

Forme limite pour les diagrammes de Young sous la mesure de Plancherel

Matthieu Kochersperger et Ambroise Marigot,
sous la direction de Cédric Boutillier

23 juin 2011

Résumé

L'objectif de cet exposé est de montrer la convergence des diagrammes de Young (dans un sens qu'on précisera) sous une mesure de probabilité donnée, la mesure de Plancherel. On établira dans une première partie l'existence de cette dernière, puis pour estimer de manière plus maniable la probabilité d'un diagramme donné on démontrera la formule de Frame-Robinson-Thrall. On établira enfin les résultats relatifs à la convergence des diagrammes de Young vers une forme limite.

Table des matières

I	La mesure de Plancherel	4
1	Modules irréductibles de \mathfrak{S}_n	4
1.1	Théorème du sous-module	4
1.2	Inéquivalence des modules de Specht	6
1.2.1	Lemme de domination pour les partitions	6
1.2.2	Morphismes de S^λ dans M^μ	6
1.2.3	Conclusion	7
2	Bases des modules de Specht	7
2.1	Une famille libre de S^λ	8
2.2	Une famille génératrice de S^λ	9
II	Formule de Frame-Robinson-Thrall	11
III	Forme limite pour les diagrammes de Young sous la mesure de Plancherel	14
3	Considérations préliminaires	14
4	Expression quadratique de l'intégrale de l'équerre et point critique	17
5	Convergence en probabilité des diagrammes de Young	21
	Références	23

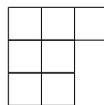
Définitions

Définition 1. Soit $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m)$ où

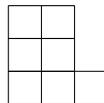
$$\sum_{k=1}^m \lambda_k = n$$

On dit que λ est une partition de n . Le diagramme de Young de forme λ est un tableau dont les cases sont indicées par (i, j) où $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq \lambda_i$

Exemple : $(3, 2, 2)$ est une partition de 7. Le diagramme de Young associé est donc le suivant :



Remarque 1. Il est parfois commode de représenter un diagramme de Young dans le système de coordonnées (O, i, j) en empilant les cases de bas en haut : la première ligne étant constituée de λ_1 cases, etc. Par exemple, pour représenter le diagramme de Young associé à la partition précédente, on dessinera dans la partie 3 :



Définition 2. Si l'on applique à un diagramme ainsi représenté une similitude d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et qu'on considère la bordure supérieure du résultat, on obtient une fonction notée L_λ telle que :

- L_λ est affine par morceaux, de dérivée ± 1 ;
- $\int_{\mathbb{R}} L_\lambda(s) - |s| = 1$.

Définition 3. Un tableau de Young est la donnée d'un diagramme de Young et d'un arrangement des entiers de 1 à n dans les cases du diagramme tel que les entiers de chaque ligne et de chaque colonne du tableau soient classés par ordre croissant.

Exemple de tableau de Young :

1	3	4
2	5	
6	7	

Définition 4 (Mesure de Plancherel). Si l'on donne un diagramme de Young λ , on note f_λ le nombre de tableaux de Young de forme λ . On définit alors la mesure de Plancherel μ_n par $\mu_n(\lambda) = \frac{f_\lambda^2}{n!}$.

On montrera dans la section suivante que $\sum f_\lambda^2 = n!$, et donc que la mesure de Plancherel est bien une mesure de probabilité.

Le théorème faisant l'objet de cet exposé s'énonce comme suit :

Théorème 1. *Il existe une fonction Ω déterministe vérifiant la propriété suivante : si $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ est une suite de diagrammes de Young de tailles respectives $1, 2, \dots$ suivant des lois indépendantes données par les mesures de Plancherel μ_1, μ_2, \dots , alors la suite de variables aléatoires*

$$\left(\sup_s |L_{\lambda_n}(s) - \Omega(s)| \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge en probabilité vers 0.

On précisera la fonction Ω dans la troisième partie de ce document.

