

# MÉMOIRE DE MAÎTRISE

## Zéros de fonctions analytiques aléatoires

Formation Interuniversitaire de Mathématiques  
Fondamentales et Appliquées (FIMFA)  
École Normale Supérieure

Antoine Dahlqvist et Adrien Kassel

Sujet proposé par Mathilde Weill

Juin 2007

## Introduction

L'objet de ce mémoire est l'étude probabiliste de la répartition des zéros d'une fonction analytique dans un domaine du plan complexe. Cette étude a d'abord été menée dans le cas des polynômes par Hammersley (1960) qui a obtenu une formule permettant le calcul explicite de la répartition des zéros d'un polynôme en fonction d'une densité quelconque pour ses coefficients. L'étude probabiliste des zéros des fonctions analytiques, débutée par Offord (1965), a été motivée par le fait qu'une fonction analytique est une limite presque sûre (p.s.) de polynômes aléatoires. Cependant, cette étude ne fournit des résultats explicites que sous des hypothèses plus restrictives sur la loi de la fonction analytique. Dans le cas de fonctions analytiques gaussiennes, on obtient une généralisation de la formule de Hammersley. Des résultats récents ont montré que si on la suppose de plus à coefficients indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), alors la loi de la répartition de ses zéros s'exprime comme le déterminant d'un noyau. Ceci permet de déduire des propriétés géométriques de cet ensemble aléatoire. Cette théorie trouve des applications en physique statistique où les zéros de fonctions analytiques aléatoires modélisent les particules d'un gaz en interaction. Elle possède aussi des applications en statistique et en calcul numérique puisqu'elle permet de calculer l'incertitude de la répartition des zéros d'un système d'équations polynomiales ou analytiques en fonction de l'incertitude (d'origine expérimentale ou numérique) des coefficients du système.

## Avertissement

Le mémoire est en grande partie inspiré de l'article [1] de Y. Peres et B. Virág. Nous avons repris plusieurs des résultats récents énoncés par les auteurs en simplifiant souvent le cadre. Nous nous sommes, par exemple, volontairement tenus au cas des fonctions analytiques aléatoires dans le disque unité ouvert  $U$  du plan, ce qui simplifie bien souvent les démonstrations sans que les résultats ne perdent de leur intérêt. En effet, le théorème principal et nouveau de [1] ne concerne que les variables aléatoires gaussiennes i.i.d. et se place donc dans le cadre des fonctions analytiques dans le disque.

## Remerciements

Nous remercions très chaleureusement Mathilde Weill qui nous a proposé ce beau sujet. Elle nous a été d'une très grande aide tant pour la compréhension des mathématiques que nous avons étudiées que pour l'organisation de notre travail et surtout la rédaction de notre mémoire. Nous remercions aussi le beau temps parisien de mai qui nous a permis de travailler à maintes reprises dans la très champêtre cour Pasteur.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Processus ponctuels</b>	<b>4</b>
1.1	Définitions . . . . .	4
1.2	Liens entre la mesure de comptage et l'intensité jointe . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Polynômes aléatoires</b>	<b>7</b>
2.1	Définitions . . . . .	7
2.2	Formule de Hammersley . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Fonctions analytiques aléatoires</b>	<b>8</b>
3.1	L'espace de probabilité . . . . .	8
3.2	Définitions et propriétés élémentaires . . . . .	9
3.3	Le processus ponctuel $Z_f$ . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Formule de Hammersley pour les fonctions analytiques gaussiennes</b>	<b>13</b>
4.1	Résultats préliminaires . . . . .	13
4.2	Démonstration de la formule . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Caractère déterminantal du processus ponctuel <math>Z_f</math> pour la série gaussienne i.i.d.</b>	<b>16</b>
5.1	Calcul de l'intensité jointe intégrale de $Z_f$ pour la série gaussienne i.i.d. .	16
5.2	Égalité des intensités jointes intégrales et ponctuelles . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Calcul de la mesure de comptage de <math>Z_f</math> pour la série gaussienne i.i.d.</b>	<b>23</b>
<b>A</b>	<b>Quelques rappels sur les vecteurs gaussiens complexes</b>	<b>29</b>
<b>B</b>	<b>Déterminant et permanent</b>	<b>30</b>

# 1 Processus ponctuels

## 1.1 Définitions

Soit  $U$  le disque unité ouvert de  $\mathbf{C}$ . De manière imagée, un *processus ponctuel* dans  $U$  est un sous-ensemble dénombrable du disque unité  $U$  dont le cardinal et les éléments sont aléatoires. De manière précise, considérons  $(\Omega, P)$  un espace de probabilité. Un processus ponctuel est une application

$$N : \Omega \times \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\},$$

telle que

- $N(\omega, \cdot)$  est p.s. une mesure de Radon (à valeurs finies sur les compacts de  $U$ ),
- pour tout borélien  $B$  de  $U$ , l'application  $N(\cdot, B)$  est mesurable.

En pratique, on parle du processus ponctuel comme étant «l'ensemble aléatoire»  $Z$  tel que pour tout borélien  $B$ , le cardinal de  $Z \cap B$ , compté avec multiplicité, est donné par  $N(B)$ , c'est-à-dire que  $N(B) = \sum_{a \in Z} \mathbf{1}_{a \in B}$ . On appelle  $N$  la *mesure de comptage* du processus ponctuel  $Z$ . On dit qu'un processus ponctuel est *simple* si  $N$  ne prend que les valeurs 0 ou 1 sur les singletons. Cela signifie que  $N(B) = \text{card}(Z \cap B)$  pour tout borélien  $B$ .

L'*intensité*  $p$  d'un processus ponctuel est la densité, si elle existe, de la mesure  $N$ . On a donc, p.s. et pour tout borélien  $B$ ,

$$\mathbf{E}(N(B)) = \int_B p(z) dz.$$

On définit, par extension, pour tout entier  $n$ , l'*intensité  $n$ -jointe*  $p_n$  (appelée aussi *intensité jointe intégrale*) du processus ponctuel par la formule valable pour tous boréliens disjoints  $B_1, \dots, B_n$ ,

$$\mathbf{E}(N(B_1) \cdots N(B_n)) = \int_{B_1 \times \cdots \times B_n} p_n(z) dz.$$

Dans la suite on dira *intensité jointe* au lieu d'*intensité  $n$ -jointe* lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

Une autre grandeur intéressante, définie dans [1], est l'*intensité jointe ponctuelle du processus ponctuel*. Elle est définie pour tous  $z_1, \dots, z_n$  dans  $U$  par

$$p(\{z_1, \dots, z_n\}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(\pi \varepsilon^2)^n} P(N(B(z_i, \varepsilon)) \geq 1, i = 1, \dots, n)$$

lorsque cette limite existe.

Le processus qui nous intéresse dans ce mémoire est le processus  $Z_f$  des zéros d'une fonction analytique aléatoire  $f$  dans le disque unité  $U$ . Il s'agit d'un processus ponctuel. Après avoir défini plus précisément ce que nous entendons par fonction aléatoire, nous donnerons des formules pour la mesure de comptage et l'intensité jointe de  $Z_f$ , tout d'abord dans le cas où  $f$  est un polynôme puis lorsque  $f$  est une fonction analytique. De

plus, nous verrons au paragraphe 5.2 que pour le processus ponctuel  $Z_f$ , les intensités jointes intégrale et ponctuelle coïncident.

Avant de rentrer dans le cœur du sujet, donnons un exemple simple de processus ponctuel.

*Exemple.* Le processus ponctuel le plus simple à considérer est un processus ponctuel où l'on construit explicitement l'ensemble aléatoire  $Z$ . Considérons  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires indépendantes, uniformes sur  $U$ . Soit  $N$  une variable aléatoire de Poisson de paramètre 1 indépendante de la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$ . Alors  $\{X_1, \dots, X_N\}$  est un processus ponctuel. Son intensité jointe ponctuelle est constante égale à 1. En effet, soient  $z_1, \dots, z_n$  dans  $U$  et  $\varepsilon > 0$  tels que les  $B(z_i, \varepsilon)$  soient deux à deux disjointes. Alors les variables  $\{N(B(z_i, \varepsilon)), i = 1, \dots, n\}$  sont indépendantes. Par ailleurs, la loi de  $N(B(z_i, \varepsilon))$  est la loi de Poisson de paramètre  $\pi\varepsilon^2$ . Donc

$$P(N(B(z_i, \varepsilon)) \geq 1, i = 1, \dots, n) = \prod_{i=1}^n (1 - P(N(B(z_i, \varepsilon)) = 0)) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\pi\varepsilon^2}).$$

D'où  $p(z_1, \dots, z_n) = 1$ .

## 1.2 Liens entre la mesure de comptage et l'intensité jointe

**Lemme 1.** *Soit  $Z$  un processus ponctuel simple dans  $U$ . Soient  $k$  un entier  $\geq 1$  et  $p$  l'intensité  $k$ -jointe de  $Z$ . Soit  $Z^{\wedge k}$  l'ensemble des  $k$ -uplets de points distincts de  $Z$ . Alors pour tout borélien  $B$  de  $U^k$ , on a*

$$\mathbf{E}(\text{card}(B \cap Z^{\wedge k})) = \int_B p(z_1, \dots, z_k) dz_1 \cdots dz_k. \quad (1)$$

**Démonstration.** Les deux membres de l'équation (1) définissent chacun une mesure sur  $U^k$ . Il suffit donc de vérifier l'égalité pour les pavés de  $U^k$ . Soit  $B = B_1 \times \cdots \times B_k$  un tel pavé. Soit  $\mathcal{P}$  une partition finie de  $U$  par des boréliens. Soit  $M_k(\mathcal{P})$  le nombre de  $k$ -uplets  $(z_1, \dots, z_k)$  dans  $B$  tels que  $z_1, \dots, z_k$  soient dans des éléments distincts de  $\mathcal{P}$ . Soit  $N$  la mesure de comptage de  $Z$ . On a

$$\begin{aligned} M_k(\mathcal{P}) &= \sum_{Q_1, \dots, Q_k} \text{card}(Q_1 \times \cdots \times Q_k \cap B) \\ &= \sum_{Q_1, \dots, Q_k} \text{card}(Q_1 \times \cdots \times Q_k \cap B \cap Z^{\wedge k}) \\ &= \sum_{Q_1, \dots, Q_k} \prod_{i=1}^k \text{card}(Q_i \cap B_i) \\ &= \sum_{Q_1, \dots, Q_k} \prod_{i=1}^k N(Q_i \cap B_i), \end{aligned}$$

où l'on a sommé sur l'ensemble des  $k$ -uplets  $(Q_1, \dots, Q_k)$  d'éléments distincts de  $\mathcal{P}$ . Par définition de l'intensité jointe, on a

$$\mathbf{E}(M_k(\mathcal{P})) = \sum_{Q_1, \dots, Q_k} \int_{Q_1 \times \dots \times Q_k \cap B} p(z_1, \dots, z_k) dz_1 \cdots dz_k.$$

Considérons maintenant une suite  $(\mathcal{P}_j)_{j \geq 1}$ , décroissante pour l'inclusion, de telles partitions boréliennes finies de  $U$ , telle que le diamètre des éléments de  $\mathcal{P}_j$  tende vers 0. Alors la suite  $(M_k(\mathcal{P}_j))_{j \geq 0}$  tend en croissant vers  $\text{card}(B \cap Z^{\wedge k})$  lorsque  $j$  tend vers l'infini. Le théorème de convergence monotone appliqué à chaque membre de l'équation donne le résultat.  $\square$

