la notion de localisation d'une catégorie : soit $\mathcal{C}$ une catégorie et S un ensemble de morphismes dans $\mathcal{C}$. Alors une localisation de $\mathcal{C}$ par rapport à S, si elle existe, est une catégorie $S^{-1}\mathcal{C}$ avec un foncteur $\mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$, qui envoie tous les morphismes dans S sur des isomorphismes dans $S^{-1}\mathcal{C}$, et qui est universel pour cette propriété. Une localisation, si elle existe, est unique à équivalence de catégorie près.

Soit $\mathcal{A}$ une catégorie additive. On note $C^b(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes bornés sur $\mathcal{A}$, dont les morphismes sont les morphismes de complexes. Si $f : A_* \to B_*$ est un morphisme de complexes, on dit que f est homotope à 0 s'il existe pour tout $n \in \mathbb{Z}$ un morphisme $h_n : A_n \to B_n$, tel que $f_n = d_B \circ h_n + h_{n-1} \circ d_A$. La catégorie des complexes bornés à homotopie près, $\mathcal{H}^b(\mathcal{A})$, est la localisation de $C^b(\mathcal{A})$ par rapport aux morphismes de complexes homotopes à 0 (la localisation existe car il suffit de prendre un quotient).

La notion de catégorie dérivée a été introduite afin de simplifier la théorie de foncteurs dérivés. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne, sa catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ est construite par une suite de localisations. On part de la catégorie des complexes (non nécessairement bornés) $C^b(\mathcal{A})$. On localise d'abord par rapport aux morphismes homotopes à 0, puis par rapport aux quasi-isomorphismes (des morphismes qui induisent des isomorphismes sur la cohomologie). [19] Les foncteurs dérivés dans la catégorie de départ deviennent des foncteurs dans la catégorie dérivée.

La notion de catégorie triangulée s'inspire de celle de catégorie dérivée : la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne a naturellement une structure de catégorie triangulée. Précisément, soit $\mathcal{D}$ une catégorie avec un automorphisme $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, appelé foncteur de décalage ou de rotation. On note $X[n] = T^n(X)$. Un triangle est une suite de 3 morphismes de la forme

$$X \to Y \to Z \to X[1].$$

Une catégorie triangulée est une catégorie additive munie d'une classe de triangles dit "triangles distingués", qui vérifie les axiomes suivants :

- pout tout objet X, le triangle $X \xrightarrow{id} X \to 0 \to X[1]$ est distingué
- pout tout morphisme $X \xrightarrow{u} Y$, il existe un objet Z (appelé "mapping cone" de f) et des morphismes $Y \xrightarrow{v} Z$ et $Z \xrightarrow{w} X[1]$, tels que le triangle $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ soit distingué
- tout triangle isomorphe à un triangle distingué est distingué
- le foncteur de décalage préserve les triangles distingués

19. Un morphisme de complexes homotope à 0 est en particulier un quasi-isomorphisme. La raison de faire la localisation en deux étapes provient d'un problème de logique.

– étant donnés deux mapping cones, il existe un morphisme entre eux qui fait commuter le diagramme suivant [20]

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "h"'] & X[1] \arrow[d, "f[1]"'] \\ X' \arrow[r, "u"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

– on a aussi un "axiome d'octaèdre", qui décrit une compatibilité entre les triplets de mapping cones

Soit $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée. Une sous-catégorie épaisse de $\mathcal{D}$ est une sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ telles que

– $0 \in \mathcal{C}$
– si $A \to B \to C \to A[1]$ est un triangle distingué, et que deux parmi A, B, C sont dans $\mathcal{C}$, alors le troisième aussi ($\mathcal{C}$ est stable par extension)
– si $A \in \mathcal{C}$ et B facteur direct de A, alors $B \in \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ est stable par facteur direct)

On peut définir la localisation d'une catégorie triangulée par rapport à une sous-catégorie épaisse, laquelle reste une catégorie triangulée.

