Inégalités de corrélation et percolation

Benoit Huou   Charles-Henri Kempeners   sous la direction de Pierre Nolin

25 juin 2008

Résumé

Il s'agit ici de donner une brève introduction à la percolation et à son formalisme puis de présenter une preuve de l'inégalité de Van der Berg-Kesten-Reimer. Elle nous servira par la suite à comprendre la décroissance exponentielle du processus de percolation en phase sous-critique. Enfin, nous donnerons d'autres inégalités qui peuvent servir en percolation.

Table des matières

1 Introduction à la percolation

On considère l'ensemble des segments d'un sous-graphe connexe de $\mathbb{Z}^d$, que l'on note $\mathbb{E}^d$. On définit une configuration par $\omega : \mathbb{E}^d \to \{0,1\}$. On dit qu'un segment e est ouvert si $\omega(e) = 1$ et est fermé sinon. On fixe un réel p dans $[0,1]$. On note $\Omega_e = \{0,1\}$. On le munit de la mesure de Bernoulli de paramètre p, notée μ_e. On définit $\Omega = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \Omega_e$ que l'on munit de la tribu produit et de la mesure de probabilités $P_p = \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e$. Les états des segments sont indépendants entre eux. On munit l'ensemble des configurations ω d'un ordre partiel :

$$\omega \leq \omega' \Leftrightarrow \forall e \in \mathbb{E}^d, \omega(e) \leq \omega'(e)$$

On dit qu'une variable aléatoire X est croissante si

$$\omega \leq \omega' \Rightarrow X(\omega) \leq X(\omega')$$

On dit qu'un évènement est croissant si son indicatrice est croissante. Soit $p = (p(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ une collection de réels tels que $0 \leqslant p(e) \leqslant 1$ pour tous e. Soit $\{X(e); e \in \mathbb{E}^d\}$ un ensemble de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$. On définit à présent η_p par $\eta_p(e) = 1$ si $X(e) < p(e)$ et $\eta_p(e) = 0$ sinon. Avec P_p la mesure de probabilités sur Ω telle que l'état $\omega(e)$ du segment e est égal à 1 avec une probabilité $p(e)$, on a pour un événement A

$$P_p(A) = P(\eta_p \in A)$$

Théorème 1.1 *Si N est une variable aléatoire croissante, alors*

$$E_{p_1}(N) \leqslant E_{p_2}(N) \text{ pour } p_1 \leqslant p_2 \tag{1}$$

dès que ces expressions sont définies. De même, si A est un évènement croissant, alors

$$P_{p_1}(A) \leqslant P_{p_2}(A) \text{ pour } p_1 \leqslant p_2 \tag{2}$$

Preuve Si $p_1 \leqslant p_2$ alors $\eta_{p_1} \leqslant \eta_{p_2}$ et donc pour N croissante, on a $N(\eta_{p_1}) \leqslant N(\eta_{p_2})$. On obtient donc la première assertion. Pour la deuxième partie du théorème, il suffit d'appliquer la première à la variable aléatoire croissante $N = 1_A$.

Définition On dit qu'un chemin est ouvert (resp. fermé) si tous les segments qui le composent sont ouverts (resp. fermés). On dit que deux points x et y sont reliés s'il existe un chemin ouvert d'extrémités x et y. On note $x \leftrightarrow y$. On définit la composante connexe d'un point x, notée $C(x)$ par $C(x) = \{y; y \leftrightarrow x\}$.

Définition On note $\theta(p) = P_p($ il existe une composante connexe ouverte infinie $)$. On pose $p_c = sup\{p \in [0,1]; \theta(p) = 0\}$, appelée probabilité critique. Par définition si $p < p_c, \theta(p) = 0$.

Proposition 1.2 *Si $p > p_c, \theta(p) = 1$.*

Preuve On munit $\mathbb{Z}^d$ de la distance usuelle. On choisit un point x. On définit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les états des segments dont l'une des extrémités est à distance au plus n de x. Alors pour tout n, l'évènement {il existe une composante connexe infinie} est indépendant de $\mathcal{F}_n$, donc indépendant de $\mathcal{F}_\infty$ la tribu engendrée par l'union des $\mathcal{F}_n$, tout en étant $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable. Par la loi du 0-1 de Kolmogorov, on a le résultat.

On donne deux autres résultats sans démonstration.

Théorème 1.3 *La composante connexe infinie, si elle existe, est presque sûrement unique.*

Théorème 1.4 *Pour le graphe « carré » de $\mathbb{Z}^2$, la probabilité critique est égale à $\frac{1}{2}$.*

2 Inégalité BKR

Définition On dit que deux évènements sont réalisés de manière disjointe s'il existe deux ensembles disjoints sur lesquels ils sont réalisés. On note cet événement $A \circ\ B$.

L'inégalité BKR s'énonce ainsi :

Théorème 2.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilités muni de sa tribu $\mathcal{F}$, et de sa mesure de probabilités $\mathbf{P}$. Alors, pour tous $A, B \in \mathcal{F}$, on a :*

$$\mathbf{P}(A \circ B) \leq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \tag{3}$$

2.1 Introduction

Nous allons vous donner une preuve de cette inégalité présentant plusieurs variations par rapport à la preuve originelle de Reimer. Mais, premièrement, restituons un peu cette inégalité dite de corrélation : Fortuin, Kasteleyn et Ginibre définissent la notion d'évènement croissant ou décroissant. Van den Berg et Kesten n'ont prouvé cette inégalité que dans le cas où A et B sont des évènements tous les deux croissants ou tous les deux décroissants au sens de Fortuin, Kasteleyn et Ginibre, mais avaient conjecturé qu'elle restait valable pour le cas général. Après de nombreuses tentatives de la part de nombreux chercheurs, c'est Reimer qui a le premier donné une preuve du cas général, nous allons présenter une version légèrement remodelée de cette preuve.

2.2 Outils et formalisme

Sans perte de généralité, considérons un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ fini, où Ω est un produit d'ensembles finis $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$, munis de mesures de probabilités $\mathbf{P}_i$, on a
$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times ... \times \mathbf{P}_n$ et $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties de Ω. Soit S une partie de $\{1, ..., n\}$ et soit S^c son complémentaire dans $\{1, ..., n\}$. On dit qu'un évènement $A \in \mathcal{F}$ est réalisé sur l'ensemble S dans la configuration ω si A est réalisé quelles que soient les valeurs des ω_i pour $i \in S^c$, on note A_S l'ensemble de ces ω

$$A_S = \{\omega; \forall \widetilde{\omega}, \forall i \in S, \omega_i = \widetilde{\omega}_i \Rightarrow \widetilde{\omega} \in A\}$$

On peut ainsi redéfinir $A \circ B$ de telle sorte :

$$A \circ B = \{\omega; \exists S, T \subseteq \{1, ..., n\}, S \cap T = \oslash \text{ et } \omega \in A_S \cap B_T\}$$

Soient $\omega \in \Omega$ et $S \subseteq \{1, .., n\}$, on définit le cylindre $[\omega]_S$ par

$$[\omega]_S = \{\widetilde{\omega}; \widetilde{\omega}_i = \omega_i, \forall i \in S\}$$

Puis

$$A \circ B = \{\omega; \exists S = S(\omega) \subseteq \{1, ..., n\}, [\omega]_S \subseteq A \text{ et } [\omega]_{S^c} \subseteq B\}$$

2.3 Formes équivalentes

Proposition 2.2 *Pour montrer l'inégalité, il suffit de la montrer sur* $\{0,1\}^n$ *avec la mesure uniforme, c'est-à-dire*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall A, B \subseteq \{0,1\}^n, card(A \circ B) 2^n \leq card(A) card(B) \tag{4}$$

Preuve Supposons que l'inégalité est valable dans $\{0,1\}^k$ avec la mesure uniforme et considérons $\Omega = \Omega_1 \times ... \times \Omega_n$ muni de sa mesure produit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times ... \times \mathbf{P}_n$. On note $\Omega_i = \{\omega_{i1}, ..., \omega_{im_i}\}$ Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et tout $j \in \{1, ..., m_i - 1\}$, et pour tout $n \in N$, on pose

$$k_{ij}^{(p)} = \lfloor 2^p \mathbf{P}_i(\omega_i j) \rfloor \text{ et } k_{im_i}^{(p)} = 2^p - \sum_{j=1}^{m_i - 1} k_{ij}^{(p)}$$

puis

$$\mu_i^p(\omega_{ij}) = \frac{k_{ij}^{(p)}}{2^p}, \text{ et } \mu^p = \mu_1^p \times ... \times \mu_n^p$$

alors la suite (μ^p) converge simplement vers $\mathbf{P}$. Fixons maintenant p, et posons $\Omega'_i = \{0,1\}^p$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $\Omega' = \Omega'_1 \times ... \times \Omega'_n = \{0,1\}^{np}$, que l'on munit d'une mesure uniforme μ_0. Soit, pour tout $j \in \{1, ..., m_i\}, \Omega'_{ij}$ tel que

$$\left|\Omega'_{ij}\right| = k_{ij} \text{ et } \Omega'_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} \Omega'_{ij}$$