**Lemme 2.** *Soit  $Z$  un processus ponctuel simple dans  $U$ . Soient  $n$  un entier et  $p$  son intensité  $(n+1)$ -jointe. Soient  $z_1, \dots, z_n$  des points distincts de  $U$ . Supposons qu'il existe des voisinages disjoints  $V_j$  de  $z_j$  et  $c$  et  $\delta$  deux nombres réels  $> 0$  tels que pour tout  $j$  et tout  $(n+1)$ -uplet  $(w_1, \dots, w_n, w)$  dans  $V_1 \times \dots \times V_n \times V_j$  on ait*

$$p(w_1, \dots, w_n, w) \leq c |w_j - w|^{-2+\delta}.$$

Alors, pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit,

$$\begin{aligned} P(N(B(z_1, \varepsilon)) = 1, \forall i = 1, \dots, n) &\leq \mathbf{E}(N(B(z_1, \varepsilon)) \cdots N(B(z_n, \varepsilon))) \\ &= P(N(B(z_1, \varepsilon)) = 1, \forall i = 1, \dots, n) + o(\varepsilon^{2n}). \end{aligned}$$

**Démonstration.** Soient  $N_1, \dots, N_n$  des entiers naturels. On a

$$0 \leq \prod_{j=1}^n N_j - \prod_{j=1}^n \mathbf{1}_{N_j=1} \leq N_1 \cdots N_n \sum_{k=1}^n (N_k - 1). \quad (2)$$

Soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ . En appliquant le lemme 1 à  $B_k = B(z_1, \varepsilon) \times \dots \times B(z_n, \varepsilon) \times B(z_k, \varepsilon)$  on obtient, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit tel que  $B(z_i, \varepsilon) \subset V_i$  pour tout  $i$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\text{card}(B_k \cap Z^{\wedge(n+1)})) &= \int_{B(z_1, \varepsilon) \times \dots \times B(z_n, \varepsilon) \times B(z_k, \varepsilon)} p(w_1, \dots, w_{n+1}) dw_1 \cdots dw_{n+1} \\ &\leq c \int_{B(z_1, \varepsilon) \times \dots \times B(z_n, \varepsilon)} \left( \int_{B(z_k, \varepsilon)} \frac{dw}{|w_k - w|^{2-\delta}} \right) dw_1 \cdots dw_n \\ &= K \varepsilon^{2n+\delta}, \end{aligned}$$

où

$$K = c\pi^{n-1} \int_{B(z_k, 1)^2} \frac{dudv}{|u-v|^{2-\delta}}$$

est une constante strictement positive. Or

$$\text{card}(B_k \cap Z^{\wedge(n+1)}) = N(B(z_1, \varepsilon)) \cdots N(B(z_1, \varepsilon)) (N(B(z_k, \varepsilon))) - 1.$$

De plus,

$$\mathbf{E} \left( \prod_{j=1}^n \mathbf{1}_{N(B(z_j, \varepsilon))=1} \right) = P(N(B(z_1, \varepsilon)) = 1, \forall i = 1, \dots, n).$$

Donc, par (2),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{E}(N(B(z_1, \varepsilon)) \cdots N(B(z_n, \varepsilon))) - P(N(B(z_1, \varepsilon)) = 1, \forall i = 1, \dots, n) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \mathbf{E} \left( \text{card}(B_k \cap Z^{\wedge(n+1)}) \right) = o(\varepsilon^{2n}). \end{aligned}$$

□

*Remarque.* Dans la suite nous serons amenés à effectuer l'abus de langage suivant. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires et  $\nu(X, dy)$  la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X$ . Nous appellerons loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $X = 0$  la mesure  $\nu(0, dy)$ . Nous la noterons  $(X|Y = 0)$ .

## 2 Polynômes aléatoires

### 2.1 Définitions

Un polynôme est représenté par la suite de ses coefficients. Pour rendre un polynôme aléatoire, il suffit donc de remplacer ses coefficients par des variables aléatoires. Fixons  $d$  un entier  $\geq 1$ . Il désignera le degré maximal des polynômes considérés (on pourrait envisager de rendre aussi ce paramètre aléatoire). Dans la suite,  $E$  désigne l'espace vectoriel  $\mathbf{C}^{d+1}$  muni de la tribu borélienne. Donnons-nous  $w$  une densité de probabilité sur  $\mathbf{C}^{d+1}$  par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda^{d+1}$ . Il s'agit de la densité des coefficients, c'est-à-dire que  $(E, w \cdot \lambda^{d+1})$  désigne notre espace de probabilité. Hammersley explique dans [2] l'intérêt pratique qu'il y a à considérer ce cas général, plus intéressant du point de vue des applications, puisque les erreurs expérimentales sur la connaissance des coefficients sont très souvent corrélées. Il serait donc simpliste de modéliser les coefficients par des variables aléatoires indépendantes. Néanmoins, il est à l'heure actuelle impossible de s'affranchir de ces hypothèses pour obtenir des résultats sur les zéros de fonctions analytiques aléatoires.

On considère enfin l'application mesurable

$$f : (E, w \cdot d\lambda^{d+1}) \rightarrow \mathbf{C}_d[X], a \mapsto \left( z \mapsto \sum_{n=0}^d a_n z^n \right),$$

où  $\mathbf{C}_d[X]$  est muni de la tribu borélienne associée à la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $\mathbf{C}$ . Cette variable aléatoire modélise l'élément générique de  $\mathbf{C}_d[X]$  avec pour « hasard », la densité  $w$ .

## 2.2 Formule de Hammersley

Énonçons sans donner de démonstration la formule de Hammersley (pour une démonstration, voir [2]). On considère un polynôme aléatoire  $f$  de degré  $\leq d$ , dont la loi des coefficients est de densité  $w$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{C}^d$ . Soit  $Z_f$  l'ensemble aléatoire des zéros de  $f$ . La formule de Hammersley donne une expression de l'intensité jointe intégrale  $p$  de  $Z_f$  en fonction de  $f$ .

**Proposition 1. Formule de Hammersley.** *Soient  $n \leq d$  et  $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{C}$ . Soit  $A$  la matrice de covariance de  $(f(z_1), \dots, f(z_n))$ . On suppose que  $A$  est inversible. Alors*

$$p(z_1, \dots, z_n) = \frac{\pi^{-n}}{\det(A)} \mathbf{E} (|f'(z_1) \cdots f'(z_n)|^2 |f(z_1) = \cdots = f(z_n) = 0) .$$

## 3 Fonctions analytiques aléatoires

### 3.1 L'espace de probabilité

Soit  $\mathcal{H}$  l'espace topologique des fonctions holomorphes sur  $U$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $U$ . On munit  $\mathcal{H}$  de la tribu borélienne associée à cette topologie. On vérifie alors que cette tribu est la tribu cylindrique, c'est-à-dire la plus petite tribu rendant mesurable la projection  $f \mapsto f(z)$  pour tout  $z$  dans  $U$ . Pour chaque élément  $f$  de  $\mathcal{H}$ , on s'intéresse à l'ensemble  $Z_f$  des zéros de  $f$ . L'application  $Z$  est définie sur  $\mathcal{H}$  et est à valeurs dans l'ensemble des parties discrètes de  $U$ . On cherche à comprendre les propriétés génériques de  $Z_f$  en raisonnant pour cela de manière probabiliste. Nous allons donc considérer une variable aléatoire  $f$  à valeurs dans  $\mathcal{H}$ . De manière imagée, on cherche à calculer la mesure image par  $Z$  d'une mesure donnée sur  $\mathcal{H}$ . On aura ainsi une information sur la manière dont se comporte l'ensemble des zéros de manière générique. En pratique, on sait que la connaissance des propriétés de  $Z_f$  découle de celle de sa mesure de comptage et de son intensité jointe. Ce qui nous reste à préciser, c'est la manière dont nous probabilisons l'espace mesurable  $\mathcal{H}$ . L'idée naturelle est de probabiliser le sous-espace vectoriel  $E$  de  $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$  constitué des suites dont la série entière associée est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, où  $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$  est muni de sa tribu cylindrique habituelle  $\mathcal{C}(\mathbf{C}^{\mathbf{N}})$ , et de transporter cette mesure sur  $\mathcal{H}$  via l'application mesurable

$$F : E \rightarrow \mathcal{H}, \quad (a_n)_{n \geq 0} \mapsto (z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n).$$

Nous allons construire une mesure de probabilité  $\gamma^{\otimes \mathbf{N}}$  sur  $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ , appelée *mesure gaussienne*, qui vérifie la propriété suivante : pour tout sous-ensemble  $I$  de  $\mathbf{N}$  la projection de  $\gamma^{\otimes \mathbf{N}}$  sur  $\mathbf{C}^I$  est la mesure produit  $\gamma^{\otimes |I|}$  de la mesure gaussienne standard  $\gamma$  sur  $\mathbf{C}$ .

Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires sur  $([0, 1], \lambda)$  à valeurs dans  $\mathbf{C}$ , indépendantes et suivant la loi gaussienne standard. On définit  $\gamma^{\otimes \mathbf{N}}$  comme la mesure image par l'application mesurable

$$X : ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1])) \rightarrow (\mathbf{C}^{\mathbf{N}}, \mathcal{C}(\mathbf{C}^{\mathbf{N}})), \quad \omega \mapsto (X_n(\omega))_{n \geq 0}$$



de la mesure de Lebesgue.

Nous allons maintenant établir que  $E$  est de probabilité 1 dans  $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}, \gamma^{\otimes \mathbf{N}}$ . Ceci découle du lemme suivant.

**Lemme 3.** *Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires complexes gaussiennes standard indépendantes. Pour presque tout  $\omega$  dans  $\Omega$ ,  $(a_n(\omega))_{n \geq 0}$  appartient à  $E$ .*

**Démonstration.** Soit  $r$  un réel strictement positif. Pour tout entier  $n$ ,

$$P(|a_n|r^n \geq 1) = \int_{r^{-n}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

– Si  $r < 1$ , on a, pour tout entier  $n$ ,

$$P(|a_n|r^n \geq 1) \leq \int_{r^{-n}}^{\infty} x r^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^n e^{-\frac{r^{-2n}}{2}} \leq r^n.$$

Donc  $\sum_{n=0}^{\infty} P(|a_n|r^n \geq 1) < \infty$ , donc par le lemme de Borel-Cantelli, la suite  $(|a_n|r^n)_{n \geq 0}$  est p.s. majorée par 1 à partir d'un certain rang. On en déduit que p.s.

$$\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{r}.$$

– Si  $r > 1$ , on a, pour tout entier  $n$ ,

$$P(|a_n|r^n \geq 1) \geq \int_1^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}},$$

donc  $\sum_{n=0}^{\infty} P(|a_n|r^n \geq 1) = \infty$  et, sachant que la suite  $(a_n)$  est indépendante, on a, toujours par Borel-Cantelli, que p.s.  $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{r}$ .

Donc p.s.  $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$  et donc  $(a_n)_{n \geq 0}$  appartient à  $E$ .  $\square$

Considérons la suite  $(X_n)_{n \geq 0}$  utilisée pour définir  $\gamma^{\otimes \mathbf{N}}$ . D'après le lemme 3, on a

$$\gamma^{\otimes \mathbf{N}}(E) = \lambda \{ \omega \in [0, 1] : (X_n(\omega))_{n \geq 0} \in E \} = 1.$$

Dans toute la suite, l'espace de probabilité de référence sera donc  $\mathcal{H}$  muni de la mesure de probabilité image de  $\gamma^{\otimes \mathbf{N}}$ , que nous noterons, comme d'habitude,  $(\Omega, P)$ .

