Convergence d'espaces métriques mesurés

Katia Jacob
sous la direction de Frédéric Paulin

Juin 2006

Table des matières

1 Introduction

On s'intéresse à des "espaces d'espaces métriques mesurés" de la même manière que l'on étudie l'ensemble des réels et non pas un seul point. Cela permet d'introduire de nouvelles notations et de nouveaux outils qui peuvent se révéler utiles au final pour connaître les propriétés d'un espace métrique mesuré en particulier.

Le but de cet exposé est plus précisément d'étudier des critères de compacité sur des espaces d'espaces métriques mesurés. Pour cela, on va d'abord ignorer les mesures, et définir des notions de convergence d'espaces métriques pour aboutir au célèbre théorème de compacité de Gromov. Dans la partie suivante, on se placera sur des ensembles de mesures sur un même espace pour obtenir ici aussi des théorèmes de compacité qui nous serviront dans la dernière partie. Finalement, on donnera des critères de compacité pour des ensembles d'espaces métriques mesurés après avoir décrit le type de convergence auquel on s'intéresse.

Je tiens à remercier vivement Frédéric Paulin pour sa patience et sa disponibilité.

2 Convergence d'espaces métriques

Les références principales pour cette partie sont [Bur] et [Gr1].

2.1 Distance de Hausdorff-Gromov

Soient (X, d) un espace métrique et S une partie de X. On pose $V_r^d(S) = \{x \in X : d(x, S) < r\}$ (ou bien $V_r(S)$ quand il n'y a pas de confusion possible sur la distance choisie). On note par $X \sqcup Y$ l'union disjointe de X et Y.

Grâce à la distance de Hausdorff que l'on ne présentera pas ici, on peut comparer deux parties compactes d'un même espace. Gromov a généralisé cette notion à des espaces métriques compacts qui ne sont plus nécessairement inclus dans un même espace.

Définition. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques. On définit la distance de Hausdorff-Gromov entre X et Y, notée $d_{HG}(X, Y)$, par la borne inférieure de :*

$$\inf\{\, r > 0 : X \subset V_r^d(Y),\ Y \subset V_r^d(X)\},$$

sur toutes les distances d sur $X \sqcup Y$ vérifiant $d_{|X\times X} = d_X$ et $d_{|Y\times Y} = d_Y$.

Dans la définition usuelle de d_{HG}, on prend la borne inférieure sur tous les plongements isométriques de X et de Y dans un même espace Z. Ici, l'union disjointe de X et Y joue le rôle de Z et les deux définitions sont équivalentes. On peut aussi demander à d d'être seulement une semi-distance (*i.e.* de ne pas vérifier l'axiome de séparation $(d(x, y) = 0) \Longrightarrow (x = y)$).

Proposition 1. *Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces métriques bornés, alors*

$$d_{HG}(X, Y) < \infty.$$

Preuve. Soit d définie sur $(X \sqcup Y) \times (X \sqcup Y)$ par

$$d_{|X \times X} = d_X, \quad d_{|Y \times Y} = d_Y,$$
$$\forall x \in X,\ \forall y \in Y, \quad d(x,y) = \max\{\mathrm{diam}(X),\ \mathrm{diam}(Y)\},$$

où $\mathrm{diam}(S) = \sup_{x,x' \in S} d_S(x,x')$. Il n'est pas difficile de vérifier que d est bien une distance sur $X \sqcup Y$, et par conséquent :

$$d_{HG}(X,Y) \leq \inf\{r > 0 : X \subset V_r^d(Y),\ Y \subset V_r^d(X)\}.$$

Or, si $x \in X$, $d(x,Y) = \max\{\mathrm{diam}(X), \mathrm{diam}(Y)\}$, et de même pour Y. Comme X et Y sont bornés, $d_{HG}(X,Y) \leq \max\{\mathrm{diam}(X), \mathrm{diam}(Y)\} < \infty$. □

Proposition 2. *La distance de Hausdorff-Gromov est symétrique, positive et vérifie l'inégalité triangulaire.*

Preuve. La symétrie et la positivité sont évidentes. Montrons l'inégalité triangulaire. Soient (X_1, d_{X_1}), (X_2, d_{X_2}), (X_3, d_{X_3}) trois espaces métriques. Soient d_{12} et d_{23} des distances sur $X_1 \sqcup X_2$ et $X_2 \sqcup X_3$ respectivement, qui prolongent les distances de X_1, X_2 et X_3. Soit d_{13} définie sur $(X_1 \sqcup X_3) \times (X_1 \sqcup X_3)$ qui prolonge les distances de X_1 et X_3 sur $X_1 \sqcup X_3$ et telle que

$$\forall x_1 \in X_1, \forall x_3 \in X_3, \quad d_{13}(x_1, x_3) = \inf_{x_2 \in X_2} \{d_{12}(x_1, x_2) + d_{23}(x_2, x_3)\}.$$

Il est facile de vérifier que d_{13} est une distance sur $X_1 \sqcup X_3$. On pose

$$\begin{aligned}
r_{d_{13}} &= \inf\{r > 0 : X_1 \subset V_r^{d_{13}}(X_3),\ X_3 \subset V_r^{d_{13}}(X_1)\} \\
r_{d_{12}} &= \inf\{r > 0 : X_1 \subset V_r^{d_{12}}(X_2),\ X_2 \subset V_r^{d_{12}}(X_1)\} \\
r_{d_{23}} &= \inf\{r > 0 : X_2 \subset V_r^{d_{23}}(X_3),\ X_3 \subset V_r^{d_{23}}(X_2)\},
\end{aligned}$$

On a alors $r_{d_{13}} \leq r_{d_{12}} + r_{d_{23}}$. Finalement, en prenant la borne inférieure sur toutes les distances d_{12} et d_{23}, on a bien :

$$d_{HG}(X_1, X_3) \leq d_{HG}(X_1, X_2) + d_{HG}(X_2, X_3).$$

□

Définition. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques et $\varepsilon > 0$. On appelle ε-isométrie de X dans Y une application $f : X \to Y$ telle que :*

1. $\sup_{x,y \in X} |d_Y(f(x), f(y)) - d_X(x,y)| \leq \varepsilon$ *;*
2. *$f(X)$ est ε-dense dans Y, i.e. pour tout $y \in Y$, $d_Y(y, f(X)) \leq \varepsilon$.*

Il n'est pas toujours évident de calculer la distance de Hausdorff-Gromov à partir de sa définition. Le lemme suivant permet d'estimer cette distance en termes d'ε-isométries.

Lemme 3. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, et $\varepsilon > 0$.*

1. *S'il existe une ε-isométrie de X dans Y, alors $d_{HG}(X,Y) < 2\varepsilon$.*
2. *Si $d_{HG}(X,Y) < \varepsilon$, alors il existe une 2ε-isométrie de X dans Y.*

Preuve.

1. Soit $f : X \to Y$ une ε-isométrie. Soit $d : (X \sqcup Y) \times (X \sqcup Y) \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$d_{|X\times X} = d_X, \quad d_{|Y\times Y} = d_Y,$$

et pour tous $x \in X$, $y \in Y$, $d(x, y)$ est définie comme la borne inférieure de

$$\{d_X(x, x') + 3\varepsilon/2 + d_Y(y, y')\}$$

sur tous les couples (x', y') dans $X \times Y$ vérifiant $d_Y(f(x'), y') \leq \varepsilon$. Ce n'est pas très long de vérifier que d définit une distance sur $X \sqcup Y$.
De plus, pour tout $x \in X$, $d(x, Y) \leq 3\varepsilon/2$ (en prenant $(x', y') = (x, f(x))$, et de même, pour tout $y \in Y$, $d(y, X) \leq 3\varepsilon/2$ (car $f(X)$ est ε-dense dans Y). Donc $d_{HG}(X, Y) \leq 3\varepsilon/2 < 2\varepsilon$.

2. Si $d_{HG} < \varepsilon$, alors, en prenant ε' tel que $d_{HG} < \varepsilon' < \varepsilon$, il existe une distance notée $d_{\varepsilon'}$ sur $X \sqcup Y$ prolongeant celles de X et Y et telle que $X \subset V_{\varepsilon'}^{d_{\varepsilon'}}(Y)$ et $Y \subset V_{\varepsilon'}^{d_{\varepsilon'}}(X)$.
On se place d'abord dans le cas où X est compact, où on utilise l'axiome du choix dénombrable. Soit $D = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble dénombrable dense de X. Pour chaque entier k, on choisit y_k dans Y tel que $d_{\varepsilon'}(x_k, y_k) < \varepsilon'$, et on a aussi $\varepsilon - \varepsilon' < \varepsilon - d_{\varepsilon'}(x_k, y_k)$. On recouvre X par des boules ouvertes de centre $x_k \in D$ et de rayon $\varepsilon - \varepsilon' > 0$. On en tire un recouvrement fini $X = \bigcup_{1\leq k\leq N} B(x_k, \varepsilon - \varepsilon')$, quitte à renuméroter les éléments de D. On pose alors

$$A_k = B(x_k, \varepsilon - \varepsilon') \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B(x_j, \varepsilon - \varepsilon'),$$

pour avoir un recouvrement fini disjoint. Pour tout $x \in A_k$, on pose $f(x) = y_k$. On obtient une application f de X dans Y telle que

$$\begin{aligned} \forall x \in X, \exists k \in \mathbb{N}, \quad d_{\varepsilon'}(x, f(x)) &\leq d_{\varepsilon'}(x, x_k) + d_{\varepsilon'}(x_k, y_k) \\ &\leq \varepsilon - \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité triangulaire, pour tous x, z dans X,

$$|d_{\varepsilon'}(f(x), f(z)) - d_{\varepsilon'}(x, z)| < 2\varepsilon,$$

et donc

$$|d_Y(f(x), f(z)) - d_X(x, z)| < 2\varepsilon. \tag{1}$$

De plus, pour tout $y \in Y$, on peut trouver $x \in X$ tel que $d_\varepsilon(x, y) < \varepsilon' < \varepsilon$. D'où $d_{\varepsilon'}(y, f(x)) < 2\varepsilon$, et donc

$$d_Y(y, f(X)) < 2\varepsilon. \tag{2}$$

Dans le cas où X n'est pas compact, on utilise l'axiome du choix pour pouvoir choisir pour chaque x dans X un élément $y = f(x)$ de Y tel que $d(y, x) < \varepsilon$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient aussi (1) et (2). □

Remarques.