Soit alors $f : \Omega' \to \Omega$ telle que $f = (f_1, ..., f_n)$, où $f_i : \Omega'_i \to \Omega_i$ est définie par $f_i(\omega'_i) = \omega_{ij}$ si $\omega'_i \in \Omega'_{ij}$. Alors $\mu^p(.) = \mu_0(f^{-1}(.))$. Pour $A, B \subseteq \Omega$, posons $A' = f^{-1}(A)$ et $B' = f^{-1}(B)$. Utilisant l'inégalité BKR dans $\{0,1\}^{np}$, on obtient

$$\begin{aligned} \mu^p(A)\mu^p(B) &= \mu_0(A')\mu_0(B') \\ &\geq \mu_0(A' \circ B') \end{aligned}$$

Montrons maintenant que

$$f^{-1}(A \circ B) \subseteq f^{-1}(A) \circ f^{-1}(B)$$

Soit $x \in f^{-1}(A \circ B)$, alors $f(x) \in A \circ B$, donc il existe $S \subseteq \{1, ..., n\}$ tel que

$$[f(x)]_S \subseteq A \text{ et } [f(x)]_{S^c} \subseteq B$$

Par conséquent,

$$f^{-1}([f(x)]_S) \subseteq f^{-1}(A) \text{ et } f^{-1}([f(x)]_{S^c}) \subseteq f^{-1}(B)$$

On définit ensuite le sous ensemble S' de $\{1, ..., np\}$ par

$S' = \{i \in \{1, ..., np\}; \left\lceil \frac{i}{p} \right\rceil \in S\}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} [x]_S &\subseteq \bigcup_{y \in f^{-1}(f(x))} [y]_{S'} \\ &= f^{-1}([f(x)]_S) \\ &\subseteq f^{-1}(A) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[x]_{S^c} &\subseteq \bigcup_{y \in f^{-1}(f(x))} [y]_{S'^c} \\
&= f^{-1}([f(x)]_{S^c}) \\
&\subseteq f^{-1}(B)
\end{aligned}
$$

Ce qui nous donne

$$
\begin{aligned}
\mu^p(A)\mu^p(B) &\geq \mu_0(A' \circ B') \\
&= \mu_0(f^{-1}(A) \circ f^{-1}(B)) \\
&\geq \mu_0(f^{-1}(A \circ B)) \\
&= \mu(A \circ B)
\end{aligned}
$$

En faisant tendre p vers ∞, on obtient le résultat voulu.

Définition Soit $X \subseteq \Omega$, et soit $S : X \to 2^{\{1,\dots,n\}}$ une application arbitraire. On définit alors

$$
[X]_S = \bigcup_{x \in X} [x]_{S(x)} \text{ et } [X]_{S^c} = \bigcup_{x \in X} [x]_{S(x)^c}
$$

Proposition 2.3 *Il y équivalence entre :*
- *(i) Pour tous $A, B \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(A \circ B) \leq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$*
- *(ii) Pour tout $X \subseteq \Omega$ et tout $S : X \to 2^{\{1,\dots,n\}}$, $\mathbf{P}(X) \leq \mathbf{P}([X]_S)\mathbf{P}([X]_{S^c})$*

Preuve $(i) \Rightarrow (ii)$: Soient $X \subseteq \Omega$ et $S : X \to 2^{\{1,\dots,n\}}$ Posons alors $A = [X]_S$ et $B = [X]_{S^c}$, alors on a $X \subseteq A \circ B$,et

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(X) &\leq \mathbf{P}(A \circ B) \\
&\leq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \\
&= \mathbf{P}([X]_S)\mathbf{P}([X]_{S^c})
\end{aligned}
$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Soient $A, B \subseteq \Omega$, posons $X = A \circ B$, alors, par définition, pour tout $x \in X$, il existe $S(x) \subseteq \{1, ..., n\}$ tel que

$$
[x]_{S(x)} \subseteq A \text{ et } [x]_{S(x)^c} \subseteq B
$$

Par conséquent,

$$
[X]_S \subseteq A \text{ et } [X]_{S^c} \subseteq B
$$

et on a :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \circ B) &= \mathbf{P}(X) \\
&\leq \mathbf{P}([X]_S)\mathbf{P}([X]_{S^c}) \\
&\leq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)
\end{aligned}
$$

2.4 Lemme de Reimer

Avant de l'énoncer, clarifions quelques points : nous travaillons désormais avec $\Omega = \{0,1\}^n$ et $\mathbf{P}$ est la mesure uniforme sur Ω, et nous essayons de démontrer l'assertion (ii) de la proposition précédente. Définissons le complémentaire d'un élément dans un ensemble cylindrique :
si $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$, si $S \subseteq \{1, ..., n\}$, et si $A = [x]_S = \{y \in \Omega; \forall i \in S, x_i = y_i\}$, alors pour $z \in A$, $\bar{z}^{(A)}$ est l'élément de Ω tel que

$$\forall i \in S, \bar{z}_i^{(A)} = z_i \text{ et } \forall i \in A^c, \bar{z}_i^{(A)} = 1 - z_i$$

Donc pour $A = \Omega, \bar{z}^{(\Omega)} = \bar{z} = (1 - z_1, ..., 1 - z_n)$. Pour $T \subseteq \Omega$, on note

$$\bar{T} = \bigcup_{x \in T} \bar{x} \text{ et } \bar{T}^{(A)} = \bigcup_{x \in T} \bar{x}^{(A)}$$

Proposition 2.4 *(Lemme de Reimer) Soient $n \in \mathbb{N}$, $X \subseteq \Omega$ et $S : X \to 2^{\{1,..,n\}}$. En posant $U = [X]_S$ et $V = [X]_{S^c}$, on a :*

$$\begin{aligned} \left|U \cap \bar{V}\right| &= \left|\bar{U} \cap V\right| \\ &\geq |X| \end{aligned}$$

Ce lemme implique l'inégalité, montrons-le :
Démonstration Premièrement, on pose, pour $x, y \in \Omega$,

$$\langle x, y \rangle = \{z \in \Omega; \forall i \in \{1, ..., n\}, x_i = y_i \Rightarrow z_i = x_i\}$$

$$\begin{aligned} |U|\,|V| &= |U \times V| \\ &= \sum_{A \text{ ensemble cylindrique de } \Omega} |\{(u,v) \in U \times V; \langle u, v \rangle = A\}| \\ &= \sum_A |\{(u,v) \in (U \cap A) \times (V \cap A); \langle u, v \rangle = A\}| \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que pour $u, v \in \Omega$ et pour A ensemble cylindrique de Ω, c'est-à-dire tel qu'il existe $z \in \Omega$ et $R \subseteq \{1, ..., n\}$ tels que $A = [z]_R$, dire que $\langle u, v \rangle = A$ équivaut à dire que $R = \{i \in \{1, ..., n\}; u_i = v_i\}$ et donc que $v = \bar{u}^{(A)}$ (ou que $u = \bar{v}^{(A)}$). Donc on a :

$$\begin{aligned} |U|\,|V| &= \sum_A \left|\{(u,v) \in (U \cap A) \times (V \cap A); u = \bar{v}^{(A)}\}\right| \\ &= \sum_A \left|\{(u \in U \cap A; u \in \overline{V \cap A}^{(A)}\}\right| \\ &= \sum_A \left|(U \cap A) \cap (\overline{V \cap A}^{(A)})\right| \end{aligned}$$

Montrons grâce au lemme de Reimer que

$$\left|(U \cap A) \cap (\overline{V \cap A}^{(A)})\right| \geq |X \cap A|$$

ce pour tout ensemble cylindrique A de Ω. Soient $z \in \Omega$ et $R \subseteq \{1, ..., n\}$ tels que $A = [z]_R$. Posant $\Omega_A = \{0,1\}^{R^c}$, définissons l'application $f : \Omega_A \to A$ pour ω dans Ω_A par

$$f(\omega)_i = \begin{cases} \omega_i & \text{si } i \in R^c \\ z_i & \text{si } i \in R \end{cases}$$

f est une application bijective car injective et par cardinalité. Posons

$$X'_A = f^{-1}(X \cap A)$$

et

$$\begin{aligned} S' :& X'_A \to 2^{R^c} \\ & x' \longmapsto S(f(x')) \cap R^c \end{aligned}$$