## 3.2 Définitions et propriétés élémentaires

On dit qu'une variable aléatoire est *analytique* si elle prend ses valeurs dans  $\mathcal{H}$ . On dit qu'une variable aléatoire analytique  $f$  est *gaussienne* si pour tous  $z_1, \dots, z_n$  de  $U$ , la variable aléatoire vectorielle  $(f(z_1), \dots, f(z_n))$  est un vecteur gaussien. On dit qu'une variable aléatoire analytique est *gaussienne i.i.d.* si les coefficients de son développement en série entière au point zéro forment une suite indépendante de variables aléatoires complexes gaussiennes standard, c'est-à-dire, si elle s'écrit  $f = F((a_n)_{n \geq 0})$ , où la suite  $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$  est i.i.d. de loi gaussienne standard.

Il est facile de vérifier qu'une variable aléatoire analytique gaussienne i.i.d. est gaussienne. En effet, soit  $f$  une variable aléatoire analytique gaussienne i.i.d. et soient  $z_1, \dots, z_n$  dans  $U$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des nombres complexes. On a

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i f(z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( \sum_{i=0}^n \lambda_i z_i^k \right),$$

où  $(a_n)_{n \geq 0}$  est une suite indépendante de variables aléatoires complexes gaussiennes standard. Pour tout entier  $p$ ,  $\sum_{k=0}^p a_k (\sum_{i=0}^n \lambda_i z_i^k)$  est gaussienne donc  $\sum_{i=0}^n \lambda_i f(z_i)$  est gaussienne en tant que limite p.s. de variables aléatoires gaussiennes.

La propriété suivante montre qu'une variable aléatoire analytique gaussienne est caractérisée par le noyau

$$\mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}, (z, w) \mapsto \mathbf{E} \left( f(z) \overline{f(w)} \right),$$

qu'on appellera «*matrice de covariance*» par analogie avec les vecteurs gaussiens.

**Proposition 2.** Soient  $f$  et  $g$  deux variables aléatoires analytiques gaussiennes. Supposons que pour tous  $z_1, z_2$  dans  $U$  on ait  $\mathbf{E} \left( f(z_1) \overline{f(z_2)} \right) = \mathbf{E} \left( g(z_1) \overline{g(z_2)} \right)$ . Alors, les variables aléatoires  $f$  et  $g$  ont même loi.

**Démonstration.** Pour tous  $z_1, \dots, z_n$  dans  $U$ , les vecteurs  $(f(z_1), \dots, f(z_n))$  et  $(g(z_1), \dots, g(z_n))$  sont gaussiens donc caractérisés par leur matrice de covariance

$$\left( \mathbf{E} \left( f(z_i) \overline{f(z_j)} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \left( \mathbf{E} \left( g(z_i) \overline{g(z_j)} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

L'espace  $\mathcal{H}$  est muni de la tribu cylindrique donc les lois de  $f$  et  $g$  sont caractérisées par leurs lois fini-dimensionnelles. Donc  $f$  et  $g$  ont même loi.  $\square$

Le lemme suivant donne l'expression de la matrice de covariance d'une variable aléatoire analytique gaussienne i.i.d.  $f$ .

**Lemme 4.** Pour tout couple  $(z, w)$  dans  $U^2$ ,

$$\mathbf{E} f(z) \overline{f(w)} = \frac{1}{1 - z\overline{w}}.$$

**Démonstration.** On applique le théorème de Fubini et on utilise le fait que  $\{a_i\}$  est une famille orthonormale dans  $L^2$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (f(z) \overline{f(w)}) &= \mathbf{E} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^k a_p z^p \overline{a_{n-p} w^{n-p}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^k \mathbf{E} (a_p \overline{a_{n-p}}) z^p \overline{w}^{n-p} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{E} (|a_p|^2) z^p \overline{w}^p \\ &= (1 - z\overline{w})^{-1}. \end{aligned}$$

□

### 3.3 Le processus ponctuel $Z_f$

Considérons une variable aléatoire gaussienne  $f$ . On considère  $Z_f$  l'ensemble aléatoire des zéros de  $f$ . D'après le principe des zéros isolés,  $Z_f$  est p.s. dénombrable. On peut donc définir la mesure ponctuelle aléatoire

$$N_f = \sum_{a \in Z_f} \mathbf{1}_{\{a\}}.$$

Nous allons montrer que

$$(\Omega, P) \rightarrow \mathbf{N} \cup \{\infty\}, f \mapsto N_f(B)$$

est semi-continue inférieurement pour tout borélien  $B$  de  $U$ . Soit  $K$  un compact de  $U$ . Soit  $f \in \mathcal{H}$ .

Premier cas :  $f$  ne s'annule pas sur le bord  $\partial K$  de  $K$ . Soit  $(g_n)$  une suite convergeant vers  $f$ . À partir d'un certain rang,

$$\|g_n - f\| < \inf_{\partial K} |f|.$$

D'après le théorème de Rouché,  $f$  et  $g_n$  ont le même nombre de zéros dans l'intérieur  $\overset{\circ}{K}$  de  $K$ . Donc  $g \mapsto N_g(\overset{\circ}{K})$  est continue au point  $f$ .

Deuxième cas :  $f$  s'annule sur  $\partial K$ . Soit  $\tilde{K} \subset K$  tel que  $\tilde{K}$  est compact et contient  $Z_f \cap \overset{\circ}{K}$  dans son intérieur. Soit  $(g_n)$  une suite convergeant vers  $f$ . Comme dans le premier cas, on a, à partir d'un certain rang, que le nombre de zéros de  $g_n$  dans  $\overset{\circ}{\tilde{K}}$  est le même que celui pour  $f$ , c'est-à-dire qu'il est égal au nombre  $N_f(\overset{\circ}{K})$  de zéros de  $f$  dans  $\overset{\circ}{K}$ . Donc

$$\liminf N_{g_n}(\overset{\circ}{K}) \geq N_f(\overset{\circ}{K}).$$

En particulier, on obtient que pour tout rectangle ouvert  $K$  relativement compact dans  $U$ , l'application

$$f \mapsto N_f(\overset{\circ}{K})$$

est mesurable. L'ensemble des rectangles ouverts relativement compacts de  $U$  est une classe monotone qui engendre la tribu borélienne de  $U$ . Soit

$$F = \{B : f \mapsto N_f(B)\}.$$

Alors  $F$  est une classe monotone. En effet, si  $(B_n)$  est une suite croissante d'éléments de  $F$ , on a, pour tout  $f \in \mathcal{H}$  que

$$N_f(\cup_{n \geq 0} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_f(B_n).$$

Donc  $f \mapsto N_f(\cup_{n \geq 0} B_n)$  est mesurable comme limite de fonctions mesurables. Il découle maintenant du théorème de classe monotone que  $F$  contient tous les boréliens de  $U$ . Donc  $Z_f$  est un processus ponctuel et  $N : (f, B) \mapsto N_f(B)$  est sa mesure de comptage.

Le lemme suivant va nous permettre de montrer que le processus ponctuel  $Z_f$  est simple.

**Lemme 5.** *Soit  $f$  une variable aléatoire analytique gaussienne. Si pour tout  $z$  dans  $U$  la fonction aléatoire  $f$  n'a p.s. pas de zéro double en  $z$ , alors  $f$  n'a p.s. pas de zéro double.*

*Remarque.* L'hypothèse que la variable aléatoire analytique  $f$  soit gaussienne est cruciale : la variable aléatoire analytique  $z \mapsto (z-\gamma)^2$ , où  $\gamma$  est une variable aléatoire de loi à densité continue, ne s'annule p.s. en aucun point donné de  $U$ . Pourtant  $f$  possède p.s. le zéro double  $\gamma$ .

**Démonstration.** On peut supposer qu'il existe  $z_0$  dans  $U$  tel que  $W = f(z_0) - \mathbf{E}(f(z_0))$  n'est p.s. pas nul (sinon,  $f$  est une variable aléatoire constante et le lemme est trivial). Soit

$$g(z) = \frac{\mathbf{E}(f(z)\overline{W})}{\mathbf{E}(|W|^2)}$$

et

$$h(z) = f(z) - Wg(z).$$

Alors  $g$  est une fonction analytique déterministe,  $g(z_0) = 1$ , et  $\mathbf{E}(h(z)\overline{W}) = 0$ . Ainsi, pour tous  $z_1, \dots, z_k$  dans  $U$ , les variables aléatoire  $(h(z_1), \dots, h(z_k))$  et  $W$  sont indépendantes, puisque  $(h(z_1), \dots, h(z_k), W)$  est un vecteur gaussien. Donc  $h$  et  $W$  sont indépendants. Or  $g$  admet un nombre au plus dénombrable de zéros. On déduit de l'hypothèse que, p.s., tout zéro de  $g$  n'est pas un zéro double de  $f$ . Ainsi p.s., tout zéro double de  $f$  est aussi un zéro double de  $\psi = W + h/g = f/g$ . Si  $h/g$  est une constante aléatoire alors  $\psi$  aussi et p.s.  $\psi$  est non nulle par indépendance de  $W$  et  $h$ . Donc, p.s.,  $f$  n'a pas de zéro.

Sinon,  $\psi'$  a p.s. un nombre dénombrable de zéros  $\zeta_i$ . Soit  $\zeta$  une variable aléatoire à valeurs dans  $U$ . Soit  $\mathcal{F}(\Omega, \mathbf{C})$  l'ensemble des fonctions mesurables de  $\Omega$  dans  $\mathbf{C}$  muni de la topologie de la convergence simple. Soit

$$\hat{\zeta} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}(\Omega, \mathbf{C}), f \mapsto (\omega \mapsto \frac{f}{g}(\zeta(\omega))),$$

Alors  $\hat{\zeta}$  est continue donc mesurable. Ainsi  $\hat{\zeta}(h)$  est indépendant de  $W$  donc, p.s.  $-W \neq h/g(\zeta)$ . En admettant que l'ensemble des zéros de  $\psi'$  s'écrit  $Z_{\psi'} = \{\zeta_i, i \in \mathbf{N}\}$ , où les  $\zeta_i$  sont des variables aléatoires à valeurs dans  $U$ , on obtient que  $W \neq -(h/g)(\zeta_i)$ , pour tout  $i \in \mathbf{N}$ . Donc p.s.,  $\psi$  est non nulle et donc  $f$  n'a pas de zéro double.  $\square$

Pour tout  $z \in U$ ,  $f(z)$  suit une loi gaussienne donc p.s.  $f$  ne s'annule pas en  $z$ . En particulier tout  $z \in U$  n'est p.s. pas un zéro de  $f$ . Par le lemme 5,  $f$  n'a donc p.s. pas de zéro double. Donc le processus ponctuel  $Z_f$  est simple.

## 4 Formule de Hammersley pour les fonctions analytiques gaussiennes

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant qui donne une formule explicite pour l'intensité jointe du processus ponctuel  $Z_f$  dans le cas d'une variable aléatoire analytique gaussienne de moyenne ponctuelle nulle.