1. Avec l'hypothèse du deuxième point, dans le cas où X est compact, on peut construire une 3ε-isométrie en se passant de l'axiome du choix dénombrable.
2. Toujours dans le deuxième point, la 2ε-isométrie construite peut être prise mesurable.
3. Il est important de noter que les ε-isométries peuvent être discontinues.

Proposition 4. *Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces métriques compacts, alors $d_{HG}(X, Y) = 0$ si et seulement si X et Y sont isométriques.*

Preuve.

1. Si f est une isométrie de X dans Y, on pose quelque soit $\varepsilon > 0$,

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, \qquad d_\varepsilon(x, y) = d_Y(f(x), y) + \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad d_\varepsilon(y, x) = d_\varepsilon(x, y),$$
$$d_{\varepsilon|X\times X} = d_X, \quad d_{\varepsilon|Y\times Y} = d_Y.$$

On peut voir sans difficulté que d_ϵ est une distance sur $X \sqcup Y$. On obtient ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad X \subset V_\varepsilon^{d_\varepsilon}(Y), \quad Y \subset V_\varepsilon^{d_\varepsilon}(X).$$

Donc $d_{HG}(X, Y) = 0$.

2. On suppose que $d_{HG}(X, Y) = 0$. D'après le lemme 3, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une $1/n$-isométrie f_n de X dans Y. Pour tous x, y dans X, on a donc

$$|d_Y(f_n(x), f_n(y)) - d_X(x, y)| < 1/n.$$

Soit D un sous-ensemble dénombrable dense de X. Comme Y est compact, quitte à extraire diagonalement, f_n converge en tout point de D. Soit f sa limite. D'après ce qui précède, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in D, \quad d_Y(f(x), f(y)) &= \lim_{n\to\infty} d_Y(f_n(x), f_n(y)) \\ &= d_X(x, y) \end{aligned}$$

Donc f préserve les distances. Par le théorème de prolongement des applications uniformément continues, f se prolonge à X en préservant encore les distances. De même, soit $g : Y \to X$ préservant les distances de X et Y. Alors $f \circ g : Y \to Y$ préserve les distances et comme Y est compact, $f \circ g$ est bijective et par conséquent f est surjective. L'application f est donc une isométrie de X dans Y. C'est ce qu'il fallait montrer. □

Proposition 5. *L'ensemble $\mathcal{C}$ des classes d'isométries d'espaces métriques compacts, muni de la distance de Hausdorff-Gromov, est séparable.*

Preuve. Soit $\mathcal{C}_N$ l'ensemble des classes d'isométries d'espaces métriques finis de cardinal fixé N. On note $\|.\|_\infty$ la norme sur $\mathbb{R}^{N^2}$ telle que

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_{N^2}) \in \mathbb{R}^{N^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le N^2} |x_i|$$

Soit

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_N = \{(d_{ij})_{1\le i,j\le N} \in \mathbb{R}^{N^2} : \forall i, j, k \in \{1, \ldots, N\}, d_{ij} &\ge 0 \\ d_{ij} &= d_{ji} \\ d_{ij} + d_{jk} &\le d_{ik}\} \end{aligned}$$

qui est séparable en tant que sous-espace de l'espace métrique séparable $(\mathbb{R}^{N^2}, \|.\|_\infty)$. Montrons que l'application Θ de $(\mathcal{D}_N, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathcal{C}_N, d_{HG})$ qui à $(d_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ associe la classe d'isométrie de $(X = \{1, \ldots, N\}, d)$, avec pour tous i, j dans $\{1, \ldots, N\}$, $d(i, j) = d_{ij}$, est continue surjective. Soit $\varepsilon > 0$ et soient $(d_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ et $(d'_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ deux éléments de $\mathcal{D}_N$ tels que $\|(d_{ij}) - (d'_{ij})\|_\infty < \varepsilon/2$, alors l'identité sur $X = \{1, \ldots, N\}$ est une $\varepsilon/2$-isométrie de (X, d) dans (X, d'), et $d_{HG}((X, d), (X, d')) < \varepsilon$ par le lemme 3. Soit maintenant (X, d_X) un espace métrique fini de cardinal N, alors, en numérotant les éléments de $X = \{x_i\}_{1\leq i\leq N}$, l'espace (X, d_X) appartient à la classe d'isométrie de $(\{1, \ldots, N\}, d)$ avec $d(i, j) = d_X(x_i, x_j)$, qui est l'image par Θ de $(d_{ij})_{1\leq i,j\leq N} = (d(i, j))_{1\leq i,j\leq N}$. L'application est bien continue surjective. Montrons maintenant que $(\mathcal{C}_N, d_{HG})$ est séparable. Soit D_N un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathcal{D}_N$, alors comme Θ est continue surjective, il n'est pas difficile de voir que $\Theta(D_N)$ est un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathcal{C}_N$. Une union dénombrable d'ensembles dénombrables étant dénombrable, la réunion $\bigcup_{N\in\mathbb{N}^*} \Theta(D_N)$ est dénombrable dense dans l'ensemble des classes d'isométries d'espaces métriques finis. Ce dernier est dense dans $\mathcal{C}$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, un espace métrique compact contient une partie finie ε-dense dont l'inclusion dans cet espace compact définit une ε-isométrie. En appliquant le lemme 3, on voit que tout espace métrique compact se situe à une distance de Hausdorff-Gromov de moins de 2ε d'un espace métrique fini. Finalement, la réunion $\bigcup_{N\in\mathbb{N}^*} \Theta(D_N)$ est dénombrable dense dans $\mathcal{C}$. □

2.2 Théorème de compacité de Gromov

Une partie d'un espace topologique est *relativement compacte* si son adhérence est compacte. On va souvent utiliser le résultat suivant : l'espace X est compact si et seulement s'il est complet et contient une partie finie ε-dense pour tout $\varepsilon > 0$.

Le résultat suivant est dû à Gromov (cf. [Gr2]) qui l'a utilisé pour résoudre un célèbre problème ouvert.

Proposition 6. *(Théorème de compacité de Gromov) Soit $\mathcal{M}$ une partie de $\mathcal{C}$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

1. *il existe $c > 0$ tel que pour tout $X \in \mathcal{M}$, $diam(X) \leq c$;*
2. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \geq 0$ tel que tout $X \in \mathcal{M}$ contient une partie ε-dense d'au plus $N(\varepsilon)$ points.*

Alors $\mathcal{M}$ est relativement compacte pour la topologie de Hausdorff-Gromov (i.e. la topologie définie par d_{HG}).

Preuve. Soit $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}$. On pose $N_1 = N(1)$, et $N_k = N_{k-1} + N(1/k)$ pour tout k entier, $k \geq 2$. Soit S_n^k une partie $1/k$-dense de X_n d'au plus N_k points. L'hypothèse *2.* nous assure que l'on peut choisir ces parties de manière à avoir $S_n^k \subset S_n^{k+1}$ pour tout k et n. Pour chaque n, on numérote, en autorisant des répétitions, les points de l'union sur k des S_n^k tel que pour tout k, $\{x_1^{(n)}, \ldots, x_{N_k}^{(n)}\} = S_n^k$. Or pour tous n, i, j entiers, $d_n(x_i^{(n)}, x_j^{(n)})$ est borné par c. Quitte à extraire diagonalement, $(d_n(x_i^{(n)}, x_j^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$.

Soit $Y = \{y_i\}_{i=1,\ldots,\infty}$ un ensemble abstrait dénombrable avec $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$. On pose :

$$d_Y(y_i, y_j) = \lim_{n\to\infty} d_n(x_i^{(n)}, x_j^{(n)}).$$

On obtient ainsi une pseudo-distance sur Y. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y \iff d_Y(x,y) = 0$. Soit $Y/\mathcal{R}$ l'espace quotient de Y par $\mathcal{R}$ et $d_{Y/\mathcal{R}}$ la projection de d_Y sur $Y/\mathcal{R}$. Alors $(Y/\mathcal{R}, d_{Y/\mathcal{R}})$ est un espace métrique. On note $\bar{x}$ le projeté de $x \in Y$ sur $Y/\mathcal{R}$. Soit $\widetilde{Y}$ le complété de $Y/\mathcal{R}$ et $d_{\widetilde{Y}}$ sa distance (qui étend donc $d_{Y/\mathcal{R}}$).

On va montrer d'abord que $\widetilde{Y}$ est compact. Soit $S^k = \{\bar{y}_i, 1 \leq i \leq N_k\} \subset \widetilde{Y}$. Comme S_n^k est $1/k$-dense dans X_n,

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N},\ \exists j_n \leq N_k, \quad d_n(x_i^{(n)}, x_{j_n}^{(n)}) \leq 1/k.$$

Comme j_n ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, il existe $j \leq N_k$ ne dépendant pas de n pour lequel il existe un nombre infini d'entiers n tels que $d_n(x_i^{(n)}, x_j^{(n)}) \leq 1/k$. En passant à la limite, on obtient que pour tout $\bar{y}_i$ dans $Y/\mathcal{R}$ il existe $j \leq N_k$ tel que $d_{\widetilde{Y}}(\bar{y}_i, \bar{y}_j) \leq 1/k$ avec $\bar{y}_j \in S^k$. On en conclut que S^k est $1/k$-dense dans $Y/\mathcal{R}$ et par conséquent dans $\widetilde{Y}$ puisque $Y/\mathcal{R}$ est dense dans son complété. Quelque soit $k \in \mathbb{N}^*$, l'espace $\widetilde{Y}$ contient une partie $1/k$-dense et est complet : $\widetilde{Y}$ est compact.