D'après le lemme de Reimer,

$$\begin{aligned} |X \cap A| &= |X'_A| \\ &\leq \left| [X'_A]_{S'} \cap [\overline{X'_A}]_{S'^c} \right| \\ &= \left| [X \cap A]_{S \cup R} \cap [\overline{X \cap A}^{(A)}]_{S^c \cup R} \right| \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le lemme de Reimer appliqué à X'_A pour la deuxième ligne et $[X'_A]_{S'} = \bigcup_{x' \in X'_A} [x']_{S'(x')}$ pour la troisième. Et on a

$$\begin{aligned} x' \in [X'_A]_{S'} &\Leftrightarrow \exists y' \in X'_A, x' \in [y']_{S'(y')} \\ &\Leftrightarrow \exists y' \in X'_A, x' \in [y']_{S(f(y')) \cap R^c} \\ &\Leftrightarrow \exists y' \in X'_A, \forall i \in S(f(y')) \cap R^c, x'_i = y'_i \\ &\Leftrightarrow \exists y' \in X'_A, \forall i \in S(f(y')) \cap R^c, f(x')_i = f(y')_i \text{ et } \forall i \in R, f(x')_i = f(y')_i = z_i \\ &\Leftrightarrow \exists y \in X \cap A, \forall i \in S(y) \cup R, f(x')_i = y_i \\ &\Leftrightarrow \exists y \in X \cap A, f(x') \in [y]_{S(y) \cup R} \end{aligned}$$

donc $f([X'_A]_{S'}) = [X \cap A]_{S \cup R}$, et par un argument similaire, $f([\overline{X'_A}]_{S'^c}) = [\overline{X \cap A}^{(A)}]_{S^c \cup R}$. Par bijectivité de f, il y a égalité du cardinal des intersections. Puis, montrons que

$$[X \cap A]_{S \cup R} \cap [\overline{X \cap A}^{(A)}]_{S^c \cup R} \subseteq (U \cap A) \cap \overline{V \cap A}^{(A)}$$

Pour ce faire, contentons-nous de montrer que

$$[\overline{X \cap A}^{(A)}]_{S^c \cup R} \subseteq \overline{V \cap A}^{(A)}$$

car montrer que $[X \cap A]_{S \cup R} \subseteq U \cap A$ est similaire.

$$\begin{aligned}
[\overline{X \cap A}^{(A)}]_{S^c \cup R} &= \bigcup_{x \in \overline{X \cap A}^{(A)}} [x]_{S(x)^c \cup R} \\
&= \bigcup_{x \in X \cap A} [\bar{x}^{(A)}]_{S(x)^c \cup R}
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
[\bar{x}^{(A)}]_{S(x)^c \cup R} &= \{y \in \Omega; \forall i \in S(x)^c \cup R, y_i = \bar{x}_i^{(A)}\} \\
&= \overline{[x]_{S(x)^c \cup R}}^{(A)}
\end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
[\overline{X \cap A}^{(A)}]_{S^c \cup R} &= \bigcup_{x \in X \cap A} \overline{[x]_{S(x)^c \cup R}}^{(A)} \\
&= \overline{\bigcup_{x \in X \cap A} [x]_{S(x)^c \cup R}}^{(A)} \\
&= \overline{\bigcup_{x \in X \cap A} ([x]_R \cap [x]_{S(x)^c})}^{(A)} \\
&= \overline{\bigcup_{x \in X \cap A} (A \cap [x]_{S(x)^c})}^{(A)} \\
&\subseteq \overline{\bigcup_{x \in X} (A \cap [x]_{S(x)^c})}^{(A)} \\
&= \overline{A \cap \bigcup_{x \in X} [x]_{S(x)^c}}^{(A)} \\
&= \overline{V \cap A}^{(A)}
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant tout ce qui précède, on obtient :

$$\begin{aligned}
|U|\,|V| &\geq \sum_{A \text{ ensemble cylindrique de } \Omega} |X \cap A| \\
&= \sum_{A} \sum_{x \in X \cap A} 1 \\
&= \sum_{x \in X} \sum_{A \text{ contenant x}} 1 \\
&= \sum_{x \in X} \left| 2^{\{1, \ldots, n\}} \right| \\
&= |X|\,|\Omega|
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière inégalité provient du fait que tous les ensembles cylindriques contenant x sont tous les $[x]_S$ avec $S \subseteq \{1, ..., n\}$. Cela achève la démonstration.

2.5 Preuve du lemme de Reimer

Premièrement, pour $A \subseteq \Omega$, on a : $|\bar{A}| = |A|$, donc, en conservant les notations de l'énoncé du lemme, on a automatiquement $|U \cap \bar{V}| = |\bar{U} \cap V|$. Puis

$$\begin{aligned} |U \cap \bar{V}| \geq |X| &\Leftrightarrow |U^c \cup \bar{V}^c| \leq |\Omega| - |X| \\ &\Leftrightarrow |U^c| + |U \cup \bar{V}^c| + |X| \leq |\Omega| \\ &\Leftrightarrow |\bar{U}^c| + |U \cup \bar{V}^c| + |X| \leq |\Omega| \end{aligned}$$

L'idée de la preuve est de construire trois applications injectives α, β et γ définies respectivement sur $\bar{U}^c$, $U \cup \bar{V}^c$ et X, à valeurs dans $\mathbb{R}^{2^n}$ (muni de son produit scalaire usuel $\langle ., . \rangle$) telles que la famille des vecteurs images soit libre dans $\mathbb{R}^{2^n}$. La définition de ces applications se fait à l'aide d'une fonction

$$\begin{aligned} \Phi : &\Omega \times 2^{\{1,...,n\}} \to \mathbb{R}^{2^n} \\ &(x, R) \longmapsto \Phi(x, R) \end{aligned}$$

Définissons les trois applications :

1. $\alpha : \bar{U}^c \to \mathbb{R}^{2^n}$
   $x \longmapsto \Phi(x, \emptyset)$
2. $\beta : U \cup \bar{V}^c \to \mathbb{R}^{2^n}$
   $x \longmapsto \Phi(x, \{1, ..., n\})$
3. $\gamma : X \to \mathbb{R}^{2^n}$
   $x \mapsto \Phi(x, S(x))$

Définissons maintenant Φ : Soit $\oplus$ le produit de concaténation défini par $(a, b) \oplus (c, d) = (a, b, c, d)$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, soit $\otimes$ le produit tensoriel défini par $(a, b) \otimes v = av \oplus bv$, pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^m$. Alors,

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega = \{0, 1\}^n, \forall S \subseteq \{1, ..., n\}, \Phi(x, S) = \bigoplus_{i=1}^{n} \phi_i(x_i, S),$$

$$\text{où } \phi_i(x_i, S) = \begin{cases} (x_i, -1) & \text{si } i \notin S \\ (1, x_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

La preuve consiste alors à montrer ces six assertions :

1. $\forall y \in \bar{U}^c, \forall z \in U \cup \bar{V}^c \ \langle \Phi(y, \emptyset), \Phi(z, \{1, ..., n\}) \rangle = 0$
2. $\forall y \in \bar{U}^c, \forall x \in X \ \langle \Phi(y, \emptyset), \Phi(x, S(x)) \rangle = 0$
3. $\forall z \in U \cup \bar{V}^c, \forall x \in X \ \langle \Phi(z, \{1, ..., n\}), \Phi(x, S(x)) \rangle = 0$
4. $\{\Phi(x, S(x)); x \in X\}$ est une famille libre

5. $\Phi(\bar{U}^c, \emptyset)$ est une famille libre
6. $\Phi(U \cup \bar{V}^c, \{1, ..., n\})$ est une famille libre

Pour prouver ces assertions, on se sert de la formule suivante qui peut être démontrée par récurrence :

Pour $(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_n) \in (\mathbb{R}^2)^{2n}$, on a $\langle \bigoplus_{i=1}^n v_i, \bigoplus_{i=1}^n w_i \rangle = \prod_{i=1}^n \langle v_i, w_i \rangle$.