**Théorème 1.** *Soit  $f$  une variable aléatoire analytique gaussienne telle que  $\mathbf{E}f(z) = 0$  pour tout  $z$  dans  $U$ . Soit  $p$  l'intensité jointe de  $f$ . Soient  $z_1, \dots, z_n$  des points de  $U$ . On suppose que la matrice de covariance de  $\{f(z_k) : k = 1, \dots, n\}$ , notée  $A$ , est inversible. Alors*

$$p(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{\det(\pi A)} \mathbf{E} (|f'(z_1) \cdots f'(z_n)|^2 |f(z_1) = \cdots = f(z_n) = 0) .$$

### 4.1 Résultats préliminaires

**Lemme 6.** *Soit  $R \in [0, 1[$  et  $B$  le disque fermé de centre 0 et de rayon  $R$ . Pour tout entier positif  $m$ , il existe une constante  $c_m$  telle que*

$$|f^{(m)}(z)| \leq c_m \left( \int_U |f(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}}$$

pour toute fonction holomorphe  $f$  sur  $U$  et tout nombre complexe  $z$  appartenant à  $B$ .

**Démonstration.** Soient  $r_1$  et  $r_2$  tels que  $R < r_1 < r_2 < 1$ . D'après la formule de Cauchy, on a, pour tout  $z$  dans  $B$ , et tout  $r$  dans  $[r_1, r_2]$  :

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{(re^{i\theta} - z)^{m+1}} r e^{i\theta} d\theta .$$

Donc

$$|f^{(m)}(z)| \leq \frac{m!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{(r - R)^{m+1}} r d\theta .$$

Effectuons maintenant la moyenne pour  $r$  variant dans  $[r_1, r_2]$ . Nous obtenons

$$(r_2 - r_1) |f^{(m)}(z)| \leq \frac{m!}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{(r - R)^{m+1}} r dr d\theta .$$

Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(z)|^2 &\leq \left( \frac{m!}{2\pi} \right)^2 \left( \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 r dr d\theta \right) \right) \left( \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_0^{2\pi} \frac{1}{(r - R)^{2m+2}} r dr d\theta \right) \right) \\ &\leq c_m \int_{\{r_1 < |u| < r_2\}} |f(u)|^2 du \\ &\leq c_m \int_U |f|^2 . \end{aligned}$$

□

**Lemme 7.** Soit  $f$  une variable aléatoire analytique gaussienne. Soient  $r \in [0, 1[$  et  $B$  le disque de centre 0 et de rayon  $r$ . Pour tout entier  $n$ , soit

$$f_n(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

le développement de Taylor de  $f$  à l'ordre  $n$  en 0. Alors pour tout entier positif  $m$ ,

$$\sup_B \mathbf{E} \left( |f_n^{(m)} - f^{(m)}|^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'où, pour tout couple d'entiers  $(m_1, m_2)$ ,

$$\mathbf{E} \left( (f_n^{(m_1)} - f_n^{(m_1)}) \overline{(f_n^{(m_2)} - f_n^{(m_2)})} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left( (f^{(m_1)} - f^{(m_1)}) \overline{(f^{(m_2)} - f^{(m_2)})} \right)$$

uniformément sur  $B$ .

**Démonstration.** Remarquons tout d'abord que les dérivées d'une variable aléatoire analytique gaussienne sont aussi des v.a. analytiques gaussiennes. Soit  $r \in [0, 1[$  et  $B = B(0, r)$ . Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\int_B (\mathbf{E} (|f_n(z) - f(z)|^2)) dz \leq \pi r^2 \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Donc  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  dans  $L^2(\Omega \times B)$ . D'après le lemme 6,

$$\mathbf{E} \left( \sup_B |f_n^{(m)} - f^{(m)}|^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d'où

$$\sup_B \mathbf{E} \left( |f_n^{(m)} - f^{(m)}|^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On en déduit la convergence des matrices de covariance des dérivées de  $f_n$  vers celles de  $f$  puisque la suite  $(f_n^{(m)})_{n \geq 0}$  est bornée dans  $L^2(\Omega \times B)$  pour tout entier  $m$ .  $\square$

**Proposition 3.** Soit  $f$  une variable aléatoire analytique gaussienne telle que  $\mathbf{E}f(z) = 0$  pour tout  $z$  dans  $U$ . Soient  $z_1, \dots, z_n$  dans  $U$ . On considère les trois matrices suivantes. Soient

$$A = (\mathbf{E}(f(z_i) \overline{f(z_j)}))_{1 \leq i, j \leq n},$$

$$B = (\mathbf{E}(f'(z_i) \overline{f'(z_j)}))_{1 \leq i, j \leq n}$$

et

$$C = (\mathbf{E}(f'(z_i) \overline{f'(z_j)}))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Si  $A$  est inversible alors,

$$\mathbf{E} (|f'(z_1) \cdots f'(z_n)|^2 | f(z_1) = \cdots = f(z_n) = 0 ) = \text{perm}(C - BA^{-1}B^*). \quad (3)$$

où  $B^*$  désigne la transposée de la matrice conjuguée de  $B$ .

**Démonstration.** On vérifie que  $(f(z_1), \dots, f(z_n), f'(z_1), \dots, f'(z_n))$  est un vecteur gaussien en raisonnant comme au paragraphe 3.2. Soient  $X = (f(z_i))_{1 \leq i \leq n}$ ,  $Y = (f'(z_i))_{1 \leq i \leq n}$  et  $\mathcal{P}$  la projection orthogonale sur  $\text{Vect} \{X_i, i = 1, \dots, n\}^\perp$  dans  $L^2(\Omega)$ . Alors, on a

$$\mathbf{E}(|f'(z_1) \cdots f'(z_n)|^2 | f(z_1) = \cdots = f(z_n) = 0) = \mathbf{E}(|\mathcal{P}(f'(z_1)) \cdots \mathcal{P}(f'(z_n))|^2).$$

Or

$$\mathbf{E}[X(Y - BA^{-1}X)^*] = \mathbf{E}[XY^*] - \underbrace{\mathbf{E}[XX^*A^{-1}B^*]}_{\mathbf{E}[B^*]} = 0$$

donc

$$Y - BA^{-1}X = \mathcal{P}(Y).$$

On a alors

$$\text{Cov}(\mathcal{P}(Y)) = \text{Cov}(Y - BA^{-1}X) = \text{Cov}(Y) - \text{Cov}(BA^{-1}X) = C - BA^{-1}B^*.$$

On conclut en utilisant la proposition 9. □

## 4.2 Démonstration de la formule

Soient  $f$  une variable aléatoire analytique gaussienne et  $N$  la mesure de comptage de  $Z_f$ . On définit les trois matrices suivantes. Soient

$$A = (\mathbf{E}(f(z_i)\overline{f(z_j)}))_{1 \leq i, j \leq n},$$

$$B = (\mathbf{E}(f'(z_i)\overline{f(z_j)}))_{1 \leq i, j \leq n}$$

et

$$C = (\mathbf{E}(f'(z_i)\overline{f'(z_j)}))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Soit  $(f_m)_{m \geq 0}$  la suite des polynômes de Taylor de  $f$ . On définit, pour tout entier  $m$ , la mesure de comptage  $N_m$  et les matrices  $A_m$ ,  $B_m$  et  $C_m$  associées à  $f_m$  de la même manière que pour  $f$ .

Soit  $n$  un entier positif. En utilisant le théorème de Fubini, on prouve qu'il existe un ensemble dense  $\mathcal{R}$  de rectangles tels que pour tout  $R \in \mathcal{R}$ ,  $f$  ne s'annule pas sur le bord  $\partial R$  de  $R$ . Soient  $R_1, \dots, R_n$  des éléments disjoints de  $\mathcal{R}$ . La formule de Hammersley est vérifiée par tous les  $f_m$ . On a donc, pour tout entier  $m$ ,

$$\mathbf{E}(N_m(R_1) \cdots N_m(R_n)) = \int_{R_1 \times \cdots \times R_n} \frac{\text{perm}(C_m - B_m A_m^{-1} B_m^*)}{\det(\pi A_m)} dz_1 \cdots dz_n.$$

Soit  $R$  un rectangle inclus dans  $U$  sur le bord duquel p.s.  $f_m$  ne s'annule pas, pour aucun entier  $m$ . Le nombre de zéros de  $f_m$  dans  $R$  est donné par la formule,

$$N_m(R) = \int_{\partial R} \frac{f'_m}{f_m}.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $f_m$  converge p.s., et donc, par convergence dominée,

$$N_m(R) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} N(R).$$

On en déduit que

$$\mathbf{E}(N_m(R_1) \cdots N_m(R_n)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}(N(R_1) \cdots N(R_n)).$$

D'après le lemme 6, les matrices de covariance de  $f_m$  et  $f'_m$  convergent uniformément sur chaque  $R_i \times R_j$  vers celles de  $f$  et  $f'$ . D'où

$$\frac{\text{perm}(C_m - B_m A_m^{-1} B_m^*)}{\det(\pi A_m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{\text{perm}(C - BA^{-1}B^*)}{\det(\pi A)}.$$

Par convergence dominée,

$$\int_{R_1 \times \cdots \times R_n} \frac{\text{perm}(C_m - B_m A_m^{-1} B_m^*)}{\det(\pi A_m)} dz_1 \cdots dz_n \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{R_1 \times \cdots \times R_n} \frac{\text{perm}(C - BA^{-1}B^*)}{\det(\pi A)} dz_1 \cdots dz_n.$$

D'où

$$\mathbf{E}(N(R_1) \cdots N(R_n)) = \int_{R_1 \times \cdots \times R_n} \frac{\text{perm}(C - BA^{-1}B^*)}{\det(\pi A)} dz_1 \cdots dz_n.$$

Par un argument de classe monotone, on en déduit que pour tous boréliens  $B_1, \dots, B_n$  inclus dans  $U$ , on a

$$\mathbf{E}(N(B_1) \cdots N(B_n)) = \int_{B_1 \times \cdots \times B_n} \frac{\text{perm}(C - BA^{-1}B^*)}{\det(\pi A)} dz_1 \cdots dz_n.$$

Ceci démontre le théorème 1.

## 5 Caractère déterminantal du processus ponctuel $Z_f$ pour la série gaussienne i.i.d.

Le but de cette partie est de présenter le théorème suivant. Il s'agit du théorème principal de [1] qui stipule que le processus ponctuel des zéros d'une variable aléatoire analytique gaussienne i.i.d. est déterminantal et que son intensité jointe s'exprime comme un mineur du noyau de Bergman.

### 5.1 Calcul de l'intensité jointe intégrale de $Z_f$ pour la série gaussienne i.i.d.

**Théorème 2.** *Y. Peres et B. Virág (2005) Soit  $f$  une variable aléatoire analytique gaussienne i.i.d.. Soit  $p$  l'intensité jointe du processus ponctuel  $Z_f$ , formé des zéros de  $f$  dans  $U$ . Alors*

$$p(z_1, \dots, z_n) = \pi^{-n} \det \left[ \left( \frac{1}{(1 - z_i \bar{z}_j)^2} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right].$$



Le reste de cette partie est consacrée à la démonstration de ce théorème. Dans la suite, nous considérons  $f$  une variable aléatoire analytique gaussienne i.i.d.. On note  $p$  l'intensité jointe du processus ponctuel  $Z_f$ , formé des zéros de  $f$  dans  $U$ . Soit  $A$  la matrice de covariance de  $(f(z_1), \dots, f(z_n))$ . On rappelle (lemme 4) que

$$A_{ij} = \mathbf{E}f(z_i)\overline{f(z_j)} = \frac{1}{1 - z_i\bar{z}_j}.$$

Pour la démonstration nous utiliserons les deux lemmes suivants.