On va maintenant voir que $(\widetilde{Y}, d_{\widetilde{Y}})$ est la limite de $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ pour la topologie de Hausdorff-Gromov. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, soit $f_n : S_n^k \to S^k$ telle que $f_n(x_i^{(n)}) = \bar{y}_i$. On pourrait avoir $x_i^{(n)} = x_{i'}^{(n)}$ avec $i \neq i'$. Mais à k fixé et n assez grand, ceci implique que $\bar{y}_i = \bar{y}_{i'}$, et donc f_n est bien défini. Comme $card(S^k)$ est fini, on a

$$\sup_{\bar{y}_i, \bar{y}_j \in S^k} |d_{\widetilde{Y}}(\bar{y}_i, \bar{y}_j) - d_n(x_i^{(n)}, x_j^{(n)})| \leq \varepsilon_n,$$

où $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Pour tout $y \in S^k$, $d_{\widetilde{Y}}(y, f_n(S_n^k)) = 0$ car f_n est surjective. Donc f_n est une ε_n-isométrie et par le lemme 3 on a alors $d_{HG}(S_n^k, S^k) < 2\varepsilon_n$. Finalement,

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad d_{HG}(X_n, \widetilde{Y}) &\leq d_{HG}(X_n, S_n^k) + d_{HG}(S_n^k, S^k) + d_{HG}(S^k, \widetilde{Y}), \\ &< 4/k + 2\varepsilon_n. \end{aligned}$$

Donc $d_{HG}(X_n, \widetilde{Y}) \leq 2\varepsilon_n$ avec $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. □

Corollaire 7. *L'espace $(\mathcal{C}, d_{HG})$ est métrique séparable complet.*

Preuve. D'après ce qui précède, il ne reste plus qu'à vérifier la complétude. Soit $((X_n, d_n))_n$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{C}, d_{HG})$. Montrons qu'elle vérifie les deux conditions du théorème de compacité de Gromov. Soit $\varepsilon > 0$ et soit N un entier tel que :

$$\forall m \geq N, \quad d_{HG}(X_N, X_m) < \varepsilon/5.$$

Soit $f_m : X_N \to X_m$ une $2\varepsilon/5$-isométrie dont l'existence nous est assurée par le lemme 3, et S une partie finie $\varepsilon/5$-dense de X_N. Montrons que $f_m(S)$ est ε-dense dans X_m. Soit $\delta > 0$. Par définition, pour tout y dans X_m, on a $d_m(y, f_m(X_N)) \leq 2\varepsilon/5$, et donc il existe x_y dans X_N tel que $d_m(y, f_m(x_y)) < 2\varepsilon/5 + \delta$. Soit maintenant s dans S tel que $d_N(x_y, s) \leq \varepsilon/5$. On obtient que :

$$\begin{aligned} \forall y \in X_m, \quad d_m(y, f_m(S)) &\leq d_m(y, f_m(s)) \\ &\leq d_m(y, f_m(x_y)) + d_m(f_m(x_y), f_m(s)) \\ &< 2\varepsilon/5 + \delta + d_N(x_y, s) + 2\varepsilon/5 \\ &< \varepsilon + \delta. \end{aligned}$$

Le résultat suit en faisant tendre δ vers 0. Donc pour tout $m \geq N$, il existe une partie finie ε-dense dans X_m de cardinal inférieur ou égal à celui de S.

On garde les mêmes notations pour montrer que les diamètres sont uniformément bornés et on prend ε et δ égaux à 1. Soient y et z dans X_m, on a :

$$\begin{aligned} d_m(y,z) &\leq d_m(y, f_m(x_y)) + d_m(f_m(x_y), f_m(x_z)) + d_m(f_m(x_z), z) \\ &\leq 4\varepsilon/5 + 2\delta + d_N(x_y, x_z) \\ &\leq 3 + \mathrm{diam}(X_N). \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{diam}(X_m) \leq 3 + \mathrm{diam}(X_N)$ pour $m \geq N$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{diam}(X_n) \leq \max(3 + \mathrm{diam}(X_N), \sup_{1 \leq m \leq N} \mathrm{diam}(X_m)).$$

Finalement les deux conditions du théorème de compacité de Gromov sont réunies et on en déduit que la suite de Cauchy $((X_n, d_n))_n$ a une valeur d'adhérence : elle est donc convergente. $\square$

2.3 Cas d'espaces non compacts

On veut maintenant généraliser les notions précédentes à des espaces non compacts. De la même manière que la convergence uniforme de fonctions sur un espace métrique devient trop contraignante quand l'espace considéré n'est plus compact, la convergence selon la distance de Hausdorff-Gromov n'est pas adaptée au cas d'espaces non compacts. On va plutôt demander que ce soit des boules des espaces considérés, centrées en certains points, qui convergent selon la distance de Hausdorff-Gromov. On va préciser cette notion.

Définition. *Un espace métrique pointé est un triplet (X, d, p), où p est un point de X et (X, d) un espace métrique.*

Définition. *Soient (X, d_X, p_X) et (Y, d_Y, p_Y) deux espaces métriques pointés. On appelle ε-isométrie pointée entre des sous-ensembles $X' \subset X$ et $Y' \subset Y$, contenant p_X et p_Y respectivement, une application $f : X' \to Y$ telle que :*

1. *$f(p_X) = p_Y$;*
2. *$\sup_{x,z \in X'} |d_Y(f(x), f(z)) - d_X(x,z)| \leq \varepsilon$;*
3. *$Y' \subset \{y \in Y : d_Y(f(X'), y) \leq \varepsilon\}$.*

Dans la définition précédente, on aurait pu se contenter de $d(f(p_X), p_Y) \leq \varepsilon$ au lieu de la première condition. Remarquons aussi que dans le cas où $X' = B(p_X, R)$, avec $R > 0$, les deux premières conditions impliquent que l'image par f de X' est contenue dans la boule de centre p_Y et de rayon $R + \varepsilon$.

Définition. *On dit qu'une suite d'espaces métriques pointés $((X_n, d_n, p_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un espace métrique pointé (X, d, p) au sens de la convergence de Hausdorff-Gromov pointée s'il existe des suites de réels positifs $\varepsilon_n \overset{n \to \infty}{\to} 0$ et $R_n \overset{n \to \infty}{\to} \infty$, et des ε_n-isométries pointées f_n entre les boules $B(p_n, R_n) \subset X_n$ et $B(p, R_n) \subset X$.*

Si une suite d'espaces métriques pointés converge dans le sens donné ci-dessus vers un espace métrique pointé, alors elle converge évidemment aussi vers son complété. On peut donc ne considérer que des limites complètes.

Proposition 8. *(Théorème de compacité pour les espaces métriques pointés) Soit $\mathcal{M}$ un ensemble d'espaces métriques pointés. On suppose que pour tout $R > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon, R) \geq 0$ tel que pour tout $(X, p) \in \mathcal{M}$, la boule $B(p, R)$ contienne une partie ε-dense d'au plus $N(\varepsilon, R)$ points. Alors de toute suite de $\mathcal{M}$, on peut extraire une sous-suite convergeant vers un espace métrique pointé.*

Remarques.

1. En fait, il suffit que la condition soit vérifiée pour tout R assez grand, par exemple $R \geq 1$.
2. Les hypothèses de la proposition 8 impliquent que les boules fermées sont compactes dans tout élément complet de $\mathcal{M}$, et donc qu'un tel élément est aussi localement compact et séparable. De plus, on peut supposer que la limite est complète, localement compacte et séparable (cf. preuve).

Preuve. La preuve suit celle de la proposition 6 appliquée aux boules de rayon R, en utilisant ensuite le procédé d'extraction diagonal quand R tend vers l'infini.

Soit $(X_n, d_n, p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}$ et $(R_l)_{l\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante de réels positifs tendant vers l'infini. On pose :

$$\begin{aligned}
& & N_1^{R_1} &= N(1, R_1), \\
\forall l \in \mathbb{N},\ l \geq 2, & & N_1^{R_l} &= N(1, R_l) + N_1^{R_{l-1}}, \\
\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq 2, & & N_k^{R_1} &= N_{k-1}^{R_1} + N(1/k, R_1), \\
& & N_k^{R_l} &= N_{k-1}^{R_l} + N(1/k, R_l) + N_k^{R_{l-1}}.
\end{aligned}$$

On peut alors choisir des parties S^k_{n,R_l} d'au plus $N_k^{R_l} + 1$ points, contenant p_n pour tout n, $1/k$-dense dans $B(p_n, R_l)$ et qui soient croissantes en k et en l pour l'inclusion (*i.e.* $S^k_{n,R_l} \subset S^{k+1}_{n,R_l}$ et $S^k_{n,R_l} \subset S^k_{n,R_{l+1}}$ pour tous k, l et n). On numérote, éventuellement avec répétitions, les points de $\bigcup_l \bigcup_k S^k_{n,R_l}$ de sorte que $\{p_n, x_1^{(n)}, \ldots, x^{(n)}_{N_k^{R_l}}\} = S^k_{n,R_l}$. Or pour tout $i, j \in \mathbb{N}^*$, il existe l tel que pour tout n, $x_i^{(n)}$ et $x_j^{(n)}$ soient dans S^k_{n,R_l}, et par conséquent :

$$d_n(x_i^{(n)}, x_j^{(n)}) < 2R_l, \quad d_n(x_i^{(n)}, p_n) < R_l.$$

Quitte à extraire diagonalement, $(d_n(x_i^{(n)}, x_j^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(d_n(x_i^{(n)}, p_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$.