1. Soient $y \in \bar{U}^c$ et $z \in U \cup \bar{V}^c$,
   alors $y \notin \bar{U}$
   donc $\bar{y} \notin U$ et $z \in U$,
   donc $\bar{y} \neq z$
   et il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $y_i = z_i$,
   alors
   $$\langle \phi_i(y_i, \emptyset), \phi_i(z, \{1, ..., n\}) \rangle = \langle (y_i, -1), (1, x_i) \rangle = 0$$
   Donc
   $$\langle \Phi(y, \emptyset), \Phi(z, \{1, ..., n\}) \rangle = 0$$
   ce qui donne (1).
2. Soient $y \in \bar{U}^c$ et $x \in X$,
   on a donc $\bar{y} \notin U = [X]_S$,
   donc $\bar{y} \notin [x]_{S(x)}$,
   c'est-à-dire qu'il existe $i \in S(x)$ tel que $y_i = x_i$.
   Donc, de la même manière que pour (1), on obtient
   $$\langle \Phi(y, \emptyset), \Phi(x, S(x)) \rangle = 0$$
3. Soient $z \in U \cup \bar{V}^c$ et $x \in X$,
   alors $\bar{z} \notin V$
   donc $\bar{z} \notin [x]_{S(x)^c}$
   et il existe $i \in S(x)^c$ tel que $z_i = x_i$.
   Ainsi,
   $$\langle \phi_i(z_i, \{1, ..., n\}), \phi_i(x_i, S(x)) \rangle = \langle (1, z_i), (x_i, -1) \rangle = 0$$
   Donc
   $$\langle \Phi(z, \{1, ..., n\}), \Phi(x, S(x)) \rangle = 0$$

L'assertion (4) est celle qui demande le plus de travail, et nous allons la prouver en étendant l'application S arbitrairement à Ω tout entier.
Mais une fois qu'on a montré que $\{\Phi(x, S(x)); x \in X\}$ est une famille libre, les assertions (5) et (6) découlent immédiatement. En effet, il suffit de se placer dans le cas de $S(x) = \emptyset \; \forall x \in \Omega$ ou celui de $S(x) = \{1, ..., n\} \; \forall x \in \Omega$. Plongeons ces vecteurs dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2^n}$ et montrons qu'ils constituent une famille libre dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2^n}$, a fortiori le résultat sera valide dans $\mathbb{R}^{2^n}$. Montrons donc par récurrence sur n que les vecteurs $\Phi(x, S(x)), x \in \{0, 1\}^n$ sont linéairement indépendants dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2^n}$.

Tout d'abord, réorganisons les éléments de Ω, on note y^k l'élément de Ω dont les n coordonnées constituent la représentation binaire de $k-1$, par exemple pour $n=2$, $y^2=(0,1)$. Ainsi $\Omega=\{y^k; 0<k\leq 2^n\}$ et quand on passera de l'étape n à l'étape $n+1$, on aura

$$\{0,1\}^{n+1}=\{0y^k; y^k\in\{0,1\}^n\}\cup\{1y^k; y^k\in\{0,1\}^n\}$$

où $0y^k=(0,y_1^k,...,y_n^k)$ est la représentation binaire de $k-1$ dans $\{0,1\}^{n+1}$ et $1y^k=(1,y_1^k,...,y_n^k)$ est la représentation binaire de 2^n+k-1 dans $\{0,1\}^{n+1}$.

Puis, pour $\Omega=\{0,1\}^n$, on définit la matrice $A_S^{(n)}$, matrice dont la $k^{\text{ème}}$ ligne est le vecteur de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2^n}$ $\Phi(y^k,S(y^k))$.

Montrons par récurrence que

$$detA_S^{(n)}=1,\forall n$$

Cas $n=1$: $A_S^{(1)}$ est une matrice 2×2, $\Omega=\{0,1\}$.

Suivant l'application S, calculons le déterminant de cette matrice :

- $S(0)=S(1)=\emptyset$,
- $S(0)=S(1)=1$
- $S(0)=\emptyset$ et $S(1)=1$
- $S(0)=1$ et $S(1)=\emptyset$

Dans tous les cas $detA_S^{(1)}=1$

Si la propriété est vraie au rang n,

$$\forall S:\{0,1\}^n\to 2^{\{1,\dots,n\}}, detA_S^{(n)}=1$$

On se place désormais dans le cas où $\Omega=\{0,1\}^{n+1}$, $S:\{0,1\}^{n+1}\to 2^{\{1,\dots,n+1\}}$,

Pour $1\leq k\leq 2^n$, la première coordonnée de y^k est un zéro,

donc

$$\phi_1(y_1^k,S(y_1^k))=\begin{cases}(1,0) & \text{si } 1\in S(y^k)\\ (0,1) & \text{sinon}\end{cases}$$

Définissons $S^0:\{0,1\}^n\to 2^{\{1,\dots,n\}}$ par

$$S^0(y^k)=\{i\in\{1,...,n\}; i+1\in S(0y^k)\}$$

application définie sur « la première partie de Ω » en quelque sorte.

Par conséquent, pour $1\leq k\leq 2^n$, on a :

- si $1\in S(y^k)$

$$\begin{aligned}A_S^{(n+1)}(k,.)&=(1,0)\otimes\bigotimes_{i=2}^{n+1}\phi_i(y_i^k,S(y^k))\\&=\bigotimes_{i=2}^{n+1}\phi_i(y_i^k,S(y^k))\oplus\bigoplus_{j=1}^{2^n}0\\&=A_{S^0}^{(n)}(k,.)\oplus\bigoplus_{j=1}^{2^n}0\end{aligned}$$

– si $1 \notin S(y^k)$

$$A_S^{(n+1)}(k,.) = (0,1) \otimes \bigotimes_{i=2}^{n+1} \phi_i(y_i^k, S(y^k))$$
$$= \bigoplus_{j=1}^{2^n} 0 \oplus \bigotimes_{i=2}^{n+1} \phi_i(y_i^k, S(y^k))$$
$$= \bigoplus_{j=1}^{2^n} 0 \oplus A_{S^0}^{(n)}(k,.)$$

Donc, pour $1 \leq k \leq 2^n$, en posant

$$\epsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in S(y^k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a

$$A_S^{(n+1)}(k,.) = \epsilon_k A_{S^0}^{(n)}(k,.) \oplus (1-\epsilon_k) A_{S^0}^{(n)}(k,.)$$

Pour $2^n + 1 \leq k \leq 2^{n+1}$, on a $\phi_1(y_1^k, S(y_1^k)) = (1,1)$ dans tous les cas ($1 = -1$ dans $\mathbb{Z}_2$).

Définissons $S^1 : \{0,1\}^n \to 2^{\{1,\ldots,n\}}$ par

$$S^1(y^k) = \{i \in \{1,...,n\}; i+1 \in S(1y^k)\}$$

avec ceci, on a :

$$A_S^{(n+1)}(k,.) = (1,1) \otimes \bigotimes_{i=2}^{n+1} \phi_i(y_i^k, S(y^k))$$
$$= \bigotimes_{i=2}^{n+1} \phi_i(y_i^k, S(y^k)) \oplus \bigotimes_{i=2}^{n+1} \phi_i(y_i^k, S(y^k))$$
$$= A_{S^1}^{(n)}(k,.) \oplus A_{S^1}^{(n)}(k,.)$$

D'où

$$A_S^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \epsilon_k A_{S^0}^{(n)}(k,.) & (1-\epsilon_k) A_{S^0}^{(n)}(k,.) \\ A_{S^1}^{(n)} & A_{S^1}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Par une manipulation sur les colonnes (on soustrait les colonnes k aux colonnes $k + 2^n$, pour tous les $k \leq 2^n$).

Ceci achève la démonstration du lemme de Reimer et, par la même occasion, celle de l'inégalité BKR.

2.6 Un cas particulier : l'inégalité FKG (Fortuin, Kasteleyn, Ginibre)

Corollaire 2.5 *Pour A, B évènements croissants et $p \in [0,1]$,*
$\mathbf{P}_p(A \cap B) \geq \mathbf{P}_p(A)\mathbf{P}_p(B)$

Preuve C'est une conséquence presque directe de l'inégalité BKR. En effet, pour A évènement croissant et B évènement décroissant, on a : $A \cap B = A \circ B$ Ainsi, si on prend A et B croissants, alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_p(A \cap B) &= \mathbf{P}_p(A) - \mathbf{P}_p(A \cap B^c) \\
&= \mathbf{P}_p(A) - \mathbf{P}_p(A \circ B^c) \\
&\geq \mathbf{P}_p(A) - \mathbf{P}_p(A)\mathbf{P}_p(B^c) \\
&= \mathbf{P}_p(A)(1 - \mathbf{P}_p(B^c)) \\
&= \mathbf{P}_p(A)\mathbf{P}_p(B)
\end{aligned}$$

3 Application à quelques problèmes de percolation

En régime critique, c'est-à-dire pour $p = \frac{1}{2}$, il est possible de minorer assez facilement et grossièrement la probabilité que l'origine soit reliée par un chemin ouvert à un point qui se trouve à distance n de l'origine en fonction de n. Nous allons utiliser l'inégalité BKR pour obtenir un minoration plus forte.