4.4. **La catégorie des motifs géométriques effectifs.**

Par la discussion qui précède, on sait que pour construire une théorie de motifs mixtes, il faut au moins tenir compte de l'invariance par homotopie et des suites exactes de type Mayer-Vietoris. C'est exactement ce que fait Voevodsky : dans la catégorie $\mathcal{H}^b(SmCor(k))$, on a deux types particuliers de complexes

– pour tout X objet de $Sm(k)$, on a le complexe d'homotopie :

$$[X \times \mathbb{A}^1] \xrightarrow{[pr_1]} [X]$$

– soit X un objet de $Sm(k)$, qui admet un recouvrement par deux ouverts U et V. On note $i_U : U \to X$, $i_v : V \to X$, $j_U : U \cap V \to U$, $j_V : U \cap V \to V$ les immersions ouvertes canoniques. Alors on a le complexe de Mayer-Vietoris :

$$[U \cap V] \xrightarrow{([j_U],[j_V])} [U] \oplus [V] \xrightarrow{[i_u]\oplus(-[i_V])} [X].$$

On note T la plus petite sous-catégorie épaisse de $\mathcal{H}^b(SmCor(k))$ contenant tous les complexes de ces deux types. On prend maintenant la localisation de $\mathcal{H}^b(SmCor(k))$ par rapport à T ; puis comme dans le cas des motifs purs, on définit la catégorie des motifs géométriques $DM^{eff}_{gm}(k)$ comme l'enveloppe pseudo-abélienne de la localisation $T^{-1}\mathcal{H}^b(SmCor(k))$. [21]

20. Attention le morphisme h n'est pas unique, ce qui est l'origine de beaucoup de problèmes en algèbre homologique.

21. D'après Voevodsky, l'étape de pseudo-abélianisation n'est pas nécessaire dans cette construction ; la seule raison de la faire est pour établir un lien plus fort entre la catégorie obtenue et celle des motifs purs.

On a un foncteur $M_{gm} : Sm(k) \to DM_{gm}^{eff}(k)$, qui à un schéma X associe le complexe $[X]$ concentré en degré 0. La catégorie $DM_{gm}^{eff}(k)$ admet une structure monoïdale, dont $M_{gm}(Spec\ k)$ est l'unité. De plus, cette catégorie contient les motifs de Chow :

Théorème 4.1. *On a un foncteur pleinement fidèle* $CHM^{eff}(k)^{op} \to DM_{gm}^{eff}(k)$.

4.5. **La catégorie** $DM_{gm}(k)$**.**

Il est assez simple de définir le motif réduit dans $DM_{gm}^{eff}(k)$: pour tout $X \in Sm(k)$ avec un point rationnel, on note $\tilde{M}_{gm}(X)$ l'élément dans $DM_{gm}^{eff}(k)$ qui correspond au complexe $[X] \to [Spec\ k]$ dans $\mathcal{H}^b(SmCor(k))$. Comme dans le cas pur, il reste à inverser le motif réduit de la droite projective pour avoir les objets duaux.

On note $\mathbb{Z}(1) := \tilde{M}_{gm}(\mathbb{P}^1)[-2]$, qui est l'objet de Tate dans la catégorie $DM_{gm}^{eff}(k)$. [22]Pour tout $n \geqslant 0$ et tout objet A de $DM_{gm}^{eff}(k)$, on définit les twists de Tate par $A(n) := A \otimes \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$, et on note aussi $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$. On définit la catégorie $DM_{gm}(k)$ en inversant formellement l'objet $\mathbb{Z}(1)$ dans $DM_{gm}^{eff}(k)$: ses objets sont de la forme (A, n), où A est un objet de $DM_{gm}^{eff}(k)$ et $n \in \mathbb{Z}$; on définit

$$Hom_{DM_{gm}(k)}((A,n),(B,m)) = \lim_{k \to \infty} Hom_{DM_{gm}^{eff}(k)}(A(n+k), B(m+k)).$$

On peut montrer que $DM_{gm}(k)$ est une catégorie, qui vérifie les propriétés suivantes :

Théorème 4.2. *La catégorie $DM_{gm}(k)$ est une catégorie triangulée. De plus si le corps k admet des résolutions de singularités, alors le foncteur canonique $DM_{gm}^{eff}(k) \to DM_{gm}(k)$ est pleinement fidèle.*

On note par abus de notation M_{gm} le foncteur $Sm(k) \to DM_{gm}(k)$.