On va construire l'espace limite. Soit $Y = \{y_i\}_{i=1,\ldots,\infty} \bigcup \{p\}$ un ensemble abstrait dénombrable avec $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$. On pose :

$$d_Y(y_i, y_j) = \lim_{n\to\infty} d_n(x_i^{(n)}, x_j^{(n)}) \quad \text{et} \quad d_Y(y_i, p) = \lim_{n\to\infty} d_n(x_i^{(n)}, p_n).$$

On obtient ainsi une pseudo-distance qu'on quotiente par la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y \iff d_Y(x, y) = 0$ pour obtenir une distance $d_{\mathcal{R}}$. On note $\bar{x}$ le projeté de x sur l'espace quotient $Y/\mathcal{R}$. Soit $Y_{R_l} = \bigcup_k \{\bar{y}_i, 1 \leq i \leq N_k^{R_l}\} \bigcup \{\bar{p}\}$. On note $\widetilde{Y}_{R_l}$ le complété de Y_{R_l}, et $d_{\widetilde{Y}_{R_l}}$ sa distance (qui étend $d_{\mathcal{R}}$). Montrons que $\widetilde{Y}_{R_l} \subset \widetilde{Y}_{R_{l+1}}$. On a déjà $Y_{R_l} \subset Y_{R_{l+1}}$. Si $x \in \widetilde{Y}_{R_l} \setminus Y_{R_l}$, alors x est limite d'une suite de Y_{R_l} (car Y_{R_l} est dense dans son complété) et par conséquent d'une suite de $Y_{R_{l+1}}$, qui est de Cauchy. Par construction du complété de $Y_{R_{l+1}}$, on a bien que x appartient à $\widetilde{Y}_{R_{l+1}}$. Donc $\widetilde{Y}_{R_l} \subset \widetilde{Y}_{R_{l+1}}$ et on voit facilement que l'inclusion est isométrique pour $d_{\widetilde{Y}_{R_l}}$ et $d_{\widetilde{Y}_{R_{l+1}}}$. Soit $X = \bigcup_l \widetilde{Y}_{R_l}$, qui est complet et séparable par construction, et d_X sa distance définie par $d_X = d_{\widetilde{Y}_{R_l}}$ sur $\widetilde{Y}_{R_l}$ pour tout l. Soit $S^k_{R_l} = \{\bar{p}\} \bigcup \{\bar{y}_i, 1 \leq i \leq N_k^{R_l}\} \subset X$. D'après de la preuve de la proposition 6, $S^k_{R_l}$ est $1/k$-dense dans $\widetilde{Y}_{R_l}$. On en déduit que $\widetilde{Y}_{R_l}$ contient une partie finie ε-dense pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui implique que $\widetilde{Y}_{R_l}$ est compact. De plus, pour tout $x \in X$, il existe l tel que $x \in \widetilde{Y}_{R_l}$, et on a alors $B(x, R_{l+1} - d_X(x,\bar{p})) \subset \widetilde{Y}_{R_{l+1}}$, où $R_{l+1} - d_X(x,\bar{p}) > 0$, ce qui montre que X est localement compact.

Maintenant soit $f_{n,R_l} : S^k_{n,R_l} \to S^k_{R_l}$ une application telle que $f_{n,R_l}(p_n) = \bar{p}$ et $f_{n,R_l}(x_i^{(n)}) = \bar{y}_i$ qui est bien définie si n est assez grand. C'est une δ_{n,R_l}-isométrie, où $\delta_{n,R_l} \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Par extraction diagonale, les applications $f_n = f_{n,R_n}$ sont des δ_n-isométries, où $\delta_n = \delta_{n,R_n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Comme S^k_{n,R_n} est $1/k$-dense dans $B(p_n, R_n)$, il est facile de construire une $2/k$-isométrie $g_k^{(n)} : B(p_n, R_n) \to S^k_{n,R_n}$ telle que $g_k^{(n)}(p_n) = p_n$. Par exemple, si on considère la partition de $B(p_n, R_n)$ suivante :

$$\begin{aligned} & A_0 = \bar{B}(p_n, 1/k) \bigcap B(p_n, R_n), \\ \forall i \leq N_k^{R_l}, \qquad & A_i = (\bar{B}(x_i^{(n)}, 1/k) \setminus (\bigcup_{1\leq j<i} \bar{B}(x_j^{(n)}, 1/k) \bigcup A_0)) \bigcap B(p_n, R_n), \end{aligned}$$

où $\bar{B}$ désigne une boule fermée, on peut prendre $g_k^{(n)}$ égale à l'identité sur S^k_{n,R_n} et $g_k^{(n)}(x) = x_i^{(n)}$ (resp. p_n) pour tout x dans $A_i \setminus \bigcup_{i<j\leq N_k^{R_l}} \{x_j^{(n)}\}$ (resp. $A_0 \setminus \bigcup_{1<j\leq N_k^{R_l}} \{x_j^{(n)}\}$). De plus, l'application identité de $S^k_{R_n}$ dans X, notée $h_k^{(n)}$ est une $1/k$-isométrie pointée entre $S^k_{R_n}$ et $B(\bar{p}, R_n)$. Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $h_k^{(n)} \circ f_n \circ g_k^{(n)}$ est une $3/k + \delta_n$ isométrie pointée entre $B(p_n, R_n)$ et $B(\bar{p}, R_n)$. En posant $\varepsilon_n = 3/n + \delta_n$, on obtient que $h_n^{(n)} \circ f_n \circ g_n^{(n)}$ est une ε_n isométrie pointée entre $B(p_n, R_n)$ et $B(\bar{p}, R_n)$. On en déduit que les espaces métriques pointés (X_n, d_n, p_n) convergent vers l'espace métrique pointé $(X, d_X, \bar{p})$. □

Remarque. La définition de la convergence Hausdorff-Gromov pointée permet de munir l'ensemble (des classes d'isométries préservant les points bases) d'espaces métriques pointés séparables complets d'une topologie, et ainsi la proposition 8 donne un critère de compacité relative sur les parties de cet ensemble.

3 Convergence de mesures

Dans la suite de l'exposé, on ne considère que des mesures positives. Cette partie n'est pas exhaustive, et pour plus de détails, on pourra consulter le livre de Doob [Doo] qui contient un chapitre sur la convergence de mesures. En ce qui concerne les mesures de probabilité, les livres de Billingsley [Bil] et Parthasarathy [Par] sont très complets, celui de Billingsley étant peut-être plus abordable.

Notations :

- X désigne un espace métrique muni de sa tribu des boréliens notée $\mathcal{B}(X)$, et sa distance est notée d ;

- $\mathcal{M}(X)$ est l'ensemble des mesures de probabilité sur X ;
- $\mathcal{M}_b(X)$ est l'ensemble des mesures sur X de masse totale bornée par b, pour $b > 0$;
- $\mathcal{C}(X)$ est l'ensemble des fonctions continues sur X à valeurs réelles ;
- $\mathcal{C}_b(X)$ est l'ensemble des fonctions continues bornées sur X à valeurs réelles ;
- $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X)$ est l'ensemble des fonctions réelles continues sur X à support compact ;
- $\mathcal{U}_b(X)$ est l'ensemble des fonctions uniformément continues bornées sur X à valeurs réelles.

On munit ces trois derniers ensembles, ainsi que $\mathcal{C}(X)$ si X est compact, de la norme suivante : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$. On rappelle que si X est compact, alors l'espace $\mathcal{C}(X)$ est séparable et $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}_b(X) = \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X)$. Si X est seulement localement compact séparable, alors $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X)$ est séparable. On renvoie à [Doo] pour les preuves.

Définition. *On définit sur l'ensemble des mesures de Radon sur X (i.e. des mesures (positives) boréliennes finies sur les compacts) :*

1. *la topologie vague comme la topologie la moins fine rendant continues les applications $\mu \mapsto \mu(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X)$.*
   On a alors
   $$\mu_n \xrightarrow{v} \mu \iff \forall f \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X), \lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \mu(f)$$
   où $\xrightarrow{v}$ désigne la convergence vague quand $n \to \infty$;

2. *la topologie étroite comme la topologie la moins fine rendant continues les applications $\mu \mapsto \mu(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}_b(X)$.*
   On a alors
   $$\mu_n \xrightarrow{é} \mu \iff \forall f \in \mathcal{C}_b(X), \lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \mu(f)$$
   où $\xrightarrow{é}$ désigne la convergence étroite quand $n \to \infty$.

Remarques.

1. On peut définir de la même manière une autre topologie en considérant l'espace $\mathcal{C}_0(X)$ des fonctions continues réelles tendant vers 0 à l'infini.
2. Dans le cas où X est compact, la topologie étroite, qui coïncide avec la topologie vague, correspond à la topologie faible-$\star$ sur $\mathcal{M}(X)$ vu comme un sous-ensemble du dual topologique de $(\mathcal{C}(X), \|.\|_\infty)$.
3. Une base d'ouverts pour la topologie étroite (resp. vague) est donnée par les ensembles de la forme :
   $$V_{\varepsilon,f_1,\dots,f_n}(\mu) = \{\nu \in \mathcal{M}(X) : \sup_{1\le i\le n} |\mu(f_i) - \nu(f_i)| < \varepsilon\}$$
   où $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_i \in \mathcal{C}_b(X)$ (resp. $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X)$). De plus, si X est localement compact séparable, alors pour tout μ dans $\mathcal{M}(X)$, l'ensemble $\{V_{1/n,h_{i_1},\dots,h_{i_k}}(\mu),\ n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{N}^*\}$, où $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X)$, est une base dénombrable de voisinages de μ pour la topologie vague.

Un espace séparé est dit *dénombrable à l'infini* s'il existe une suite de compacts K_n tels que $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$ pour tout n, où $\text{int}(K)$ désigne l'intérieur de K, et $X = \bigcup_n K_n$. C'est équivalent au fait que X soit localement compact et séparable, et cela implique qu'il existe une suite de fonctions positives dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X)$ qui converge simplement en croissant vers la fonction caractéristique de X notée 1_X (prendre $\varphi_n(x) = \min(d(x, X \setminus \text{int}(K_n)), 1)$).

Proposition 9. *Si X est un espace dénombrable à l'infini, les topologies vague et étroite coïncident sur $\mathcal{M}(X)$.*

Preuve. Comme $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X) \subset \mathcal{C}_b(X)$ la topologie étroite est plus fine que la topologie vague.