On parlera de chemin ouvert pour désigner une suite d'arêtes adjacentes ouvertes (chacune l'est indépendamment avec probabilité p) et de chemin fermé pour désigner une suite d'arêtes adjacentes fermées.

On pose ∂S_n l'ensemble des points à distance n de l'origine. On note A_n la probabilité que l'origine soit reliée par un chemin ouvert à un point qui se trouve à distance n.

3.1 Chemins dans un carré

Considérons un carré de côté n et notons pour simplifier C_g, C_d, C_h et C_b ses côtés et M la médiane allant de C_h à C_b.

Lemme 3.1 *La probabilité que C_g soit relié à C_d par un chemin ouvert contenu dans le carré est égale à $\frac{1}{2}$.*

Preuve Notons T_n cet évènement, T_n^c est l'évènement : {il n'existe pas de chemin ouvert contenu dans le carré reliant C_g à C_d}

C'est donc l'évènement : {il existe un chemin fermé contenu dans le carré reliant C_h à C_b}

Ainsi $\mathbf{P}(T_n) = \mathbf{P}(T_n^c)$ et donc $\mathbf{P}(T_n) = \frac{1}{2}$.

Or

$$T_n = \bigcup_{x \in C_g} \{ \text{ il existe un chemin ouvert dans le carré reliant } x \text{ à } C_d\}$$

Et $\forall x \in C_g$,

$$\{ \text{ il existe un chemin ouvert dans le carré reliant } x \text{ à } C_d\}$$
$$\subseteq \{ \text{ il existe un chemin ouvert reliant } x \text{ à un point à distance } n \text{ de } x\}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_n) &\leq \sum_{x \in C_g} \mathbf{P}(\text{ il existe un chemin ouvert dans le carré reliant } x \text{ à } C_d) \\
&\leq \sum_{x \in C_g} \mathbf{P}(\text{ il existe un chemin ouvert reliant } x \text{ à un point à distance } n \text{ de } x) \\
&\leq (n+1)\mathbf{P}(A_n)
\end{aligned}$$

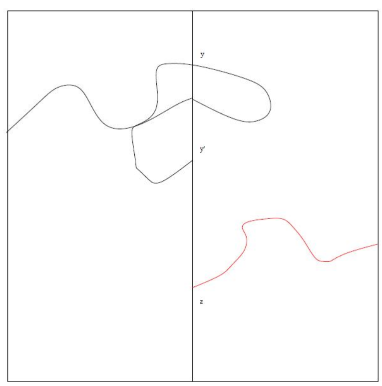
Donc

$$P(A_n) \geq \frac{1}{2(n+1)}$$

Lemme 3.2 *Pour tout chemin liant C_g à C_d, il existe un point de M que nous noterons y tel qu'il existe deux chemins disjoints, l'un liant C_g à y et l'autre liant y à C_d, notons L_y cet évènement.*

Preuve Pour un chemin ouvert donné entre C_g et C_d contenu dans le carré, soit y un point d'intersection de ce chemin avec la médiane M tel qu'il existe un chemin liant C_g et y contenu dans la partie gauche du carré (noté c_1), alors il existe un chemin liant y et C_d contenu dans le carré. Alors

- soit il existe un chemin ouvert liant C_g à y et un chemin ouvert liant y à C_d, tous deux contenus dans le carré, qui sont disjoints.
- soit ce n'est pas le cas, alors tout chemin ouvert liant y et C_d a une arête commune avec un chemin ouvert liant C_g et y et inversement. Par conséquent, le chemin c_1 possède une arête commune avec un chemin liant y et C_d. Et ce dernier chemin s'intersecte avec la médiane (car c_1 est contenu dans la partie gauche du carré) en un autre point que y avant de rejoindre C_d, Car sinon il existe un chemin liant C_g à y et un chemin liant y à C_d, tous deux contenus dans le carré, qui sont disjoints. Ainsi, notant y' cet autre point d'intersection, il existe un chemin liant C_g et y' contenu dans la partie gauche du carré. On itère ce processus, à chaque étape, on trouve un autre point de M qui est lié à C_g par un chemin ouvert contenu dans la partie gauche du carré, or il existe un point de M relié à C_d par un chemin ouvert contenu dans la partie droite du carré.



Donc, en termes d'évènements :

$$\{ \text{ il existe un chemin contenu dans le carré liant } C_g \text{ à } C_d\} \subseteq \{\exists y \in M; L_y \text{ est réalisé } \}$$

et

$$L_y = \{C_g \text{ est relié à } y \text{ par un chemin ouvert } \} \circ \{C_d \text{ est relié à } y \text{ par un chemin ouvert } \}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T_{2n}) &\leq \sum_{y\in M} \mathbf{P}(L_y) \\
&= \sum_{y\in M} \mathbf{P}(\{C_g \text{ est relié à } y \text{ par un chemin ouvert }\} \\
&\circ \{C_d \text{ est relié à } y \text{ par un chemin ouvert }\}) \\
&\leq \sum_{y\in M} \mathbf{P}(\{C_g \text{ est relié à } y \text{ par un chemin ouvert }\}) \\
&\mathbf{P}(\{C_d \text{ est relié à } y \text{ par un chemin ouvert }\}) \\
&\leq \sum_{y\in M} \mathbf{P}(A_{2n})^2 \\
&= (2n+1)\mathbf{P}(A_{2n})^2
\end{aligned}$$

où la troisième inégalité découle de BKR. Donc

$$\mathbf{P}(A_{2n}) \geq \frac{1}{\sqrt{4n+2}}$$

3.2 Décroissance exponentielle

Dans cette deuxième partie, nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 3.3 *En régime critique, c'est-à-dire $p < \frac{1}{2}$, A_n étant le même évènement que dans la partie précédente,*

$$\exists\psi(p), \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \mathbf{P}(A_n) \leq e^{-n\psi(p)} \tag{5}$$

On se place donc à $p < \frac{1}{2}$.

Notation On note C_n la probabilité pour qu'il existe, étant donné un rectangle de dimension n sur $2n$, un chemin ouvert traversant ce rectangle dans le sens de la largeur.

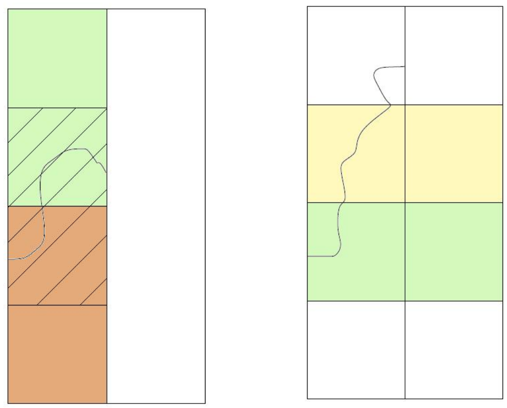
Lemme 3.4

$$\forall (K, M) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{0\}, c\mathbf{P}(C_{2^K M}) \leq (c\mathbf{P}(C_M))^{2^K}, \ \textit{où } c = 100 \tag{6}$$

Preuve

Pour traverser un rectangle de dimensions $2n$ sur $4n$ dans le sens de la largeur, un chemin ouvert doit relier le côté gauche R_g à la médiane M' de ce rectangle par un chemin ouvert contenu dans la partie gauche du rectangle et relier M' au côté droit R_d par un chemin ouvert contenu dans la partie droite du rectangle.

Pour relier le côté gauche R_g à la médiane M' de ce rectangle par un chemin ouvert contenu dans la partie gauche du rectangle, le chemin ouvert peut soit traverser un rectangle vertical de dimensions n sur $2n$ dans le sens de la largeur, soit traverser un carré de côté n dans le sens vertical, donc treverser un rectangle horizontal de dimensions n sur $2n$ dans le sens de la largeur. On applique le même raisonnement à la partie du chemin liant M' et C_d



Par conséquent, en notant C_n^R l'évènement {il existe un chemin ouvert traversant le rectangle R de dimensions n sur $2n$}, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(C_{2n}) &\leq \sum_{R_1, R_2 \text{ sont deux des dix rectangles décrits ci-dessus}} \mathbf{P}(C_n^{R_1} \circ C_n^{R_2}) \\
&\leq \sum_{R_1, R_2} \mathbf{P}(C_n)^2 \\
&= 100\mathbf{P}(C_n)^2
\end{aligned}$$

où la deuxième inégalité découle de BKR et de l'invariance par translation de la percolation. Ainsi, $c\mathbf{P}(C_{2n}) \leq (c\mathbf{P}(C_2))^2$,

et par récurrence

$$\forall (K, M) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{0\}, c\mathbf{P}(C_{2^K M}) \leq (c\mathbf{P}(C_M))^{2^K}$$

Lemme 3.5

$$\mathbf{P}(C_n) \overset{n \to \infty}{\to} 0 \tag{7}$$

Ce lemme est admis

Lemme 3.6

$$\exists \psi(p), n_0 \forall n \geq n_0 P(C_n) \leq e^{-n\psi(p)} \tag{8}$$

Preuve On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $P(C_n) < \frac{1}{2}$.