**Lemme 8.** Soient  $n, k \geq 1$ . Soit  $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_k)$  un vecteur gaussien centré à valeurs dans  $\mathbf{C}^{n+k}$ . Alors la loi conditionnelle de  $(X_1, \dots, X_n)$  sachant  $Y_1 = \dots = Y_k = 0$  est la loi du vecteur  $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ , où chaque  $\tilde{X}_i$  est la projection orthogonale de  $X_i$  sur  $\text{Vect}(Y_1, \dots, Y_k)^\perp$ .

**Démonstration.** □

**Lemme 9.** Soit  $f$  une variable aléatoire analytique gaussienne telle que pour tout  $n \geq 1$  et tous  $z_1, \dots, z_n$  dans  $U$ , deux à deux distincts,

$$A(z_1, \dots, z_n) = (\text{Cov}(f(z_i), f(z_j)))_{1 \leq i, j \leq n}$$

soit inversible. On suppose que pour tout  $n \geq 1$  et tout  $(z_1, \dots, z_n) \in U^n$ , il existe une variable aléatoire analytique gaussienne  $g$  telle que

- la loi de  $f$  sachant  $f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0$  est égale à la loi de  $g$
- la matrice de covariance de  $g$  est inversible.

Alors pour tout  $w$  dans  $U$ , distinct de  $z_1, \dots, z_n$ , la loi de  $f$  sachant  $f(z_1) = \dots = f(z_n) = f(w) = 0$  est égale à la loi de  $g$  sachant  $g(w) = 0$ .

**Démonstration.** Soient  $u_1, \dots, u_p, z_1, \dots, z_n, w$  dans  $U$ , deux à deux distincts. Le vecteur  $(f(u_1), \dots, f(u_p), f(z_1), \dots, f(z_n), f(w))$  est gaussien de densité  $\psi : U^{p+n+1} \rightarrow \mathbf{R}_+$ ,

$$X = (u_1, \dots, u_p, z_1, \dots, z_n, w) \mapsto \frac{1}{2\pi \det A(u_1, \dots, u_p, z_1, \dots, z_n, w)} \exp\left(-\frac{1}{2}X^* A^{-1} X\right).$$

Le vecteur  $(f(u_1), \dots, f(u_p), f(w))$  sachant  $f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0$  a pour densité  $\phi : U^{p+1} \rightarrow \mathbf{R}_+$ ,

$$(u_1, \dots, u_p, w) \mapsto \frac{\psi(u_1, \dots, u_p, 0, \dots, 0, w)}{\int_{U^{p+1}} \psi(u'_1, \dots, u'_p, 0, \dots, 0, w') du'_1 \cdots du'_p dw'}.$$

Le vecteur  $(g(u_1), \dots, g(u_p), g(w))$  a la même densité. Donc  $(g(u_1), \dots, g(u_p))$  sachant  $g(w) = 0$  a pour densité

$$\begin{aligned} \chi : U^p \rightarrow \mathbf{R}_+, (u_1, \dots, u_p, z_1, \dots, z_n, w) &\mapsto \frac{\phi(u_1, \dots, u_p, 0)}{\int_{U^p} \phi(u'_1, \dots, u'_p) du'_1 \cdots du'_p} \\ &= \frac{\psi(u_1, \dots, u_p, 0, \dots, 0, 0)}{\int_{U^p} \psi(u'_1, \dots, u'_p, 0, \dots, 0, 0) du'_1 \cdots du'_p}. \end{aligned}$$

On reconnaît la densité de la loi du vecteur gaussien  $(f(u_1), \dots, f(u_p))$  sachant  $f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0$ .

Alors l'égalité des lois fini-dimensionnelles impliquant l'égalité des lois, la loi de  $f$  sachant  $f(z_1) = \dots = f(z_n) = f(w) = 0$  est la loi de  $g$  sachant  $g(w) = 0$ .  $\square$

Introduisons d'emblée des notations qui seront utiles dans toute la démonstration. Pour  $a$  dans  $U$  considérons

$$T_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

une transformation de Möbius. Définissons aussi

$$\tau_a(z) = \frac{\sqrt{(1 - |a|^2)}}{1 - \bar{a}z}$$

de telle sorte que  $\tau_a^2(z) = T_a'(z)$ .

**Proposition 4.** *Soient  $z_1, \dots, z_n$  des éléments de  $U$ . Alors, la loi de la variable aléatoire analytique gaussienne  $z \mapsto T_{z_1}(z) \cdots T_{z_n}(z) f(z)$  est égale à la loi conditionnelle de  $f$  sachant  $f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0$ .*

**Démonstration.** Raisonnons par récurrence sur l'entier  $n$ . Considérons le cas où  $n = 1$ .

Traitons le cas  $z_1 = 0$ . Soient  $w_1, \dots, w_p$  appartenant à  $U$ . Le vecteur

$$(f(w_1), \dots, f(w_p), a_0)$$

est gaussien de moyenne nulle. La projection de  $f(z)$  sur  $\text{Vect}(a_0)$  est  $a_0$  car la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  est une famille orthonormale de  $L^2$ . Donc, par le lemme 8, la loi de

$$(f(w_1), \dots, f(w_p))$$

sachant  $a_0 = 0$  est la loi de  $(f(w_1) - a_0, \dots, f(w_p) - a_0)$ . L'égalité

$$f(z) - a_0 = zF((a_{n+1})_{n \geq 0})(z),$$

montre que  $f - a_0$  a même loi que  $z \mapsto zf(z)$ , puisque  $(a_{n+1})_{n \geq 0}$  a même loi que  $(a_n)_{n \geq 0}$ . Donc  $(f(w_1) - a_0, \dots, f(w_p) - a_0)$  a même loi que  $(w_1 f(w_1), \dots, w_p f(w_p))$ . Ainsi la loi de  $f$  sachant  $f(0) = 0$  est égale à la loi de  $z \mapsto zf(z)$ .

Supposons maintenant que  $z_1 = a$ , pour un certain  $a$  dans  $U$ . Pour se ramener au cas précédent on considère la variable aléatoire analytique gaussienne  $\tilde{f} : z \mapsto \tau_a(z) f(T_a(z))$ . Le calcul de la matrice de covariance de  $\tilde{f}$  montre que  $f$  et  $\tilde{f}$  ont même loi. En effet, pour tout couple  $(z, w)$  dans  $U^2$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \tilde{f}(z) \overline{\tilde{f}(w)} \right) &= \tau_a(z) \overline{\tau_a(w)} \mathbf{E} \left( f(T_a(z)) \overline{f(T_a(w))} \right) \\ &= \tau_a(z) \overline{\tau_a(w)} \frac{1}{1 - T_a(z) \overline{T_a(w)}} \\ &= \frac{1}{1 - z \bar{w}} \\ &= \mathbf{E} \left( f(z) \overline{f(w)} \right). \end{aligned}$$

Donc par la propriété 5,  $f$  et  $\tilde{f}$  ont même loi.

Pour tous  $z, w$  dans  $U$ , la projection orthogonale de  $\tau_a(w)f(z)$  sur  $\text{Vect}(a_0)$  est  $\tau_a(w)a_0$ . Soient  $w_1, \dots, w_p, z_1, \dots, z_p$  dans  $U$ . Par le lemme 8, la loi de

$$(\tau_a(w_1)f(z_1), \dots, \tau_a(w_p)f(z_p))$$

sachant  $\tilde{f}(a) = 0$  est la loi de

$$(\tau_a(w_1)f(z_1) - \tau_a(w_1)a_0, \dots, \tau_a(w_p)f(z_p) - \tau_a(w_p)a_0).$$

Or  $(z, w) \mapsto \tau_a(w)f(z) - \tau_a(w)a_0$  a même loi que  $(z, w) \mapsto \tau_a(w)zf(z)$ . Donc

$$(\tau_a(w_1)f(z_1) - \tau_a(w_1)a_0, \dots, \tau_a(w_p)f(z_p) - \tau_a(w_p)a_0)$$

a même loi que

$$(\tau_a(w_1)z_1f(z_1), \dots, \tau_a(w_p)z_pf(z_p)).$$

En choisissant  $z_i = T_a(w_i)$  on obtient que la loi de

$$(\tilde{f}(w_1), \dots, \tilde{f}(w_p))$$

sachant  $\tilde{f}(a) = 0$  est la loi de

$$(T_a(w_1)\tilde{f}(w_1), \dots, T_a(w_p)\tilde{f}(w_p)).$$

Ainsi la loi de  $\tilde{f}$  sachant  $\tilde{f}(a) = 0$  est la loi de  $z \mapsto T_a(z)\tilde{f}(z)$  car une mesure sur  $\mathcal{H}$  est caractérisée par sa valeur sur les voisinages cylindriques. Donc la loi de  $f$  sachant  $f(a) = 0$  est la loi de  $z \mapsto T_a(z)f(z)$ .

Ceci démontre le cas  $n = 1$ .

Soit  $n \geq 1$  tel que la propriété soit vérifiée pour tout  $k \leq n$ . D'après l'hypothèse de récurrence et le lemme 9, la loi de  $f$  sachant  $f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0$  est égale à la loi de  $T_{z_1} \cdots T_{z_n} f$  sachant  $T_{z_1}(z_{n+1}) \cdots T_{z_n}(z_{n+1})f(z_{n+1}) = 0$ . Soit  $\alpha_n$  la fonction holomorphe déterministe  $T_{z_1} \cdots T_{z_n}$ .

Soit  $(u_1, \dots, u_p) \in (U \setminus \{z_1, \dots, z_{n+1}\})^p$ . La loi du vecteur gaussien

$$((\alpha_n f)(u_1), \dots, (\alpha_n f)(u_p))$$

sachant  $(\alpha_n f)(z_{n+1}) = 0$  est la loi de la projection orthogonale de  $((\alpha_n f)(u_1), \dots, (\alpha_n f)(u_p))$  sur  $\text{Vect}(f(z_{n+1}))^\perp$ , c'est-à-dire la loi de  $((\alpha_n G_1)(u_1), \dots, (\alpha_n G_p)(u_p))$ , où  $(G_1, \dots, G_p)$  est la projection orthogonale de  $(f(u_1), \dots, f(u_p))$  sur  $\text{Vect}(f(z_{n+1}))^\perp$ . D'après le cas  $n = 1$ ,  $(G_1, \dots, G_p)$  a même loi que  $(T_{z_{n+1}}(u_1)f(u_1), \dots, T_{z_{n+1}}(u_p)f(u_p))$ . Donc

$$((\alpha_n G_1)(u_1), \dots, (\alpha_n G_p)(u_p))$$

a même loi que  $((T_{z_1} \cdots T_{z_{n+1}})(u_1)f(u_1), \dots, (T_{z_1} \cdots T_{z_{n+1}})(u_p)f(u_p))$ . Ceci étant vrai pour tout  $p$ -uplet  $(u_1, \dots, u_p)$ , on a la propriété au rang  $n + 1$ .  $\square$

Soient  $z_1, \dots, z_n$  dans  $U$  deux à deux distincts. Soit

$$\Upsilon : U \rightarrow \mathbf{C}, z \mapsto \prod_{i=1}^n T_{z_i}(z).$$

**Corollaire.** La loi de  $(f'(z_1), \dots, f'(z_n))$  sachant  $f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0$  est la loi de  $(\Upsilon'(z_1)f(z_1), \dots, \Upsilon'(z_n)f(z_n))$ .