Inversement, soient $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $f \in \mathcal{C}_b(X)$ et $\varepsilon > 0$. On réutilise la notation $V_{\varepsilon,f}$ introduite dans la remarque précédente. Soit $(h_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite positive de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X)$ qui converge simplement en croissant vers la fonction constante 1_X, suite qui existe car X est dénombrable à l'infini. On a alors $fh_p \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X)$ et pour tout $\nu \in \mathcal{M}(X)$,

$$\begin{aligned} |\mu(f) - \nu(f)| &\leq |\mu(f) - \mu(fh_p)| + |\mu(fh_p) - \nu(fh_p)| + |\nu(fh_p) - \nu(f)| \\ &\leq \|f\|_\infty(\mu(1_X - h_p) + \nu(1_X - h_p)) + |\mu(fh_p) - \nu(fh_p)|. \end{aligned}$$

Comme $\mu(h_p) \overset{p\to\infty}{\to} \mu(1_X)$ par le théorème de convergence monotone, et de même pour ν, on peut choisir p tel que

$$0 \leq (\mu(1_X - h_p) + \nu(1_X - h_p)) < \varepsilon/(2\|f\|_\infty).$$

Donc

$$\nu \in V_{\varepsilon/2, fh_p}(\mu) \Longrightarrow \nu \in V_{\varepsilon,f}(\mu).$$

Or $V_{\varepsilon/2,fh_p}(\mu)$ est un ouvert de la topologie vague contenant μ. Finalement les deux topologies sont bien égales. $\square$

On se servira plusieurs fois par la suite du résultat classique suivant dont on pourra consulter une preuve dans [Bil] :

Sur $\mathcal{M}(X)$, il y a équivalence entre :

(i) $\mu_n \overset{é}{\to} \mu$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(f) = \mu(f)$ *pour tout* $f \in \mathcal{U}_b(X)$,

(iii) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$ *pour tout fermé F de X,*

(iv) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(O) \geq \mu(O)$ *pour tout ouvert O de X.*

Proposition 10. *Si X est séparable, alors $\mathcal{M}(X)$ est séparable.*

Preuve. On suppose donc que X est séparable. Soit $D = \{y_i\}_{i=1,\dots,\infty}$ un sous-ensemble dénombrable dense de X. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{aligned} A_{n,1} &= B(y_1, 1/2n) \\ A_{n,j} &= B(y_j, 1/2n) \setminus \bigcup_{1\leq k\leq j} A_{n,k}. \end{aligned}$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une partition de X telle que :

$$X = \bigcup_j A_{n,j} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \forall j \in \mathbb{N}^*, \ \ \mathrm{diam}(A_{n,j}) \leq 1/n, \\ \\ \forall j \neq k, \ \ A_{n,j} \bigcap A_{n,k} = \varnothing, \\ \text{et } \forall j, n \in \mathbb{N}^*, \ A_{n,j} \in \mathcal{B}(X). \end{array}$$

Soit $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Pour tous j, n entiers, soit $x_{n,j}$ un point $A_{n,j}$ si $A_{n,j} \neq \emptyset$. On pose $\mu_n = \sum_{j:A_{n,j}\neq\emptyset} \mu(A_{n,j})\delta_{x_{n,j}}$, où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x. Il n'est pas difficile de vérifier que μ_n est une mesure de probabilité (cf. [Gal]).

Montrons que $\mu_n \stackrel{é}{\to} \mu$. Soit $g \in \mathcal{U}_b(X)$. L'application g étant uniformément continue, on a :

$$\forall x \in A_{n,j}, \quad |g(x) - g(x_{n,j})| \leq \sup_{d(x,y)<1/n} |g(x) - g(y)|,$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} |\mu(g) - \mu_n(g)| &= \sum_{j:A_{n,j}\neq\emptyset} |\mu(g 1_{A_{n,j}}) - \mu(g(x_{n,j}) 1_{A_{n,j}})| \\ &\leq \sum_{j:A_{n,j}\neq\emptyset} \mu(|g - g(x_{n,j})| 1_{A_{n,j}}) \\ &\leq \sup_{d(x,y)<1/n} |g(x) - g(y)| \sum_{j:A_{n,j}\neq\emptyset} \mu(A_{n,j}) \\ &\leq \sup_{d(x,y)<1/n} |g(x) - g(y)| \stackrel{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

On approche maintenant μ_n par des sommes finies de mesures de Dirac à coefficients rationnels. Soient $f \in \mathcal{C}_b(X)$, et $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{j:A_{n,j}\neq\emptyset} \mu(A_{n,j}) = \mu(\bigcup_j A_{n,j}) = 1$, il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(\bigcup_{j>l} A_{n,j}) < \varepsilon/2M$, où M est tel que $\|f\|_\infty \leq M$. Soient $r_{n,j}$ des rationnels tels que $\sum_{1\leq j\leq l:A_{n,j}\neq\emptyset} r_{n,j} = 1$, et

$$\forall j \leq l \text{ tel que } A_{n,j} \neq \emptyset, \quad |r_{n,j} - \mu(A_{n,j})| < \varepsilon/2Ml.$$

On pose $\mu_{n,l} = \sum_{1\leq j\leq l:A_{n,j}\neq\emptyset} r_{n,j}\delta_{x_{n,j}}$. Ce sont des mesures de probabilité sur X. On a alors :

$$\begin{aligned} |\mu_n(f) - \mu_{n,l}(f)| &= |\sum_{j:A_{n,j}\neq\emptyset} \mu(A_{n,j}) f(x_{n,j}) - \sum_{j\leq l:A_{n,j}\neq\emptyset} r_{n,j} f(x_{n,j})| \\ &\leq \sum_{j\leq l:A_{n,j}\neq\emptyset} |\mu(A_{n,j}) - r_{n,j}||f(x_{n,j})| + \sum_{j>l:A_{n,j}\neq\emptyset} \mu(A_{n,j})|f(x_{n,j})| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalement $\{\sum_{j\leq l} \lambda_j \delta_{x_{n,j}}, \ l \in \mathbb{N}^*, \ \lambda_j \in \mathbb{Q}, \ n \in \mathbb{N}^* : \sum_{j\leq l:A_{n,j}\neq\emptyset} \lambda_j = 1\}$ est dénombrable dense dans $\mathcal{M}(X)$. $\square$

Si X est localement compact et séparable, en adaptant la preuve précédente (prendre g dans $\mathcal{C}_\mathcal{K}(X)$ et utiliser le fait qu'une suite qui converge vaguement avec convergence des masses totales converge aussi étroitement (cf. [Ouv]), enlever la condition sur la somme finie des rationnels $r_{n,j}$ égale à 1, etc), on obtient que $\mathcal{M}_b(x)$ est étroitement séparable.

3.1 Distance de Prokhorov

La partie qui va suivre sur la distance de Prokhorov suit très fidèlement le livre de Billingsley [Bil] p.72. Il contient d'ailleurs une autre démonstration de la séparabilité de $\mathcal{M}(X)$ utilisant cette distance. Le résultat à retenir ici est que si X est localement compact et séparable, alors $\mathcal{M}(X)$ muni de la topologie étroite est métrisable séparable par la distance de Prokhorov.

Définition. *On définit la distance de Prokhorov $d_P(\mu,\nu)$ entre deux éléments μ et ν de $\mathcal{M}(X)$ par :*

$$d_P(\mu,\nu) = \inf\{\, \varepsilon > 0 : \quad \forall A \in \mathcal{B}(X),\ \mu(A) \le \nu(V_\varepsilon(A)) + \varepsilon,\ \nu(A) \le \mu(V_\varepsilon(A)) + \varepsilon\}$$

Proposition 11. *La distance de Prokhorov vérifie bien les axiomes d'une distance sur $\mathcal{M}(X)$.*

Preuve. La distance de Prokhorov est clairement symétrique, positive et finie sur $\mathcal{M}(X)$. Montrons que :

$$d_P(\mu,\nu) = 0 \Longleftrightarrow \mu = \nu.$$

Il est clair que $d_P(\mu,\mu) = 0$. Soient μ et ν dans $\mathcal{M}(X)$ tels que $d_P(\mu,\nu) = 0$. Cela implique donc :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{B}(X),\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad & \mu(A) \le \nu(V_{1/n}(A)) + 1/n, \\ & \nu(A) \le \mu(V_{1/n}(A)) + 1/n. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\forall A \in \mathcal{B}(X), \quad \mu(A) \le \nu(\mathrm{adh}(A)), \quad \nu(A) \le \mu(\mathrm{adh}(A)).$$

On a utilisé le fait que $\mathrm{adh}(A) = \bigcap_n V_{1/n}(A)$, où $\mathrm{adh}(A)$ désigne l'adhérence de A, et $\mu(\bigcap_n V_{1/n}(A)) = \lim_{n\to\infty} \mu(V_{1/n}(A))$, et de même pour ν. Si A est un fermé, on a donc $\mu(A) = \nu(A)$. Comme une mesure finie sur un espace métrique est régulière (voir par exemple [Gal] p.37), on a alors :

$$\forall A \in \mathcal{B}(X), \quad \mu(A) = \sup_{F \text{ fermé } \subset A} \mu(F) = \sup_{F \text{ fermé } \subset A} \nu(F) = \nu(A).$$

Montrons maintenant l'inégalité triangulaire. Soient μ, ν, λ dans $\mathcal{M}(X)$ et $\varepsilon > 0$. Soient ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ tels que $d_P(\mu,\lambda) + \varepsilon/2 > \varepsilon_1$ et $d_P(\nu,\lambda) + \varepsilon/2 > \varepsilon_2$, et vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{B}(X), \qquad & \mu(A) \le \lambda(V_{\varepsilon_1}(A)) + \varepsilon_1,\ \ \lambda(A) \le \mu(V_{\varepsilon_1}(A)) + \varepsilon_1 \\ & \nu(A) \le \lambda(V_{\varepsilon_2}(A)) + \varepsilon_2,\ \ \lambda(A) \le \nu(V_{\varepsilon_2}(A)) + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Comme $V_{\varepsilon_2}(V_{\varepsilon_1}(A)) \subset V_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(A)$, d'après les relations précédentes, on obtient que

$$d_P(\mu,\nu) \le \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < d_P(\mu,\lambda) + d_P(\lambda,\nu) + \varepsilon.$$

Puis on fait tendre ε vers 0. □

Lemme 12. *Si, pour tout borélien A, $\mu(A) \leq \nu(V_\varepsilon(A)) + \varepsilon$, alors $d_P(\mu,\nu) \leq \varepsilon$.*

Preuve. Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. Posons $B = X \setminus V_\varepsilon(A)$. On a aussi $A = X \setminus V_\varepsilon(B)$. En utilisant l'hypothèse pour B, on obtient l'autre inégalité pour A :

$$\nu(A) = 1 - \nu(V_\varepsilon(B)) \leq 1 - \mu(B) + \varepsilon = \mu(V_\varepsilon(A)) + \varepsilon.$$

$\square$

Proposition 13. *Si X est localement compact et séparable, alors la distance de Prokhorov métrise la topologie étroite sur $\mathcal{M}(X)$.*

Preuve. Si X est localement compact et séparable, alors, d'après la proposition 9 et la remarque la précédant, tout point de $\mathcal{M}(X)$ est à base dénombrable de voisinages pour la topologie étroite, ce qui nous autorise à caractériser cette topologie par ses suites convergentes.