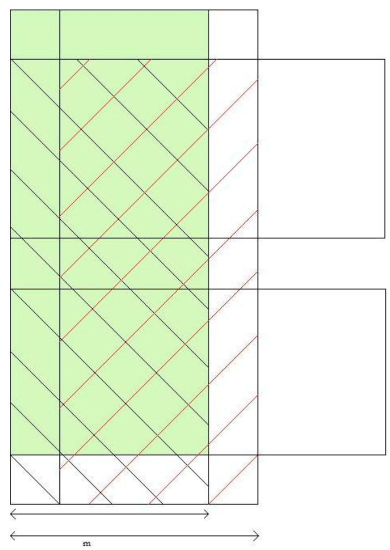
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall n \geq n_0, \forall k \geq 0, cP(C_{2^k n}) &\leq (cP(C_n))^{2^k} \\
&\leq \frac{1}{2^{2^k}}
\end{aligned}$$

Or il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$

$$\frac{(\frac{1}{2})^{2^k}}{(\frac{2}{3})^{2^k}} = (\frac{3}{4})^{2^k} \leq \frac{1}{9}$$

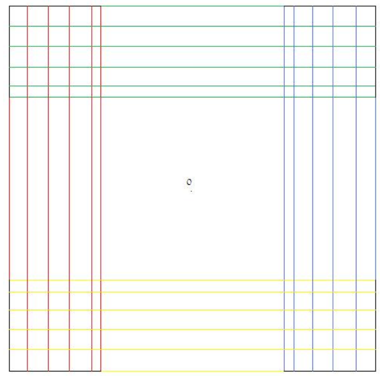
Donc pour tout $m \geq 2^{k_0} n_0$, il existe $k, \alpha \in \mathbb{N}$ tels que $m = 2^k n_0 + \alpha$
et $P(C_n) \leq 6P(C_{2^k n_0})$.
(car un chemin ouvert traversant le rectangle de dimensions m sur $2m$ dans le sens de la largeur doit traverser un des six rectangles de dimensions $2^k n_0$ sur $2^{k+1} n_0$ ci-dessous dans le sens de la largeur).



Donc

$$\begin{aligned}
cP(C_n) &\leq 6cP(C_{2^k n_0}) \\
&\leq 6(\frac{1}{2})^{2^k} \\
&\leq 6 \times \frac{1}{9} \times (\frac{2}{3})^{2^k} \\
&= \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^{2^k} \\
&= (\frac{2}{3})^{2^k + \frac{\alpha}{n_0}} \\
&= (\frac{2}{3})^{\frac{m}{n_0}} \\
&= e^{-m\frac{ln(\frac{2}{3})}{n_0}}
\end{aligned}$$

Pour que l'évènement A_n soit réalisé, il faut qu'il existe un chemin ouvert traversant l'un des six rectangles de dimension n sur $2n$ tracés ci-dessous.



Et, en notant C_n^i la probabilité qu'il existe un chemin ouvert traversant le rectangle i, on a :

$$\begin{aligned} P(A_n) &\leq P(\bigcup_{i=1}^{4} C_n^i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{4} P(C_n^i) \\ &= 4P(C_n) \\ &\leq \frac{4}{c} e^{-m\frac{ln(\frac{2}{3})}{n_0}} \\ &\leq e^{-m\frac{ln(\frac{2}{3})}{n_0}} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

4 Formule de Russo et variations

Nous avons vu la proposition qui dit que pour un évènement croissant A, la probabilité $P_p(A)$ est une fonction croissante de p. Nous cherchons à présent à estimer le taux de variation de $P_p(A)$ en tant que fonction de p. Donnons tout d'abord quelques rappels et définitions. Soit

$p = (p(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ une collection de réels tels que $0 \leqslant p(e) \leqslant 1$ pour tous e. Soit $\{X(e); e \in \mathbb{E}^d\}$ un ensemble de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$. On définit à présent η_p par $\eta_p(e) = 1$ si $X(e) < p(e)$ et $\eta_p(e) = 0$ sinon. Avec P_p la mesure de probabilités sur Ω telle que l'état $\omega(e)$ du segment e est égal à 1 avec une probabilité $p(e)$, on a pour un évènement A

$$P_p(A) = P(\eta_p \in A)$$

Soit A un évènement, pas nécessairement croissant, et ω une configuration. On dit que le segment e est essentiel pour (A, ω) si $1_A(\omega) \neq 1_A(\omega')$ où ω' est la configuration identique à ω sur tous les segments sauf e pour lequel $\omega'(e) = 1 - \omega(e)$. L'évènement $\{e$ est essentiel pour $A\}$ est l'ensemble des configurations ω pour lesquelles e est essentiel pour (A, ω). On remarque d'une part que cet évènement ne dépend pas de l'état de e et en est donc indépendant et d'autre part que pour un évènement A croissant, e est essentiel pour A si et seulement si A est réalisé quand e est ouvert et ne l'est pas quand e est fermé.

4.1 Formule de Russo

Théorème 4.1 *Soit A un évènement croissant qui ne dépend que d'un nombre fini de segments. Alors*

$$\frac{d}{dp} P_p(A) = E_p(N(A)) \tag{9}$$

où $N(A)$ est le nombre de segments essentiels pour A.

Preuve Choisissons un segment f de $\mathbb{E}^d$ et définissons $\mathbf{p}'(e) = (p'(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ par

$$p'(e) = \begin{cases} p(e) & \text{si } e \neq f \\ p'(f) & \text{si } e = f \end{cases} \text{ avec } p'(f) \geqslant p(f)$$

Comme A est croissant on a $\{\eta_{\mathbf{p}} \in A\} \subset \{\eta_{\mathbf{p}'} \in A\}$ et donc

$$P_{\mathbf{p}'}(A) - P_{\mathbf{p}}(A) = P(\eta_{\mathbf{p}} \notin A, \eta_{\mathbf{p}'} \in A)$$

Or l'évènement $\{f$ est essentiel pour $A\}$ est indépendant de l'état de f et donc

$$P_{\mathbf{p}'}(A) - P_{\mathbf{p}}(A) = (p'(f) - p(f)) P_{\mathbf{p}}(f \text{ est essentiel pour } A)$$

Dès lors, si $p(f) < p'(f)$, en divisant par $p'(f) - p(f)$ et par passage à la limite $p'(f) \downarrow p(f)$ on obtient

$$\frac{\partial}{\partial p(f)} P_p(A) = P_p(f \text{ est essentiel pour } A)$$

Pour l'instant, nous avons seulement supposé A croissant. Si de plus A ne dépend que d'un nombre fini de segments, $P_p(A)$ est fonction d'une collection finie de réels $(p(f_i) : 1 \leqslant i \leqslant m)$ et on a bien

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} P_p(A) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial p(f_i)} P_p(A) \\
&= \sum_{i=1}^{m} P_p(f_i \text{ est essentiel pour } A) \\
&= E_p(N(A))
\end{aligned}$$

4.2 Quelques applications de la formule de Russo

Corollaire 4.2 *Soit A un évènement croissant qui ne dépend que d'un nombre fini de segments. Soient p_1 et p_2 tels que $0 < p_1 < p_2 \leqslant 1$. Si $P_p(A)$ ne s'annule pas pour p dans $[p_1, p_2]$ alors*

$$P_{p_2}(A) \leqslant (\frac{p_2}{p_1})^m P_{p_1}(A) \tag{10}$$

où m est le nombre (fini) de segments dont A dépend.

Preuve L'évènement $\{e$ est essentiel pour $A\}$ est indépendant de l'état de e et donc

$$P_p(e \text{ est essentiel pour } A) = \frac{1}{p} P_p(e \text{ est ouvert et est essentiel pour } A)$$

Comme A est croissant et ne dépend que d'un nombre fini de segments, on peut appliquer la formule de Russo, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} P_p(A) &= \frac{1}{p} \sum_{e} P_p(e \text{ est ouvert et est essentiel pour } A) \\
&= \frac{1}{p} \sum_{e} P_p(A \bigcap \{e \text{ est essentiel pour } A\}) \\
&= \frac{1}{p} \sum_{e} P_p(\{e \text{ est essentiel pour } A\} | A) P_p(A) \\
&= \frac{1}{p} E_p(N(A)|A) P_p(A)
\end{aligned}$$

En divisant par $P_p(A)$ non nul puis en intégrant sur $[p_1, p_2]$ on obtient

$$P_{p_2}(A) = P_{p_1}(A) \exp(\int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} E_p(N(A)|A) dp)$$

Il suffit alors d'appliquer la majoration triviale $P_p(e$ est essentiel pour $A|A) \leqslant 1$ pour obtenir le résultat.