**Démonstration.** Soit  $D : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  l'opérateur de dérivation. Il est continu donc mesurable pour la tribu cylindrique. D'après la proposition, pour tout  $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$  mesurable,

$$\mathbf{E}(h(D(f)) | f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0) (0) = \mathbf{E}(h(D(\Upsilon f))) .$$

Donc la loi de  $D(f)$  sachant  $f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0$  est la loi de  $D(\Upsilon f)$ . En particulier, la loi de  $(f'(z_1), \dots, f'(z_n))$  sachant  $f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0$  est la loi de  $(\Upsilon'(z_1)f(z_1), \dots, \Upsilon'(z_n)f(z_n))$ , puisque  $\Upsilon(z_i) = 0$ .  $\square$

D'après la formule de Hammersley,

$$p(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{\det(\pi A)} \mathbf{E}(|f'(z_1) \cdots f'(z_n)|^2 | f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0) .$$

D'après le corollaire 5.1, le numérateur du membre de droite de cette égalité vaut

$$\mathbf{E}(|f(z_1) \cdots f(z_n)|^2) \prod_{k=1}^n |\Upsilon'(z_k)|^2 .$$

Le déterminant de la matrice de covariance de  $f$  est un déterminant de Cauchy (voir Appendice B) qui vaut

$$\det(A) = \prod_{j,k} \frac{1}{1 - z_j \bar{z}_k} \prod_{k < j} (z_j - z_k)(\bar{z}_j - \bar{z}_k) .$$

Puisque  $T_{z_k}(z_k) = 0$  et que  $T'_{z_k}(z_k) = \frac{1}{1 - z_k \bar{z}_k}$ , nous obtenons, pour tout  $k \leq n$ ,

$$\Upsilon'(z_k) = T'_{z_k}(z_k) \cdot \prod_{i:i \neq k} T_{z_i}(z_k) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - z_i \bar{z}_k} \cdot \prod_{i:i \neq k} (z_i - z_k) .$$

Donc

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n |\Upsilon'(z_k)|^2 &= \prod_{j,k} \frac{1}{|1 - z_j \bar{z}_k|^2} \cdot \prod_{k=1}^n \prod_{j:j \neq k} |z_j - z_k|^2 \\ &= \prod_{j,k} \frac{1}{|1 - z_j \bar{z}_k|^2} \cdot \prod_{k < j} |z_j - z_k|^2 \cdot \prod_{j < k} |z_j - z_k|^2 \\ &= \prod_{j,k} \frac{1}{|1 - z_j \bar{z}_k|^2} \cdot \left( \prod_{k < j} |z_j - z_k|^2 \right)^2 \\ &= |\det(A)|^2 \\ &= (\det(A))^2 . \end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que  $A$  est une matrice hermitienne positive et donc que  $\det(A)$  est un nombre réel positif. De plus, il résulte d'une propriété des vecteurs gaussiens (voir Appendice B) que

$$\mathbf{E}(|f(z_1) \cdots f(z_n)|^2) = \text{perm } A.$$

Soit  $M$  la matrice définie par

$$M_{ij} = (1 - z_i \bar{z}_j)^{-2}.$$

Alors, d'après la formule de Borchardt (voir Appendice B),

$$\text{perm} \left( \frac{1}{x_i - y_j} \right) \det \left( \frac{1}{x_i - y_j} \right) = \det \left( \frac{1}{(x_i - y_j)^2} \right).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \text{perm}(A) \det(A) &= \text{perm} \left( \frac{1}{1 - z_i \bar{z}_j} \right) \det \left( \frac{1}{1 - z_i \bar{z}_j} \right) \\ &= \text{perm} \left( \frac{z_i^{-1}}{z_i^{-1} - \bar{z}_j} \right) \det \left( \frac{z_i^{-1}}{z_i^{-1} - \bar{z}_j} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n z_i^{-2} \text{perm} \left( \frac{1}{z_i^{-1} - \bar{z}_j} \right) \det \left( \frac{1}{z_i^{-1} - \bar{z}_j} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n z_i^{-2} \det \left( \frac{1}{(z_i^{-1} - \bar{z}_j)^2} \right) \\ &= \det(M). \end{aligned}$$

D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} p(z_1, \dots, z_n) &= \frac{1}{\det(\pi A)} \mathbf{E}(|f(z_1) \cdots f(z_n)|^2) \prod_{k=1}^n |\Upsilon'(z_k)|^2 \\ &= \pi^{-n} \frac{1}{\det(A)} \text{perm}(A) (\det(A))^2 \\ &= \pi^{-n} \det(M) \\ &= \pi^{-n} \det \left( \frac{1}{(1 - z_i \bar{z}_j)^2} \right)_{i,j}. \end{aligned}$$

## 5.2 Égalité des intensités jointes intégrales et ponctuelles

Nous allons montrer que les intensités jointes intégrale et ponctuelle coïncident pour une variable aléatoire analytique gaussienne i.i.d.. Ceci est aussi vrai pour une variable aléatoire analytique gaussienne mais la démonstration est plus compliquée (voir [1]). Nous avons encore besoin d'un dernier lemme.

**Lemme 10.** Soient  $z_1, \dots, z_n$  dans  $U$ . Supposons que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  les variables aléatoires  $f'(z_j), f(z_1), \dots, f(z_n)$  soient linéairement indépendantes. Alors il existe des voisinages  $D_i$  de chaque point  $z_i$  tels que, pour tout  $j = 1, \dots, n$  et pour tout  $(w_1, \dots, w_n, w_*) \in D_1 \times \dots \times D_n \times D_j$ , l'intensité intégrale du processus  $Z_f$  soit définie et vérifie

$$p(w_1, \dots, w_n, w_*) \leq c |w_j - w_*|^2 \quad (4)$$

**Démonstration.** D'après les calculs de la fin de la démonstration du théorème 2,

$$p(w_1, \dots, w_{n+1}) = \pi^{-n} \det(A) \operatorname{perm}(A),$$

où

$$A = \left( \frac{1}{1 - w_i \overline{w_j}} \right)_{1 \leq i, j \leq n+1}.$$

Toujours d'après les mêmes calculs, on a

$$\det(A) = \prod_{j,k} \frac{1}{1 - w_j \overline{w_k}} \prod_{k < j} |w_j - w_k|^2.$$

Soient  $D_i$  des voisinages de chaque point  $z_i$ , dont l'adhérence est incluse dans  $U$ . Soit  $r$  la distance de  $\cup_{i=1}^n D_i$  au bord de  $U$ . Alors pour tout  $j = 1, \dots, n$  et tout

$$(w_1, \dots, w_n, w_{n+1}) \in D_1 \times \dots \times D_n \times D_j,$$

on a

$$\operatorname{perm}(A) \leq \frac{n!}{r^n}$$

et

$$\det(A) \leq r^{-n^2} 2^{n(n-1)/2-1} |w_j - w_{n+1}|^2.$$

On obtient donc la majoration voulue.  $\square$

Considérons maintenant une variable aléatoire analytique gaussienne. Soit  $p$  son intensité jointe intégrale. Soit  $F_\varepsilon = \{N(B(z_i, \varepsilon)) \geq 1, \forall i = 1, \dots, n\}$  l'événement « $f$  admet un zéro dans chaque  $B_\varepsilon(z_i)$ ». L'intensité intégrale du processus,

$$p(z_1, \dots, z_n) = \pi^{-n} \det \left( \frac{1}{(1 - z_i \overline{z_j})^2} \right),$$

est continue. On a donc

$$\begin{aligned} P(F_\varepsilon) &\leq \mathbf{E}(N(B(z_1, \varepsilon)) \cdots N(B(z_n, \varepsilon))) \\ &= \int_{B(z_1, \varepsilon) \times \dots \times B(z_n, \varepsilon)} p(z_1, \dots, z_n) dz_1 \cdots dz_n \\ &= p(z_1, \dots, z_n) \pi^n \varepsilon^{2n} + o(\varepsilon^{2n}). \end{aligned}$$

Si pour un certain  $1 \leq j \leq n$ ,  $f'(z_j)$  s'écrit comme une combinaison linéaire des  $(f(z_i))_{1 \leq i \leq n}$ , alors

$$p(z_1, \dots, z_n) = E(|f'(z_1) \cdots f'(z_n)|^2 | f(z_1) = \cdots = f(z_n) = 0) = 0.$$

Sinon on est dans le cas du lemme 10 et le lemme 2 s'applique. On a

$$P(F_\varepsilon) \leq p(z_1, \dots, z_n) \pi^n \varepsilon^{2n} + o(\varepsilon^{2n}) \leq P(F_\varepsilon) + o(\varepsilon^{2n}).$$

Donc

$$p(z_1, \dots, z_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(F_\varepsilon)}{(\pi \varepsilon^2)^n}.$$

Donc l'intensité jointe ponctuelle existe et coïncide avec l'intensité jointe intégrale.

## 6 Calcul de la mesure de comptage de $Z_f$ pour la série gaussienne i.i.d.

**Théorème 3.** *Soit  $f$  une variable aléatoire analytique gaussienne i.i.d.. Pour tout  $r$  dans  $[0, 1[$ , notons  $N_r = N(B(0, r))$  le cardinal de  $Z_f \cap B(0, r)$ .*

(i) *Alors, pour tout réel  $s$ ,*

$$\mathbf{E}(1 + s)^{N_r} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + r^{2k} s).$$

*Cela signifie que  $N_r$  a même loi que  $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ , où  $(X_k)_{k \geq 1}$  est une suite indépendante de variables aléatoires de Bernoulli à valeurs dans  $\{0, 1\}$  telles que  $P(X_k = 1) = r^{2k}$ .*

(ii) *De plus, l'ensemble des modules des zéros a même loi que l'ensemble  $\left\{U_k^{\frac{1}{2k}}\right\}$ , où  $(U_k)_{k \geq 1}$  est une suite indépendante de variables uniformes dans  $[0, 1]$ .*

Montrons la partie (i) du théorème.

**Lemme 11.** *Soient  $r_1 \leq \cdots \leq r_m$ ,  $B_j = B(0, r_j)$ , et  $\tilde{N}_j = \text{card}(Z \cap B_j)$ . Alors*

$$E[\tilde{N}_1(\tilde{N}_2 - 1) \cdots (\tilde{N}_m - m + 1)] = \sum_{\sigma \in S_m} \prod_{\eta \in \mathcal{C}(\sigma)} (-1)^{|\eta|+1} \frac{r_\eta^2}{1 - r_\eta^2} \quad (5)$$

où  $\mathcal{C}(\sigma)$  est l'ensemble des cycles apparaissant dans la décomposition en cycles à support disjoint de  $\sigma$ ,  $|\eta|$  est la longueur du cycle  $\eta$  et  $r_\eta = \prod_{j \in \text{supp}(\eta)} r_j$ .