Soient μ_n, μ dans $\mathcal{M}(X)$. Supposons que $d_P(\mu_n,\mu) \overset{n\to\infty}{\to} 0$, ce que l'on peut réécrire : $d_P(\mu_n,\mu) < \varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Si F est un fermé, alors

$$\limsup_n(\mu_n(F)) \leq \limsup_n(\mu(V_{\varepsilon_n}(F)) + \varepsilon_n) = \mu(F).$$

D'après le rappel, $\mu_n \overset{é}{\to} \mu$.

Inversement, on suppose que $\mu_n \overset{é}{\to} \mu$. Soit $\varepsilon > 0$. L'espace X étant supposé séparable, soit $\{A_i\}_i$ une partition de X telle que $A_i \in \mathcal{B}(X)$ et diam$(A_i) \leq \varepsilon$. Puisque $\sum_i \mu(A_i) = \mu(\bigcup_i A_i)$ converge, il existe k entier tel que $\mu(\bigcup_{i>k} A_i) < \varepsilon$. Soit maintenant $A \in \mathcal{B}(X)$ et soit $A_0 = \bigcup_{i\leq k : A_i \bigcap A \neq \varnothing} A_i$. D'après le rappel, $\liminf_n \mu_n(V_\varepsilon(A_0)) \geq \mu(V_\varepsilon(A_0))$. Il existe donc n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $\mu_n(V_\varepsilon(A_0)) \geq \mu(V_\varepsilon(A_0)) - \varepsilon$. De plus, comme les diamètres des A_i sont bornés par ε, $A_0 \subset V_\varepsilon(A)$ et donc $V_\varepsilon(A_0) \subset V_{2\varepsilon}(A)$. On déduit de ce qui précède que :

$$\begin{aligned} n \geq n_0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(A) \quad & \leq \mu(A_0) + \mu(\bigcup_{i>k} A_i) \\ & \leq \mu(A_0) + \varepsilon \\ & \leq \mu(V_\varepsilon(A_0)) + \varepsilon \\ & \leq \mu_n(V_\varepsilon(A_0)) + 2\varepsilon \\ & \leq \mu_n(V_{2\varepsilon}(A)) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On utilise le lemme 12 pour conclure que $d_P(\mu_n,\mu) < 2\varepsilon$. $\square$

On note $(f)_*\mu$ la mesure-image de μ par f. Soient μ et ν deux mesures de probabilités sur un même espace métrique (X, d_X), et $f : X \to Y$ une ε-isométrie mesurable, où (Y, d_Y) est aussi un espace métrique. On va voir quel est le lien entre $d_P((f)_*\mu, (f)_*\nu)$ et $d_P(\mu,\nu)$. Plus précisément, on va essayer d'estimer $d_P((f)_*\mu, (f)_*\nu)$ en fonction de $d_P(\mu,\nu)$.

Soit $r > 0$ tel que $d_P(\mu,\nu) < r$ et, pour tout borélien A de X,

$$\mu(A) \leq \nu(V_r(A)) + r, \ \nu(A) \leq \mu(V_r(A)) + r.$$

Soit B un borélien de Y. Montrons que $V_r(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(V_{r+\varepsilon}(B))$. Soit $x \in V_r(f^{-1}(B))$. Pour tout $\delta > 0$, soit z dans $f^{-1}(B)$ tel que $d(x,z) < d(x, f^{-1}(B)) + \delta$. Comme f est une

ε-isométrie, on a donc

$$\begin{aligned} d(f(x),B) &\leq d(f(x),f(z)) \\ &\leq d(x,z)+\varepsilon < d(x,f^{-1}(B))+\varepsilon+\delta. \end{aligned}$$

En faisant tendre δ vers 0, on obtient le résultat :

$$d(f(x),B) \leq d(x,f^{-1}(B))+\varepsilon < r+\varepsilon.$$

Finalement x est aussi dans $f^{-1}(V_{r+\varepsilon}(B))$. Comme pour tout borélien B de Y, l'ensemble $f^{-1}(B)$ est un borélien de X, on a,

$$\begin{aligned} (f)_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)) &\leq \nu(V_r(f^{-1}(B)))+r \\ &\leq \nu(f^{-1}(V_{r+\varepsilon}(B)))+r \\ &\leq (f)_*\nu(V_{r+\varepsilon}(B))+r+\varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient la même chose en interchangeant μ et ν. On a donc $d_P((f)_*\mu,(f)_*\nu) \leq r+\varepsilon$, et, en conclusion,

$$d_P((f)_*\mu,(f)_*\nu) \leq d_P(\mu,\nu)+\varepsilon.$$

3.2 Théorèmes de compacité

Lemme 14. *Soit X un espace métrique compact et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}(X)$ (resp. $\mathcal{M}_b(X)$). Si $\mu_n(f)$ converge dans $\mathbb{R}$ pour tout f élément d'un sous-ensemble dense D de $\mathcal{C}(X)$, alors la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $\mathcal{M}(X)$ (resp. $\mathcal{M}_b(X)$).*

Preuve. Soit $h \in D$ tel que $h > 1_X$. Soient $f \in \mathcal{C}(X)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $f_\varepsilon \in D$ tel que $\|f-f_\varepsilon\| < \varepsilon$. Par conséquent, $f < f_\varepsilon+\varepsilon h$ et $-f < -f_\varepsilon+\varepsilon h$. D'où :

$$\begin{aligned} &\limsup_k \mu_k(f) \leq \lim_k \mu_k(f_\varepsilon)+\varepsilon \lim_k \mu_k(h) \\ &-\liminf_k \mu_k(f) \leq -\lim_k \mu_k(f_\varepsilon)+\varepsilon \lim_k \mu_k(h). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \limsup_k \mu_k(f) - \liminf_k \mu_k(f) \qquad \leq 2\varepsilon \lim_k \mu_k(h).$$

Donc $\mu_k(f)$ a une limite finie pour tout f dans $\mathcal{C}(X)$. Cette limite définit clairement une forme linéaire positive L sur $\mathcal{C}(X)$. D'après le théorème de Riesz (voir [Gal]), il existe une unique mesure de Radon ν sur X telle que :

$$\forall f \in \mathcal{C}(X), \quad L(f) = \nu(f).$$

On conclut en remarquant que 1_X appartient à $\mathcal{C}(X)$ et qu'alors ν est une probabilité (resp. dans $\mathcal{M}_b(X)$) :

$$\nu(X) = \lim_k \mu_k(1_X) = 1, \text{ (resp. } \leq b).$$

□

Proposition 15. *L'espace X est compact si et seulement si $\mathcal{M}(X)$ est compact.*

Preuve. On suppose que X est compact. D'après le théorème de Riesz, l'ensemble des mesures signées sur X est le dual topologique de $(\mathcal{C}(X), \|.\|_\infty)$. De plus, on a clairement $\mathcal{M}(X) \subset B_1$, où B_1 est la boule (pour la norme duale) unité fermée de $\mathcal{C}(X)$'. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, B_1 est compacte pour la topologie faible-$\star$. Donc $\mathcal{M}(X)$ est relativement compact et toute suite de $\mathcal{M}(X)$ contient une sous-suite convergente. Or, d'après le lemme 14, la limite de cette suite extraite est dans $\mathcal{M}(X)$. Comme $\mathcal{M}(X)$ est métrisable, on peut conclure grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass que $\mathcal{M}(X)$ est compact.

Inversement, montrons que si $\mathcal{M}(X)$ est compact, alors X est compact. Tout d'abord, l'application notée g qui à $x \in X$ associe $\delta_x \in \mathcal{M}(X)$ est un homéomorphisme de X sur son image dans $\mathcal{M}(X)$. En effet, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et x_0 sont dans X,

$$\begin{aligned} x_n \overset{n\to\infty}{\rightarrow} x_0 \qquad &\Longrightarrow \forall f \in \mathcal{C}_b(X), \quad f(x_n) \overset{n\to\infty}{\rightarrow} f(x_0) \\ &\Longrightarrow \delta_{x_n} \overset{é}{\rightarrow} \delta_{x_0}. \end{aligned}$$

Si x_n ne tend pas vers x_0, alors il existe un ouvert O et une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout n, on ait $x_{\varphi(n)} \notin O$ et $x_0 \in O$. D'après le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn (voir [Per] p.42), il existe une application $g : X \to [0, 1]$ continue telle que $g_{|X\setminus O} = 1$ et $g(x_0) = 0$. Par conséquent $\delta_{x_{\varphi(n)}} \nrightarrow \delta_{x_0}$ et finalement $\delta_{x_n} \nrightarrow \delta_{x_0}$. L'application g est bien un homéomorphisme sur son image. Montrons que $\{\delta_x, x \in X\}$ est fermé dans $\mathcal{M}(X)$. Soit x_n des points de X tels que

$$\delta_{x_n} \overset{é}{\rightarrow} q,$$

alors q est dans $\mathcal{M}(X)$. Maintenant, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a aucune sous-suite convergente, alors tout sous-ensemble de $S = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est fermé. Soit $C \subseteq S$, alors

$$q(C) \geq \limsup \delta_{x_n}(C).$$

On en déduit que pour tout sous-ensemble infini S' de S, on a $q(S') = 1$, ce qui est impossible puisque q est dans $\mathcal{M}(X)$. Il existe donc une suite extraite $(x_{\psi(n)})_n$ convergeant vers un point x de X. D'après ce qui précède, la suite $(\delta_{x_{\psi(n)}})_n$ converge vers δ_x. L'espace $\mathcal{M}(X)$ étant séparé, on a bien $q = \delta_x$. Finalement X est homéomorphe à un fermé d'un espace compact, donc à un compact. □

Pour la première implication, on pouvait aussi utiliser le procédé d'extraction diagonal sur un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathcal{C}(X)$, puis utiliser le lemme 14. C'est d'ailleurs ce que l'on va faire dans la preuve de la proposition suivante.