Corollaire 4.3 *Soit A un évènement croissant (qui peut dépendre d'un nombre infini de segments). Alors*

$$\liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta}(P_{p+\delta}(A) - P_p(A)) \geqslant E_p(N(A)) \tag{11}$$

Preuve Soit E un ensemble fini de segments, on définit $\mathbf{p}_E = (p_E(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ avec

$$p_E(e) = \begin{cases} p & \text{si } e \notin E \\ p+\delta & \text{si } e \in E \end{cases}$$

où $0 \leqslant p \leqslant p+\delta \leqslant 1$. Puisque A est croissant,

$$P_{p+\delta}(A) \geqslant P_{\mathbf{p}_E}(A)$$

et donc

$$\frac{1}{\delta}(P_{p+\delta}(A) - P_p(A)) \geqslant \frac{1}{\delta}(P_{\mathbf{p}_E}(A) - P_p(A)) \qquad \xrightarrow[\delta \downarrow 0]{} \sum_{e \in E} P_p(e \text{ est essentiel pour } A)$$

d'après la formule de Russo. Il ne reste plus qu'à faire tendre E vers $\mathbb{E}^d$ par limite croissante pour obtenir le résultat.

4.3 Généralisation au cas d'un évènement quelconque

Voyons à présent comment étendre ces résultats aux cas d'un évènement quelconque. Il nous faut pour cela introduire une nouvelle définition. Pour ω de Ω et A, B de $\mathbb{E}^d$ avec $A \bigcap B = \varnothing$, on introduit la configuration ω_A^B donnée par

$$\omega_A^B(e) = \begin{cases} \omega(e) & \text{si } e \notin A \bigcup B \\ 0 & \text{si } e \in A \\ 1 & \text{si } e \in B \end{cases}$$

On peut alors définir l'incrément d'une variable aléatoire X sur $\{e\}$ par

$$\delta_e X(\omega) = X(\omega_{\varnothing}^{\{e\}}) - X(\omega_{\{e\}}^{\varnothing})$$

On peut alors étendre la formule de Russo

Proposition 4.4 *Soit X une variable aléatoire qui ne dépend que d'un nombre fini de segments. Alors*

$$\frac{d}{dp} E_p(X) = \sum_{e \in \mathbb{E}^d} E_p(\delta_e X) \tag{12}$$

Preuve Choisissons un segment f de $\mathbb{E}^d$ et définissons $\mathbf{p}'(e) = (p'(e) : e \in \mathbb{E}^d)$ par

$$p'(e) = \begin{cases} p(e) & \text{si } e \neq f \\ p'(f) & \text{si } e = f \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
P_{p'}(A) - P_p(A) &= P(\eta_{p'} \in A) - P(\eta_p \in A) \\
&= P(\eta_{p'} \in A \text{ et } \eta_p \notin A) - P(\eta_{p'} \notin A \text{ et } \eta_p \in A) \\
&= (p'(f) - p(f))P(\delta_f 1_A(\eta_p) = 1) - (p'(f) - p(f))P(\delta_f 1_A(\eta_p) = -1) \\
&= (p'(f) - p(f))E_p(\delta_f 1_A)
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité découle de l'indépendance entre l'état de f et le fait que ce soit essentiel pour A. Dès lors, si $p(f) < p'(f)$, en divisant par $p'(f) - p(f)$ et par passage à la limite $p'(f) \downarrow p(f)$ on obtient

$$\frac{\partial}{\partial p(f)} P_p(A) = E_p(\delta_f 1_A)$$

Pour l'instant, nous avons seulement supposé A croissant. Si de plus A ne dépend que d'un nombre fini de segments $P_p(A)$ est fonction d'une collection finie de réels $(p(f_i) : 1 \leqslant i \leqslant m)$ et on a bien

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} P_p(A) &= \sum_{i=1}^{m} P_p(A) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial p(f_i)} P_p(A) \\
&= \sum_{i=1}^{m} E_p(\delta_{f_i} 1_A)
\end{aligned}$$

Le résultat pour une variable X est alors obtenu par l'approximation par des fonctions étagées.

Corollaire 4.5 *Si A est un évènement croissant qui ne dépend que d'un nombre fini de segments*

$$\frac{d^2}{dp^2} P_p(A) = E_p(N_A^{ser}) - E_p(N_A^{par}) \tag{13}$$

où N_A^{ser} (respectivement N_A^{par}) est le nombre de paires $\{e, f\}$ de segments distincts tels que $\omega_{\emptyset}^{\{e,f\}} \in A$ mais $\omega_{\{e\}}^{\{f\}}, \omega_{\{f\}}^{\{e\}} \notin A$ (respectivement $\omega_{\{e\}}^{\{f\}}, \omega_{\{f\}}^{\{e\}} \in A$ mais $\omega_{\{e,f\}}^{\emptyset} \notin A$). Les abréviations ser et par sont pour séries et parallèles.

Remarque : on pourrait généraliser ce résultat pour des dérivées d'ordre plus élevé.

Preuve En dérivant une nouvelle fois l'inégalité de la proposition 4.4 on obtient

$$\frac{d^2}{dp^2} P_p(A) = \sum_{e,f \in \mathbb{E}^d} E_p(\delta_f \delta_e 1_A)$$

On remarque alors que $\delta_e \delta_e 1_A = 0$ et que pour $e \neq f$ on a

$$\delta_f \delta_e 1_A(\omega) = 1_A(\omega^{\{e,f\}}) - 1_A(\omega_{\{e\}}^{\{f\}}) - 1_A(\omega_{\{f\}}^{\{e\}}) + 1_A(\omega_{\{e,f\}})$$

A est croissant donc il en est de même de 1_A et on a

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dp^2}P_p(A) &= E_p\{1_A(\omega^{\{e,f\}})(1-1_A(\omega^{\{f\}}_{\{e\}}))(1-1_A(\omega^{\{e\}}_{\{f\}})) \\ &\quad - 1_A(\omega^{\{f\}}_{\{e\}})1_A(\omega^{\{e\}}_{\{f\}})(1-1_A(\omega_{\{e,f\}}))\} \\ &= E_p(N_A^{ser}) - E_p(N_A^{par})\end{aligned}$$

5 Autres inégalités

5.1 Inégalités de confiance

Les inégalités de confiance font suite à certaines études sur les réseaux dont chaque lien n'est pas sûr. On peut en fait modéliser ces réseaux par des graphes dont chaque segment a une probabilité p d'être ouvert indépendamment de l'état des autres segments et cela relève donc de la percolation.

Proposition 5.1 *Soit A un évènement qui ne dépend que de E (un nombre fini de segments). Soit N le nombre de segments de E qui sont ouverts. Alors*

$$\frac{d}{dp}P_p(A) = \frac{1}{p(1-p)} cov_p(N, 1_A) \text{ pour } 0 < p < 1 \tag{14}$$

où $cov_p(X,Y)$ désigne la covariance des deux variables aléatoires X et Y sous la mesure P_p.

Preuve On note ω la configuration des segments de E, et $N(\omega)$ le nombre de segments ouverts de E. Clairement

$$P_p(A) = \sum_\omega 1_A(\omega) p^{N(\omega)} q^{m-N(\omega)}$$

où $p + q = 1$ et $m = |E|$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp}P_p(A) &= \sum_\omega 1_A(\omega) p^{N(\omega)} q^{m-N(\omega)} (\frac{N(\omega)}{p} - \frac{m - N(\omega)}{q}) \\
&= \frac{1}{pq} \sum_\omega 1_A(\omega) p^{N(\omega)} q^{m-N(\omega)} (N(\omega) - mp) \\
&= \frac{1}{p(1-p)} cov_p(N, 1_A)
\end{aligned}$$

puisque $E_p(N) = mp$

Corollaire 5.2 *Soit A un évènement qui ne dépend que des segments de E.*
On suppose $0 < p < 1$. Alors

$$\frac{d}{dp}P_p(A) \leqslant \sqrt{\frac{mP_p(A)(1 - P_p(A))}{p(1-p)}} \tag{15}$$

où $m = |E|$. Si A est croissant, on a

$$\frac{d}{dp}P_p(A) \geqslant \frac{P_p(A)(1 - P_p(A))}{p(1-p)} \tag{16}$$

Preuve On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la partie droite de la proposition 5.1 On obtient

$$\frac{d}{dp}P_p(A) \leqslant \frac{1}{p(1-p)} \sqrt{var_p(N) var_p(1_A)}$$

et la première inégalité en découle en observant que N suit une loi binomiale de paramètres m et p et 1_A une loi de Bernoulli. On suppose à présent que A est croissant. On a

$$cov_p(N, 1_A) = cov_p(1_A, 1_A) + cov_p(N - 1_A, 1_A)$$

Or puisque $N - 1_A$ est clairement croissant, l'inégalité FKG donne

$$cov_p(N - 1_A, 1_A) \geqslant 0$$

et donc

$$cov_p(N, 1_A) \geqslant var_p(1_A)$$

Puis en reportant dans l'inégalité de la proposition 5.1, on obtient l'inégalité voulue.