**Démonstration.** Appliquons le théorème 2 à l'ensemble  $B_1 \times \cdots \times B_m$ . On a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\tilde{N}_1(\tilde{N}_2 - 1) \cdots (\tilde{N}_m - m + 1)] &= \int_{B_1 \times \cdots \times B_m} p(z_1, \dots, z_m) dz_1 \cdots dz_m \\ &= \int_{B_1 \times \cdots \times B_m} \det(K(z_i, z_j))_{i,j} dz_1 \cdots dz_m \end{aligned}$$

où

$$K(z_i, z_j) = \pi^{-1} \frac{1}{(1 - z_i \bar{z}_j)^2}.$$

En développant le déterminant et en permutant somme et intégrale, on obtient

$$\sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon(\sigma) \int_{B_1 \times \dots \times B_m} K(z_1, z_{\sigma(1)}) \cdots K(z_m, z_{\sigma(m)}) dz_1 \cdots dz_m.$$

Chaque intégrale s'écrit comme produit des

$$I_\eta = \int_{B_{\eta_1} \times \dots \times B_{\eta_{|\eta|}}} K(z_1, z_2) K(z_2, z_3) \cdots K(z_{|\eta|}, z_1) dz_1 \cdots dz_{|\eta|},$$

pour  $\eta \in \mathcal{C}(\sigma)$ . On a

$$K(z_1, z_2) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) (z_1 \bar{z}_2)^n.$$

Les monômes qui ne sont pas homogènes en  $z_i$  et  $\bar{z}_i$  sont d'intégrale nulle. On obtient ainsi

$$I_\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-|\eta|} \int_{B_{\eta_1} \times \dots \times B_{\eta_{|\eta|}}} (n+1)^{|\eta|} |z_1 \cdots z_{|\eta|}|^{2n} dz_1 \cdots dz_{|\eta|}.$$

Comme

$$(n+1) \int_{B(0,r)} |z|^{2n} dz = 2\pi(n+1) \int_0^r r^{2n+1} dr = \pi r^{2n+2},$$

on a, en posant  $r_\eta = \prod_{j \in \text{supp}(\eta)} r_j$ , que

$$I_\eta = \sum_{n=0}^{\infty} r_\eta^{2(n+1)} = \frac{r_\eta^2}{1 - r_\eta^2}.$$

De plus,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{\eta \in \mathcal{C}(\sigma)} (-1)^{|\eta|+1}.$$

Ceci conclut la preuve. □

Soit  $\beta_m = E\left[\binom{N_r}{m}\right]$ . Soient  $\sigma$  une permutation aléatoire de  $\{1, \dots, m\}$  de loi uniforme. Posons  $q = r^2$ . D'après le lemme précédent,

$$\begin{aligned} \beta_m &= \frac{1}{m!} \sum_{g \in S_m} \prod_{y \in \mathcal{C}(g)} (-1)^{|y|} \frac{q^{|y|}}{1 - q^{|y|}} \\ &= \mathbf{E}\left[ \prod_{y \in \mathcal{C}(\sigma)} (-1)^{|y|} \frac{q^{|y|}}{1 - q^{|y|}} \right]. \end{aligned}$$



Soit  $\eta_1 \in \mathcal{C}(\sigma)$  le cycle dont le support contient 1 et  $\mathcal{C}_{1,l}$  l'ensemble des cycles de longueur  $l$  dont le support contient 1. On en déduit que

$$P[|\eta_1| = k] = \frac{\binom{m-1}{k-1}(m-k)!}{m!} = 1/m,$$

la longueur de  $\eta_1$  est uniforme sur  $\{1, \dots, m\}$  et que si  $g$  est une permutation de  $\{1, \dots, m\} \setminus \text{supp}(\eta_1)$  et  $c \in \mathcal{C}_{1,l}$ ,

$$P[\sigma_{\{1, \dots, m\} \setminus (\text{supp}(\eta_1))} = \frac{1}{(m-l)!}$$

donc la loi de  $\sigma_{\{1, \dots, m\} \setminus \text{supp}(\eta_1)}$  sachant  $\eta_1$  est uniforme sur  $S_{m-l}$ . De plus si  $c, c' \in \mathcal{C}_{1,l}$  alors

$$\mathbf{E}\left[\prod_{y \in \mathcal{C}(\sigma_{\{1, \dots, m\} \setminus \text{supp}(\eta_1)})} (-1)^{|y|} \frac{q^{|y|}}{1 - q^{|y|}} \mid \eta_1 = c\right] = \mathbf{E}\left[\prod_{y \in \mathcal{C}(\sigma_{\{1, \dots, m\} \setminus \text{supp}(\eta_1)})} (-1)^{|y|} \frac{q^{|y|}}{1 - q^{|y|}} \mid \eta_1 = c'\right].$$

Si  $c \in \mathcal{C}_{1,l}$ ,

$$\beta_m = \sum_{l=1}^m P[|\eta_1| = l] (-1)^{l+1} \frac{q^l}{1 - q^l} E\left[\prod_{y \in \mathcal{C}(\sigma_{\{1, \dots, m\} - \text{supp}(\eta_1)})} (-1)^{|y|} \frac{q^{|y|}}{1 - q^{|y|}} \mid \eta_1 = c\right],$$

et donc

$$\beta_m = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m (-1)^{l+1} \frac{q^l}{1 - q^l} \beta_{m-l} \quad (6)$$

Soit  $\beta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m s^m$ , on obtient, en multipliant par  $s^m$  et en sommant sur  $m$ , que

$$s\beta'(s) = \sum_{m \geq 1} \sum_{l=1}^m (-1)^{l-1} \frac{q^l}{1 - q^l} \beta_{m-l} s^m = \beta(s) s \psi(s),$$

où le deuxième élément du produit de Cauchy est

$$\psi(s) = \sum_{l=1}^{\infty} (-s)^{l-1} \frac{q^l}{1 - q^l} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-s)^{l-1} q^{ml}.$$

L'égalité se réécrit  $(\log(\beta))'(s) = \psi(s)$ . Sachant que  $\beta_0 = 1$ , on obtient en intégrant terme à terme et en appliquant Fubini, que

$$\log(\beta(s)) = - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-sq^m)^l}{l} = \sum_{m=1}^{\infty} \log(1 + q^m s).$$

On a ainsi

$$\beta(s) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k s) \quad (7)$$

Or  $(s+1)^{N_r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N_r}{k} s^k$ , donc en prenant l'espérance on obtient

$$\mathbf{E}(s+1)^{N_r} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k s^k = \beta(s),$$

soit l'identité recherchée.

Donnons maintenant une idée de la preuve de la partie (ii) du théorème portant sur la répartition des zéros.

L'ensemble des zéros de  $f$  est un processus déterminantal avec un noyau de Bergman

$$K(z, w) = \pi^{-1} \frac{1}{(1 - z\bar{w})^2}.$$

Soit

$$K_n(z, w) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)(z\bar{w})^j.$$

Alors  $K_n$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{U}^2$ . On peut alors montrer qu'il suffit de vérifier que le processus  $\{|\zeta_1|, \dots, |\zeta_n|\}$ , où  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$  est un processus déterminantal de noyau  $K_n$ , a même loi que  $\{U_k\}_{k=1}^n$ , où  $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$  est i.i.d de loi uniforme sur  $[0, 1]$

Calculons l'intensité jointe de  $\{|\zeta_1|, \dots, |\zeta_n|\}$  évalué en  $r_1, \dots, r_n$ . En posant  $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ , on a

$$p(r_1, \dots, r_n) = \int_{[0, 2\pi]^n} \det(K_n(z_i, z_j))_{1 \leq i, j \leq n} r_1 d\theta_1 \cdots r_n d\theta_n.$$

On a

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} K_n(z_1, z_1) & \cdots & K_n(z_1, z_n) \\ \vdots & & \vdots \\ K_n(z_n, z_1) & \cdots & K_n(z_n, z_n) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \cdots & \bar{z}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{z}_1^{n-1} & \bar{z}_2^{n-1} & \cdots & \bar{z}_n^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
p(r_1, \dots, r_n) &= \frac{n!}{\pi} \int_{[0, 2\pi]^n} \left( \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n z_j^{\sigma(j)-1} \right) \left( \sum_{g \in S_n} \varepsilon(g) \prod_{j=1}^n \bar{z}_j^{g(j)-1} \right) r_1 d\theta_1 \cdots r_n d\theta_n \\
&= \frac{n!}{\pi} \sum_{\sigma, g \in S_n} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(g) \prod_{j=1}^n r_j^{\sigma(j)+g(j)-1} \underbrace{\prod_{j=1}^n \int_{[0, 2\pi]} e^{i\theta_j(\sigma(j)-g(j))} d\theta_j}_{=\delta_{\sigma, g}} \\
&= 2^n n! \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n r_j^{2\sigma(j)-1}.
\end{aligned}$$

Or  $U_j^{\frac{1}{2j}}$  a pour densité  $2jx^{2j-1}dx$  sur  $[0, 1]$ . Donc par indépendance des  $U_j$ , et par un raisonnement analogue à 1.1  $\{U_1^{\frac{1}{2}}, \dots, U_n^{\frac{1}{2n}}\}$  a pour intensité jointe

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(\pi\epsilon^2)^n} \sum_{\sigma \in S_n} P[(U_{\sigma(1)}^{\frac{1}{2\sigma(1)}}, \dots, U_{\sigma(n)}^{\frac{1}{2\sigma(n)}}) \in B(r_1, \epsilon) \times \cdots \times B(r_n, \epsilon)] = 2^n n! \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n r_j^{2\sigma(j)-1}.$$

On en déduit que  $\{|\zeta_1|, \dots, |\zeta_n|\}$  a même loi que  $\{U_1^{\frac{1}{2}}, \dots, U_n^{\frac{1}{2n}}\}$ .

On déduit du théorème 3 que  $N_r$  a même fonction génératrice et donc même loi que  $\sum_{k=0}^{\infty} X_k$ , où  $(X_k)_{k \geq 0}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre  $r^{2k}$ . On peut alors obtenir des informations sur le comportement asymptotique de  $N_r$  quand  $r \rightarrow 1$ . Par ailleurs, une formule d'Euler donne la valeur de  $E\left(\binom{N_r}{k}\right)$ .