Proposition 16. *L'espace X est compact si et seulement si $\mathcal{M}_b(X)$ est compact.*

Preuve. Supposons X compact. On considère une suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_b(X)$. Comme $\mathcal{C}(X)$ est séparable, soit $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sous-ensemble dense de $\mathcal{C}(X)$. Pour tous n et k, $\mu_k(h_n) \leq M_n$ où h_n est borné par M_n. La suite $(\mu_k(h_n))_{k\in\mathbb{N}}$ étant incluse dans un compact, elle admet une sous-suite convergente. En utilisant le procédé d'extraction diagonal, on peut construire une sous-suite de $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge sur tout h_n. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $(\mu_k(h_n))_{k\in\mathbb{N}}$ a une limite finie pour tout h_n. D'après le lemme 14, cela implique que $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_b(X)$. On conclut à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass puisque $\mathcal{M}_b(X)$ est métrisable (cf. [Ouv]).

La preuve de la réciproque est identique à celle de la proposition précédente. $\square$

4 Convergence d'espaces métriques mesurés

Dans cette partie, on s'intéresse au point de vue qui consiste à penser que deux espaces métriques mesurés sont proches s'ils le sont en termes d'espaces métriques et d'espaces mesurés, et on va surtout se placer dans des cas où les mesures sont doublantes (voir la définition plus loin). Pour d'autres approches de topologies sur des ensembles d'espaces métriques mesurés, on pourra consulter le livre de Gromov [Gr1].

4.1 Cas compact

On va utiliser la notion de topologie de Hausdorff-Gromov mesurée introduite dans l'article de Fukaya [Fuk].

Définition. *Soient $((X_k, d_k, \nu_k))_{k\in\mathbb{N}}$, (X, d, ν) des espaces métriques compacts munis de mesures finies. On dit que X_k converge vers X pour la topologie de Hausdorff-Gromov mesurée s'il existe des ε_k-isométries mesurables $f_k : X_k \to X$ telles que $\varepsilon_k \overset{k\to\infty}{\to} 0$ et $(f_k)_*\nu_k \overset{é}{\to} \nu$.*

La définition précédente ne donne en fait que la notion de convergence Hausdorff-Gromov mesurée, mais on pourrait décrire cette topologie. Par exemple, si on se restreint à des espaces de probabilité, on va essayer de définir une distance qui métrise cette convergence. Soient (X, d_X, μ) et (Y, d_Y, ν) deux espaces métriques compacts munis de mesures de probabilité. On définit $d_{HGP}(X, Y)$ comme la borne inférieure des $\varepsilon > 0$ tels qu'il existe deux ε-isométries mesurables $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ qui vérifient :

$$d_P((f)_*\mu, \nu) \leq \varepsilon, \quad d_P((g)_*\nu, \mu) \leq \varepsilon.$$

On va voir que d_{HGP} est presque une distance, *i.e.* c'en est une à un facteur 2 près sur l'inégalité triangulaire. La symétrie et la positivité ne posent pas de problèmes et $d_{HGP}(X, X) = 0$. Supposons que $d_{HGP}(X, Y) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une $1/n$-isométrie f_n de X dans Y avec $d_P((f_n)_*\mu, \nu) \leq 1/n$. D'après la preuve du théorème de compacité de Gromov, quitte à extraire, la suite des f_n converge en tout point d'un sous-ensemble dense D de X vers une application qui se prolonge en une isométrie $f : X \to Y$. Il n'est pas difficile de montrer, en utilisant les propriétés des $1/n$-isométries, que la suite des f_n converge en tout point de X vers f. Ensuite, par hypothèse, $(f_n)_*\mu \overset{n\to\infty}{\to} \nu$ pour la distance de Prokhorov. Or si A est un ouvert de Y et si $f(x) \in A$ pour x dans X, alors

$$\exists N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall n \geq N, \quad f_n(x) \in A.$$

Donc $f^{-1}(A) \subset \bigcup_N \bigcap_{n\geq N} f_n^{-1}(A)$. Comme c'est une union croissante, on a :

$$\mu(f^{-1}(A)) \leq \lim_{N\to\infty} \mu(\textstyle\bigcap_{n\geq N} f_n^{-1}(A)) \leq \lim_{N\to\infty} \inf_{n\geq N} \mu(f_n^{-1}(A))$$
$$\mu(f^{-1}(A)) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(f_n^{-1}(A)).$$

D'après un rappel dans la section 3, ceci est équivalent à $(f_n)_*\mu \xrightarrow{é} (f)_*\mu$. La distance de Prokhorov métrisant la topologie étroite sur $\mathcal{M}(Y)$, on en conclut que $(f)_*\mu = \nu$. Finalement (X, d_X, μ) et (Y, d_Y, ν) sont isomorphes dans le sens où il existe une isométrie de X dans Y qui envoie μ sur ν.

Il ne reste plus que l'inégalité triangulaire. Soient (X, d_X, μ_X), (Y, d_Y, μ_Y), (Z, d_Z, μ_Z) des espaces compacts munis de mesures de probabilité. Soient r_1 et r_2 deux réels strictement positifs tels que :

$$d_{HGP}(X,Y) < r_1, \quad d_{HGP}(Y,Z) < r_2,$$

et $f_1 : X \to Y$, $g_1 : Y \to X$ des r_1-isométries, $f_2 : Y \to Z$, $g_2 : Z \to Y$ des r_2-isométries, vérifiant

$$\begin{array}{ll} d_P((f_1)_*\mu_X, \mu_Y) \leq r_1, & d_P((f_2)_*\mu_Y, \mu_Z) \leq r_2 \\ d_P((g_1)_*\mu_Y, \mu_X) \leq r_1, & d_P((g_2)_*\mu_Z, \mu_Y) \leq r_2. \end{array}$$

Pour tous x et y dans X, on a, par inégalité triangulaire,

$$|d_Z(f_2 \circ f_1(x), f_2 \circ f_1(y)) - d_X(x,y)| \leq r_1 + r_2.$$

Soit z dans Z, on cherche à estimer $d_Z(f_2 \circ f_1(X), z)$. Soient $\delta > 0$ et $y \in Y$ tel que $d_Z(f_2(y), z) \leq r_2 + \delta$. Soit $x \in X$ tel que $d_Y(f_1(x), y) \leq r_1 + \delta$. On a donc :

$$\begin{aligned} d_Z(f_2 \circ f_1(X), z) &\leq d_Z(f_2 \circ f_1(x), z) \\ &\leq d_Z(f_2 \circ f_1(x), f_2(y)) + d_Z(f_2(y), z) \\ &\leq d_Y(f_1(x), y) + r_2 + r_2 + \delta \\ &\leq r_1 + 2r_2 + 2\delta. \end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre δ vers 0,

$$d_Z(f_2 \circ f_1(X), z) \leq r_1 + 2r_2.$$

L'application $f_2 \circ f_1$ est donc une $(r_1 + 2r_2)$-isométrie de X dans Z. Or, d'après la fin du paragraphe 3.1, on a aussi :

$$\begin{aligned} d_P((f_2 \circ f_1)_*\mu_X, \mu_Z) &\leq d_P((f_2 \circ f_1)_*\mu_X, (f_2)_*\mu_Y) + d_P((f_2)_*\mu_Y, \mu_Z) \\ &\leq d_P((f_1)_*\mu_X, \mu_Y) + r_2 + r_2 \\ &\leq r_1 + 2r_2. \end{aligned}$$

En faisant la même chose avec g_1 et g_2, on obtient une $(r_2 + 2r_1)$-isométrie $g_1 \circ g_2 : Z \to X$ avec $d_P((g_1 \circ g_2)_*\mu_Z, \mu_X) \leq r_2 + 2r_1$. En remplaçant $(r_2 + 2r_1)$ et $(r_1 + 2r_2)$ par $2(r_2 + r_1)$, on en déduit que $d_{HGP}(X,Z) \leq 2(r_2 + r_1)$. En prenant les bornes inférieures des r_1 et r_2, on obtient une quasi inégalité triangulaire :

$$d_{HGP}(X,Z) \leq 2(d_{HGP}(X,Y) + d_{HGP}(Y,Z)).$$

On peut alors considérer la topologie définie par d_{HGP}, qui est donc séparée, et il est évident d'après la définition de d_{HGP} que la convergence selon d_{HGP} correspond à la convergence de Hausdorff-Gromov mesurée.

Définition. *Une mesure ν sur un espace métrique (X,d) est une mesure doublante si elle est non identiquement nulle et s'il existe une constante $D>0$ telle que :*

$$\forall x \in X, \forall r>0, \quad \nu(B(x,2r)) \leq D\nu(B(x,r)).$$

On dit qu'une mesure doublante est D-doublante lorsque l'on souhaite préciser D.

On définit le support d'une mesure comme le plus petit fermé F de X dont le complémentaire dans X est de mesure nulle. Si (X,d) est muni d'une mesure D-doublante ν alors on voit facilement que le support de ν est X tout entier. En effet, soient $x \in X$ et $r>0$. Il existe $R>0$ tel que $\nu(B(x,R))>0$ (puisque ν n'est pas la mesure nulle). En choisissant n tel que $R \leq 2^n r$, on obtient que $D^n \nu(B(x,r)) \geq \nu(B(x,R))>0$. Comme r peut être pris arbitrairement petit, on en déduit que x est dans le support de ν.

Exemple. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ muni de la distance euclidienne est 2^N-doublante. Pour voir des résultats sur les mesures doublantes, on pourra consulter [Hei] ou [Sem].