Proposition 5.3 *Soit A un évènement croissant qui ne dépend que d'un nombre fini de segments. On suppose que $0 < p < 1$. Alors $\frac{log(P_p(A))}{log(p)}$ est une fonction décroissante de p. Plus généralement, on montre que $h(p) = P_p(A)$ satisfait*

$$h(p^\gamma) \leqslant h(p)^\gamma \text{ si } 0 < p < 1 \text{ et } \gamma \geqslant 1 \tag{17}$$

On a donc, en dérivant la fonction décroissante de p, $\frac{log(P_p(A))}{log(p)}$

$$\frac{d}{dp} P_p(A) \geqslant \frac{P_p(A) log P_p(A)}{p log p} \tag{18}$$

Preuve On doit montrer que $h(p) = P_p(A)$ satisfait pour A croissant qui ne dépend que d'un nombre fini de segments,

$$h(p^\gamma) \leqslant h(p)^\gamma \text{ si } 0 < p < 1 \text{ et } \gamma \geqslant 1$$

En effet, en posant $p_1 = p^\gamma$ et en prenant le logarithme, on obtient l'inégalité demandée

$$\frac{log(h(p_1))}{log(p_1)} \geqslant \frac{log(h(p))}{log(p)}$$

On raisonne par récurrence sur le nombre de segments concernés pour A. On suppose que A est croissant et ne dépend que d'un ensemble fini E de segments, et on pose $m = |E|$. Si $m = 1$ alors A est soit $\{0, 1\}$ soit $\{1\}$ et donc $h(p) = P_p(A)$ vaut 1 ou p, et notre première assertion est valide. Pour $k \geqslant 1$ on suppose alors que $h(p^\gamma) \leqslant h(p)^\gamma$ pour $m \leqslant k$ et on considère le cas $m = k + 1$. Soit $0 < p < 1$, $\gamma \geqslant 1$ et e un segment de E. Alors

$$\begin{aligned} h(p^\gamma) &= P_{p^\gamma}(A|\omega(e) = 1)p^\gamma + P_{p^\gamma}(A|\omega(e) = 0)(1 - p^\gamma) \\ &\leqslant P_p(A|\omega(e) = 1)^\gamma p^\gamma + P_p(A|\omega(e) = 0)^\gamma (1 - p^\gamma) \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. De plus on a l'inégalité suivante :

$$x^\gamma p^\gamma + y^\gamma (1 - p^\gamma) \leqslant (xp + y(1 - p))^\gamma \text{ pour } x \geqslant y \geqslant 0;$$

Pour montrer cela, il suffit de le vérifier pour $x = y \geqslant 0$ et prendre la dérivée par rapport à x. De plus, comme A est croissant, on a $P_p(A|\omega(e) = 1) \geqslant P_p(A|\omega(e) = 0)$, on en déduit

$$\begin{aligned} h(p^\gamma) &\leqslant P_p(A|\omega(e) = 1)^\gamma p^\gamma + P_p(A|\omega(e) = 0)^\gamma (1 - p^\gamma) \\ &\leqslant (P_p(A|\omega(e) = 1)p + P_p(A|\omega(e) = 0)(1 - p))^\gamma \\ &= h(p)^\gamma \end{aligned}$$

5.2 Intérieur d'un évènement et distance à un évènement

Commençons par définir la notion d'intérieur d'un évènement. Soit ω une configuration et r un entier strictement positif. On appelle sphère de centre ω de rayon r, l'ensemble

$$S_r(\omega) = \{\omega' \in \Omega : \sum_{e \in \mathbb{E}^d} |\omega'(e) - \omega(e)| \leqslant r\}$$

$S_r(\omega)$ n'est autre que l'ensemble des configurations qui diffèrent de ω d'au plus r segments. Pour un évènement A on définit l'intérieur de A de profondeur r par

$$I_r(A) = \{\omega \in \Omega : S_r(\omega) \subseteq A\}$$

$I_r(A)$ est l'ensemble des configurations qui sont toujours dans A même en changeant l'état d'au plus r segments.

Proposition 5.4 *Soient A un évènement croissant et r un entier strictement positif.*

$$1 - P_{p_2}(I_r(A)) \leqslant (\frac{p_2}{p_2 - p_1})^r (1 - P_{p_1}(A)) \tag{19}$$

dès que $0 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant 1$

Cela revient à dire que si A a une probabilité importante d'occurence lorsque la probabilité de chaque segment est p alors $I_r(A)$ a une probabilité importante d'occurence quand la probabilité de chaque segment est supérieure à p.

Preuve Soient $\{X(e) : e \in \mathbb{E}^d\}$ et $\{\eta_p : 0 \leqslant p \leqslant 1\}$ définis de la même manière que précédemment. On suppose que $0 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant 1$ et que A est un évènement croissant. Si η_{p_2} n'appartient pas à $I_r(A)$ alors il existe un ensemble $B = B(\eta_{p_2})$ de segments tel que

$$\begin{cases} \text{i) } |B| \leqslant r \\ \text{ii) } \forall e \in B, \eta_{p_2}(e) = 1 \\ \text{iii) } \eta \text{ obtenue en fermant les segments de } B \text{ n'appartient pas à } A \end{cases}$$

On suppose $\eta_{p_2} \notin I_r(A)$ et que chaque segment e de B satisfait $p_1 \leqslant X(e) < p_2$. On déduit de iii) que $\eta_{p_1} \notin A$. Or sachant B, la probabilité que pour tous e de B,$X(e)$ vérifie $p_1 \leqslant X(e) < p_2$ est $(\frac{p_2 - p_1}{p_2})^{|B|}$ et donc

$$P(\eta_{p_1} \notin A | \eta_{p_2} \notin I_r(A)) \geqslant (\frac{p_2 - p_1}{p_2})^r$$

puisque $|B| \leqslant r$. On en déduit donc le résultat voulu.

On définit la distance F_A d'une configuration ω à un évènement croissant A par

$$F_A(\omega) = \inf\{\sum_e (\omega'(e) - \omega(e)) : \omega' \geqslant \omega, \omega \in A\}$$

On remarque que si $\omega \in A$ alors $F_A(\omega) = 0$.

Proposition 5.5 *Soient A un évènement croissant et r un entier positif.*

$$P_{p_2}(A) \geqslant (\frac{p_2 - p_1}{1 - p_1})^r P_{p_1}(F_A \leqslant r) \tag{20}$$

pour $p_1 \leqslant p_2$

Preuve On procède de manière analogue. Soit $\{X(e) : e \in \mathbb{E}^d\}$ et $\{\eta_p : 0 \leqslant p \leqslant 1\}$ définis de la même manière que précédemment. On suppose que $0 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant 1$ et que A est un évènement croissant. Si $\eta_{p_1} \in \{F_A \leqslant r\}$ alors il existe un ensemble $B = B(\eta_{p_1})$ de segments tel que

$$\begin{cases} \text{i) } |B| \leqslant r \\ \text{ii) } \forall e \in B, \eta_{p_1}(e) = 0 \\ \text{iii) } \eta \text{ obtenue en ouvrant les segments de } B \text{ appartient à } A \end{cases}$$

On suppose $\eta_{p_1} \in \{F_A \leqslant r\}$ et que chaque segment e de B satisfait $p_1 \leqslant X(e) < p_2$. On déduit de iii) que $\eta_{p_2} \in A$. Or sachant B, la probabilité que pour tous e de B, $X(e)$ vérifie $p_1 \leqslant X(e) < p_2$ est $(\frac{p_2-p_1}{1-p_1})^{|B|}$ et donc

$$P(\eta_{p_2} \in A | \eta_{p_1} \in \{F_A \leqslant r\}) \geqslant (\frac{p_2 - p_1}{1 - p_1})^r$$

puisque $|B| \leqslant r$. On en déduit donc le résultat voulu.

Références

[1] Grimmett, Geoffrey, *Percolation*, Springer, 1999.

[2] Borgs, Christian, Chayes, Jennifer, Randall, Dana, *The Van den Berg-Kesten-Reimer inequality : a review*