**Corollaire.** 1. Le quotient  $\frac{\binom{N_r - \mu_r}{\sigma_r}}{\sigma_r}$ , avec  $\mu_r = E[N_r] = \frac{r^2}{1-r^2}$  et  $\sigma_r^2 = \text{var}(N_r) = \frac{r^2}{1-r^4}$ , converge en loi vers la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

2. Soit  $h = 4\pi \frac{r^2}{1-r^2}$ . On a

$$P(N_r = 0) = {}_r \nearrow 1 \exp\left(\frac{-\pi h + o(h)}{24}\right) = \exp\left(\frac{-\pi^2 + o(1)}{12(1-r)}\right).$$

3. Le moment binomial de  $N_r$  vaut

$$E\left(\binom{N_r}{k}\right) = \frac{r^{k(k+1)}}{(1-r^2) \cdots (1-r^{2k})}.$$

**Démonstration.** Le point 3. découle de la formule suivante. On a

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^k s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{k+1}{2}} s^k}{(1-q) \cdots (1-q^k)}.$$

On peut montrer 1. en estimant la fonction caractéristique  $\Phi_r$  de  $\sum_{k=1}^{\infty} Y_k$ , où  $Y_k = X_k - r^{2k}$ . On a

$$\Phi_r(\lambda) = \mathbf{E}[\exp(i \sum_{k=1}^{\infty} \lambda Y_k)] = \prod_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\lambda),$$

où  $\Phi_k(\lambda) = \mathbf{E}[\exp(i \lambda Y_k)]$ . Le développement de Taylor avec reste intégrale donne

$$\Phi_k(\lambda) = 1 - \frac{1}{2} E[Y_k^2] \lambda^2 + R_k(\lambda),$$

avec  $R_k(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^2}{2} \Phi_k^{(3)}(t) dt$ . De plus, pour  $|\lambda| \leq 1$ , il existe une constante  $K > 0$  telle que

$$\left| \Phi_k + \frac{1}{2} E[Y_r^2] \lambda^2 - 1 \right| \leq K |\lambda|^3 r^{2k}.$$

On a donc

$$\log(\Phi(\frac{\lambda}{\sigma_r})) = \sum_{k=1}^{\infty} \log(\Phi_k(\frac{\lambda}{\sigma_r}))$$

et il existe une constante  $K' > 0$  telle que pour  $|\lambda| \leq 1$ , on a

$$\left| \log(\Phi_k(\frac{\lambda}{\sigma_r})) + \frac{1}{2} \mathbf{E}[Y_r^2] \frac{\lambda^2}{\sigma_r^2} \right| \leq K' \frac{r^{2k}}{\sigma_r^3}.$$

D'où

$$\log(\Phi_r(\lambda_{\sigma_r})) =_{r \nearrow 1} -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}[(X_k - r^{2k})] \frac{\lambda^2}{\sigma_r^2} + o(1) = -1/2 \lambda^2 + o(1)$$

et

$$\Phi_r(\lambda) =_{r \nearrow 1} \exp(-\frac{\lambda^2}{2}) + o(1),$$

soit le résultat escompté.

Montrons le point 2.. Le théorème 2 entraîne que  $P[N_r = 0] = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - r^{2k})$ . Comparons la somme

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 - r^{2k}) = \log(P[N_r = 0])$$

à l'intégrale

$$I = \int_1^{\infty} \ln(1 - r^{2x}) dx.$$

On a

$$I + \ln(1 - r^2) < S < I$$

donc

$$S =_{h \nearrow \infty} I + o(h).$$

De plus,

$$I = \frac{1}{-2\ln(r)} \int_{-2\ln(r)}^{\infty} \ln(1 - e^{-x}) dx$$

et  $\ln(1 - e^{-x}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kx}}{k}$ . Donc

$$\int_{-2\ln(r)}^{\infty} \ln(1 - e^{-x}) dx \xrightarrow{r \nearrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Comme

$$\frac{-1}{2\ln(r)} \xrightarrow{r \nearrow 1} \frac{1}{2} \frac{1 + o(1)}{1 - r} = \frac{h}{4\pi} + o(h),$$

on a

$$S \xrightarrow{r \nearrow 1} -\frac{\pi^2 + o(1)}{1 - r} = -\frac{\pi h}{24} + o(h),$$

ce qui correspond au résultat souhaité.  $\square$

## A Quelques rappels sur les vecteurs gaussiens complexes

Dans l'exposé nous avons considéré  $\mathbf{C}$  comme un espace mesuré. La tribu est la tribu borélienne et la mesure habituelle est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^2$  identifié à  $\mathbf{C}$ . On dit qu'une variable aléatoire à valeurs complexes (dite complexe) est *gaussienne* de moyenne  $m \in \mathbf{C}$  et de paramètre  $\sigma^2 \in \mathbf{R}$  si sa loi est une mesure de densité

$$\frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{|z-m|^2}{\sigma^2}}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur le plan.

Un *vecteur gaussien complexe* est une variable aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$  à valeurs dans  $\mathbf{C}^n$  (pour un certain entier  $n$ ) telle que toute combinaison linéaire des  $X_i$  est gaussienne.

On définit la *moyenne* d'un vecteur gaussien par  $m(X) = (\mathbf{E}(X_1), \dots, \mathbf{E}(X_n))$  et la *matrice de covariance* par

$$(\mathbf{E}(X_i \overline{X_j}))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

**Proposition 5.** *La loi d'un vecteur gaussien est caractérisée par sa moyenne et sa matrice de covariance.*

**Proposition 6.** *Soient  $X$  et  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  deux variables aléatoires gaussiennes à valeurs respectivement dans  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}^n$ . On suppose que  $(X, Y_1, \dots, Y_n)$  est gaussien. Alors la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $Y$  est donnée par la formule*

$$\nu(Y, dz) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|z - \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i|^2}{2\sigma^2}} dz,$$

où

$$\sigma^2 = \mathbf{E} \left( \left| X - \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i \right|^2 \right),$$

et  $\sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i$  est la projection orthogonale dans  $L^2$  de  $X$  sur  $\text{Vect}\{Y_1, \dots, Y_n\}$ .

**Corollaire.** Soient  $X$  et  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  deux variables aléatoires gaussiennes à valeurs respectivement dans  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}^n$ . Alors la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $Y = 0$  est la projection dans  $L^2$  de  $X$  sur l'orthogonal de  $\text{Vect } Y_1, \dots, Y_n$ . De plus, cette loi est gaussienne de moyenne nulle et de variance

$$\sigma^2 = \mathbf{E} \left( \left| X - \sum_{i=1}^n \lambda_i Y_i \right|^2 \right).$$

## B Déterminant et permanent

Commençons par rappeler l'expression du déterminant de Cauchy.

**Lemme 12. Déterminant de Cauchy**

On a

$$\det \left( \frac{1}{a_i + b_j} \right) = \prod_{i < j} (a_j - a_i) \prod_{i < j} (b_j - b_i) \prod_{i,j} \frac{1}{a_i + b_j}.$$

Le permanent est une fonction introduite de manière indépendante par Binet et Cauchy en 1812. Il est défini, pour toute matrice carrée  $A$ , par

$$\text{perm}(A) = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^n A_{i\sigma(i)}.$$

La formule de Borchardt est la première, historiquement, qui relie le calcul d'un permanent à celui d'un déterminant.

**Proposition 7. Formule de Borchardt (1855)**

On a

$$\text{perm} \left( \frac{1}{x_i - y_j} \right) \det \left( \frac{1}{x_i - y_j} \right) = \det \left( \frac{1}{(x_i - y_j)^2} \right).$$

La formule de Borchardt peut désormais être obtenue comme un corollaire immédiat de la formule beaucoup plus générale démontrée par Carlitz et Levine en 1960. Pour toute matrice  $A$  et tout entier  $k$ , le symbole  $A^{(-k)}$  désignera la matrice  $(A_{ij}^{-k})$ .

**Proposition 8. Formule de Carlitz et Levine (1960)**

Soit  $A$  une matrice de rang  $\leq 2$  à coefficients non nuls. Alors

$$\text{perm } A^{(-1)} \det A^{(-1)} = \det A^{(-2)}.$$

Pour la démonstration on pourra consulter [3], dont la bibliographie ordonnée de façon chronologique est particulièrement éclairante.

Dès le début du XXe siècle, le permanent a servi en combinatoire et pour des calculs sur des matrices stochastiques. Il a ensuite naturellement trouvé sa place dans des calculs de probabilité. La proposition suivante que nous avons utilisé dans la partie 5.1 en est un exemple.

**Proposition 9.** Soit  $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$  un vecteur complexe gaussien de moyenne nulle. Alors

$$\mathbf{E}((X_1 \cdots X_n)(\overline{Y_1 \cdots Y_n})) = \text{perm}(\mathbf{E}X_i \overline{Y_j}) .$$

**Démonstration.** Chaque terme de l'égalité est linéaire en chaque  $X_i$  et  $Y_j$ . Le vecteur gaussien a même loi que  $\sqrt{C}^t N$ , où  $C$  est la matrice de covariance du vecteur gaussien  $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$  et  $N$  est un vecteur gaussien à valeurs dans  $\mathbf{C}^{2n}$  de loi gaussienne standard. On peut donc supposer que les éléments de  $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$  sont des combinaisons linéaires complexes de vecteurs  $V_k$  i.i.d. de loi gaussienne standard. Soit  $l$  le nombre maximal d'éléments de  $\{V_k\}$  apparaissant avec un coefficient non nul dans l'écriture d'un élément de  $\{X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n\}$ . D'après la remarque précédente, il suffit de montrer le cas  $l = 1$ . Soient  $X_i = \sum \alpha_k V_k$  et  $X'_{i,k} = V_k$  si  $i=k$ ,  $X_i$  sinon. On a

$$\text{perm}((E[X_i \overline{Y_j}])_{1 \leq i, j \leq n}) = \sum \alpha_k \text{perm}(E[X'_{i,k} \overline{Y_j}])_{1 \leq i, j \leq n} ,$$

et

$$E[X_1 \cdots X_n \overline{Y_1} \cdots \overline{Y_n}] = \sum \alpha_k E[X'_{1,k} \cdots X'_{n,k} \overline{Y_1} \cdots \overline{Y_n}] .$$

Il suffit donc de montrer le cas  $l = 1$ . Pour tout  $i \in \{1 \cdots n\}$  on suppose donc qu'il existe  $k, k'$  tels que  $X_i = V_k$  et  $Y_i = V_{k'}$ .

Soit  $V$  une variable aléatoire complexe gaussienne standard.

- (a) Si  $n \neq m$ , on obtient, par invariance par rotation d'angle  $2\pi/(n - m)$ , que  $E[V^n \overline{V^m}] = 0$ .
- (b) De plus,  $|V|^2$  a une loi gaussienne standard donc  $E[|V|^{2n}] = n!$ .

Par indépendance des  $V_k$  on a

$$E[X_1 \cdots X_n \overline{Y_1} \cdots \overline{Y_n}] = \prod_{i=1}^r E[V_i^{m_i} \overline{V_i^{n_i}}] , \quad (8)$$

où  $\sum_{i=1}^r m_i = \sum_{i=1}^r n_i = n$ . S'il existe  $i$  tel que  $n_i \neq m_i$ , alors la quantité (8) vaut 0. Sinon, cette quantité vaut  $\prod_{i=1}^r m_i!$  d'après (b).

Soit  $C = (\mathbf{E}(X_i \overline{Y_j}))_{1 \leq i, j \leq n}$ . S'il existe  $i$  tel que  $n_i \neq m_i$ , alors, pour tout  $\sigma \in S_n$ ,  $\prod_{i=1}^n E[X_i \overline{Y_{\sigma(i)}}] = 0$ . Donc  $\text{perm}(C) = 0$ . Sinon, quitte à permuter les  $X_i$ , ce qui ne change pas le permanent de  $C$ , on a

$$C = \begin{pmatrix} J_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_r} \end{pmatrix} ,$$

où

$$J_m = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} .$$

En utilisant le fait que le permanent d'une matrice diagonale par blocs est le produit des permanents des blocs et le fait que  $\text{perm } J_m = m!$ , on obtient que

$$\text{perm}(C) = \prod_{i=1}^r m_i!.$$

Donc, dans tous les cas

$$E[X_1 \cdots X_n \overline{Y_1} \cdots \overline{Y_n}] = \text{perm}(C).$$

□

## Références

- [1] Y. PERES ET B. VIRÁG, *Zeros of the i.i.d. Gaussian power series : a conformally invariant determinantal process*, Acta Math., 194, (194), pages 1–35, 2005.
- [2] J. M. HAMMERSLEY, *The zeros of a random polynomial*, Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954-1955, vol. II, pages 89–111, Berkeley and Los Angeles, 1956, University of California Press.
- [3] H. MINC, *Permanents*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 6, 1978.