Lemme 17. *Soient $R>0$, $D>0$, $m>0$ et $b>0$. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble d'espaces métriques mesurés tel que pour tout $(X,d_X,\nu_X) \in \mathcal{F}$, on ait :*

1. *diam$(X) \leq R$;*
2. *$m \leq \nu_X(X) \leq b$;*
3. *la mesure ν_X est D-doublante,*

alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N(\varepsilon) \geq 0$ tel que tout $X \in \mathcal{F}$ contient une partie ε-dense d'au plus $N(\varepsilon)$ points.

Preuve. Dans chaque $X \in \mathcal{F}$ on considère un sous-ensemble maximal de points $\{x_j\}_{j\in J_X}$ tel que les boules de centre x_j et de rayon $\varepsilon/2$ soient disjointes. Cet ensemble est ε-dense dans X. En effet, s'il existe $y \in X$ tel que pour tout x_j, $d(y,x_j)>\varepsilon$, alors la boule $B(y,\varepsilon/2)$ est disjointe des boules de centre x_j et de rayon $\varepsilon/2$, et cela contredit le fait que la famille des x_j soit maximale.

Montrons maintenant que le cardinal de cette famille est borné. Soit n tel que $R \leq 2^n(\varepsilon/2)$. Donc, pour tout x dans X,

$$m \leq \nu_X(B(x,2^n(\varepsilon/2))) \leq D^n \nu_X(B(x,\varepsilon/2))$$

ce qui implique que

$$\nu_X(B(x,\varepsilon/2)) \geq mD^{-n}.$$

Or :

$$\nu_X(\bigcup_{j\in J_X} B(x_j,\varepsilon/2)) = \sum_{j\in J_X} \nu_X(B(x_j,\varepsilon/2)),$$

par conséquent le cardinal de J_X est borné par bD^n/m, et ce, quelque soit X dans $\mathcal{F}$. On peut prendre $N(\varepsilon)=bD^n/m$. $\square$

Les propositions 18 et 19 sont énoncées dans [Vil].

Proposition 18. *Soient $R>0$, $D>0$, $m>0$ et $b>0$. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble d'espaces métriques compacts mesurés tels que pour tout $(X,d_X,\nu_X) \in \mathcal{F}$, on ait :*

1. *diam(X)≤ R ;*
2. *$m \leq \nu_X(X) \leq b$;*
3. *la mesure ν_X est D-doublante,*

alors de toute suite de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite convergente pour la topologie de Hausdorff-Gromov mesurée.

Preuve. D'après le lemme 17, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \geq 0$ tel que tout $X \in \mathcal{F}$ contient une partie ε-dense d'au plus $N(\varepsilon)$ points. Ce résultat et le fait que les diamètres des espaces soient uniformément bornés dans $\mathcal{F}$ nous permettent d'utiliser le théorème de compacité de Gromov. Toute suite de $\mathcal{F}$ contient une sous-suite convergente pour d_{HG}. Si on note $((X_k, d_k, \nu_k))_{k\in\mathbb{N}}$ la suite extraite et (X, d) sa limite, alors il existe des ε_k-isométries $f_k : X_k \to X$ avec $\varepsilon_k \overset{k\to\infty}{\to} 0$ et on peut prendre les f_k mesurables. Finalement :

$$\{(f_k)_*\nu_k, k \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{M}_b(X),$$

et $\mathcal{M}_b(X)$ étant compact, il existe $\nu \in \mathcal{M}_b(X)$ tel que, quitte à extraire,

$$(f_k)_*\nu_k \overset{é}{\to} \nu.$$

On a bien la convergence Hausdorff-Gromov mesurée de $((X_k, d_k, \nu_k))_{k\in\mathbb{N}}$ vers (X, d, ν). □

4.2 Cas non compact

Définition. *Soient $((X_k, d_k, \nu_k, p_k))_{k\in\mathbb{N}}$, (X, d, ν, p) des espaces métriques pointés mesurés. On dit que X_k converge vers X au sens de la convergence de Hausdorff-Gromov pointée mesurée s'il existe des suites de réels positifs $\varepsilon_k \overset{k\to\infty}{\to} 0$ et $R_k \overset{k\to\infty}{\to} \infty$, et des ε_k-isométries pointées f_k entre les boules $B(p_k, R_k) \subset X_k$ et $B(p, R_k) \subset X$ telles que $(f_k)_*\nu_k \overset{v}{\to} \nu$, i.e. pour tout f dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(X)$, $\lim_{k\to\infty}(f_k)_*\nu_k(f) = \nu(f)$.*

On définit un espace métrique propre comme un espace métrique dans lequel toutes les boules fermées (de rayon fini) sont compactes. On remarque alors que propre implique localement compact et complet. Les propositions 8 et 19 fournissent des espaces métriques propres.

Proposition 19. *Soient $R > 0$, $D > 0$, $m > 0$ et $b > 0$. Soit $\mathcal{F}$ un ensemble d'espaces métriques pointés complets munis de mesures, tel que pour tout $(X, d_X, \nu_X, p_X) \in \mathcal{F}$, on ait :*

1. *$m \leq \nu_X(B(p_X, 1)) \leq b$;*
2. *pour tout $R > 0$, il existe une constante D_R telle que la mesure ν_X est D_R-doublante sur $B(p_X, R)$.*

Alors de toute suite de $\mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite qui converge, pour la topologie de Hausdorff-Gromov pointée mesurée, vers un espace métrique propre muni d'une mesure de Radon.

Remarques.

1. Il suffit que la deuxième condition soit remplie pour R assez grand.
2. Les conditions impliquent que tout élément de $\mathcal{F}$ est propre.

Preuve. Soit $((X_n, d_n, \nu_n, p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{F}$ et $R \geq 1$. Les mesures des boules $B(p_n, R)$ sont uniformément bornées car, en prenant un entier k tel que $R2^{-k} \leq 1$ on a alors :

$$m \leq \nu_n(B(p_n, R)) \leq D_R^k \nu_n(B(p_n, R/2^k)) \leq D_R^k b.$$

On obtient alors par le lemme 17 la condition du théorème de compacité sur les espaces métriques pointés. Après extraction, la suite des espaces métriques pointés (X_n, d_n, ν_n, p_n) converge vers un espace métrique pointé propre (X, d, p). Il existe donc des ε_n-isométries pointées f_n entre les boules $B(p_n, R_n) \subset X_n$ et $B(p, R_n) \subset X$ avec $\varepsilon_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Soit maintenant $R \geq 1$. Or,

$$(f_n)_*\nu_n(\bar{B}(p, R)) = \nu_n(f_n^{-1}(\bar{B}(p, R))) \leq \nu_n(\bar{B}(p_n, R + \varepsilon_n)).$$

Donc pour n assez grand, les mesures $(f_n)_*\nu_n$ restreintes aux boules $\bar{B}(p, R)$, qui sont compactes, sont dans $\mathcal{M}_{D_{R+1}{}^k b}(\bar{B}(p, R))$, où k est tel que $2^{-k}(R+1) \leq 1$. D'après la proposition 16, cette suite de mesures contient une sous-suite qui converge étroitement, et donc aussi vaguement vers une mesure finie sur $\bar{B}(p, R)$. Après extraction diagonale en faisant tendre R vers l'infini, on peut supposer que $(f_n)_*\nu_{n|_{\bar{B}(p,R)}}$ converge pour tout $R \in \mathbb{N}^*$ vers une mesure finie ν_R. Montrons que si $R' > R$, alors $\nu_{R'|_{\bar{B}(p,R)}} = \nu_R$. Soit $f \in \mathcal{C}_\mathcal{K}(\bar{B}(p, R))$, donc $f1_{\bar{B}(p,R)} \in \mathcal{C}_\mathcal{K}(\bar{B}(p, R'))$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} (f_n)_*\nu_{n|_{\bar{B}(p,R')}}(f1_{\bar{B}(p,R)}) = \nu_{R'}(f1_{\bar{B}(p,R)}).$$

Or $(f_n)_*\nu_{n|_{\bar{B}(p,R')}}(f1_{\bar{B}(p,R)}) = (f_n)_*\nu_{n|_{\bar{B}(p,R)}}(f)$. La topologie vague sur $\mathcal{M}_{D_{R+1}{}^k b}(\bar{B}(p, R))$ étant séparée car métrisable, on en déduit que $\nu_{R'|_{\bar{B}(p,R)}} = \nu_R$. Maintenant, si f est dans $\mathcal{C}_\mathcal{K}(X)$, il existe un entier l tel que le support de f soit dans $\bar{B}(p, l)$, et on pose alors $\nu(f) = \nu_l(f) = \lim_{n\to\infty} (f_n)_*\nu_{n|_{\bar{B}(p,l)}}(f) = \lim_{n\to\infty}(f_n)_*\nu_n(f)$. Il est immédiat, grâce à la compatibilité des ν_R, que ν ainsi défini est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_\mathcal{K}(X)$. Par le théorème de Riesz, on peut voir ν comme une mesure de Radon sur X. C'est ce qu'il fallait montrer. □

Références

[Bil] P. Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, New York, 1968.

[Bur] D. Burago, Yu. Burago, and S. Yvanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics **33**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Doo] J.L. Doob, *Measure theory*, Graduate Texts in Mathematics **143**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Fuk] K. Fukaya, *Collapsing of Riemannian manifolds and eigenvalues of Laplace operator*, Invent. Math. **87**, 3 (1987), 517-547.

[Gal] J.-F. Le Gall, *Intégration, probabilités et processus aléatoires*, polycopié de cours de l'Ecole normale supérieure de Paris, 2005.

[Gr1] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progress in Mathematics **152**, Birkhäuser, Boston, 1999.

[Gr2] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Publ. Math. de l'IHES, 1980.

[Hei] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Springer, New York, 2001.

[Ouv] J.-Y. Ouvrard, *Probabilités 2*, Cassini, Paris, 2000.

[Par] K.R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Academic Press, New York, 1967.

[Per] B. Perthame, *Topologie et analyse différentielle*, polycopié de cours de l'Ecole normale supérieure de Paris, 2005.

[Sem] S. Semmes, *Some novel types of fractal geometry*, Oxford University Press, New York, 2001.

[Vil] C. Villani, *Optimal transport*, version incomplète de ses notes de cours de Saint-Flour, soumis à publication.