Voici une application de la construction précédente. On sait que la catégorie $DM_{gm}(k)$ est conjecturalement la catégorie dérivée de la catégorie de motifs mixtes $MM(k)$. Malgré que cette dernnière reste inconnue, la construction de $DM_{gm}(k)$ permet de définir la cohomologie motivique : pour $X \in Sm(k)$ et $i, j \in \mathbb{Z}$, le groupe de cohomologie motivique est défini comme $H^j_M(X, \mathbb{Z}(i)) = Hom_(M_{gm}(X), \mathbb{Z}(i)[j])$. Ces groupes sont étroitement liés à la K-théorie algébrique, et jouent un rôle essentiel dans la preuve de la conjecture de Milnor par Voevodsky.

La construction de $DM_{gm}(k)$ a encore beaucoup d'autres applications. Un exemple célèbre est la sous-catégorie pleine $DTM(k)_{\mathbb{Q}}$ de $DM_{gm}(k)_{\mathbb{Q}}$ constituée des motifs de Tate mixtes, laquelle s'avère très liée aux nombres multizêtas. Si k est un corps de nombres, on connaît suffisamment de faits pour pouvoir définir le groupe de Galois dans le cadre motivique sur $DTM(k)$, ainsi établissant d'autres propriétés sur les nombres multizêtas. [23]

22. Puisque l'on est dans le cadre "homologique" (contrairement au cadre "cohomologique" dans le cas pur), on a un décalage $[-2]$ plutôt que $[2]$.

23. La théorie générale du groupe de Galois motivique nécessite la notion de catégorie tannakienne, que l'on n'étudie pas du tout dans ce mémoire. Il faut noter aussi qu'un point crucial pour les motifs de Tate mixtes est le calcul de certains K-groupes par Borel, via des méthodes différentielles.

En résumé la catégorie de motifs de Voevodsky fournit un cadre pratique pour travailler sur des problèmes de motifs. Bien sûr il reste beaucoup de questions autour de cette catégorie, mises à part les conjectures standard : par exemple on peut tenter de retrouver la catégorie $MM(k)$ à partir de $DM_{gm}(k)$. Pour le faire on a besoin d'une t-structure (laquelle décrit la positivité en quelque sorte) convenable sur la catégorie $DM_{gm}(k)$, de sorte que $MM(k)$ soit la partie "neutre" (appelée coeur) de cette t-structure. Trouver une telle t-structure reste une question ouverte aujourd'hui.

Remerciements Je tiens à remercier Frédéric Déglise pour m'avoir élucidé beaucoup de notions dans la théorie de motifs, et m'avoir énormément aidé pendant la rédaction de ce mémoire.

RÉFÉRENCES

[André] Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses, **17**, Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[Fulton] W. Fulton, *Intersection theory*, Second edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **2**. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Grothendieck] A. Grothendieck, *Standard conjectures on algebraic cycles*, in *Algebraic Geometry* (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), 193-199, Oxford Univ. Press, London, 1969.

[Hartshorne] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Karpenko] N. Karpenko, *Cohomology of relative cellular spaces and of isotropic flag varieties*, St. Petersburg Math. J. **52** (2001), no. 1, 1-50.

[Mazza-Voevodsky-Weibel] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel, *Lecture notes on motivic cohomology*, Clay Mathematics Monographs, **2**, American Mathematical Society, Providence, RI ; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2006.

[Sujatha] R. Sujatha, *Motives from a categorical point of view*, in *Autour des motifs–École d'été Franco-Asiatique de Géométrie Algébrique et de Théorie des Nombres*, 27-48, Panoramas et Synthèses, **29**, Société Mathématique de France, Paris, 2009.

[Voevodsky] V. Voevodsky, *Triangulated categories of motives over a field*, in *Cycles, transfers, and motivic homology theories*, 188-238, Ann. of Math. Stud., **143**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000.