Première partie

La mesure de Plancherel

On montre ici que la mesure de Plancherel est bien une mesure de probabilité sur les partitions de n , donc sur les diagrammes de Young. On suit l'approche proposée dans le chapitre 2 de [Sag01]. Il existe aussi une preuve purement combinatoire par l'algorithme de Robinson-Schensted-Knuth (RSK), présentée dans le chapitre 3 du même ouvrage.

On montrera d'une part que les modules de Specht forment un ensemble complet de \mathfrak{S}_n -modules irréductibles sur \mathbb{C} et que les e_t où t est un tableau de Young forment une base de S^λ .

1 Modules irréductibles de \mathfrak{S}_n

1.1 Théorème du sous-module

Définition 5 (Définitions relatives à l'établissement de la mesure de Plancherel).

- Deux tableaux de même forme sont équivalents si leurs lignes correspondantes contiennent les mêmes éléments. On notera $\{t\}$ la classe d'équivalence du tableau t .

Exemple :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

- On note $M^\lambda = \mathbb{C}[\{t_1\}, \dots, \{t_k\}]$ l'espace vectoriel sur \mathbb{C} engendré par toutes les classes d'équivalence de l'ensemble des tableaux de forme λ . L'action de \mathfrak{S}_n sur les tableaux fait de M^λ un \mathfrak{S}_n -module.
- Si on note C_1, \dots, C_k les colonnes d'un tableau t , $C_t = \mathfrak{S}_{C_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{C_k}$ est l'ensemble des éléments de \mathfrak{S}_n qui laissent stable l'ensemble des éléments de chaque colonnes de t .

- Sur $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ on définit

$$\kappa_t = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi)\pi.$$

- Sur M^λ on définit $e_t = \kappa_t\{t\}$

- Le Module de Specht, S^λ , pour une forme λ donnée, est le sous-module de M^λ engendré par tous les e_t où t est un tableau de forme λ .

On montre ici le théorème du sous-module qui a comme corollaire immédiat l'irréductibilité de S^λ . On utilisera l'unique produit scalaire hermitien tel que pour tout $\{t\}$ et $\{s\}$,

$$\langle \{t\}, \{s\} \rangle = \delta_{\{t\}, \{s\}}.$$

Théorème 2. Soit U un sous-module de M^λ . Alors

$$S^\lambda \subseteq U \quad \text{ou} \quad U \subseteq (S^\lambda)^\perp.$$

Lemme 1. Si $u \in M^\lambda$ et t est un tableau de forme λ , Alors $\kappa_t u$ est un multiple de e_t .

Démonstration. Si s et t sont des tableaux de même forme alors $\{s\} = \pi\{t\}$ pour $\pi \in C_t$, en effet on peut choisir des représentants de $\{s\}$ et $\{t\}$ qui ont les mêmes éléments dans leurs colonnes respectives et l'égalité $\pi\{t\} = \{\pi t\}$ ne dépend pas du choix des représentants. D'autre part,

$$\kappa_t \pi = \sum_{\sigma \in C_t} \text{sgn}(\sigma)\pi\sigma = \text{sgn}(\pi) \sum_{\pi\sigma \in C_t} \text{sgn}(\pi\sigma)\pi\sigma = \text{sgn}(\pi)\kappa_t.$$

Donc

$$\kappa_t\{s\} = \kappa_t\pi\{t\} = \text{sgn}(\pi)\kappa_t\{t\} = \text{sgn}(\pi)e_t.$$

Finalement si $u \in M^\lambda$, alors $u = \sum_i c_i\{s_i\}$, où les $\{s_i\}$ sont des λ -tableaux. On a alors,

$$\kappa_t u = \sum c_i \kappa_t\{s_i\} = \sum \pm c_i e_t.$$

□

Lemme 2. Si $u, v \in M^\lambda$, $\langle \kappa_t u, v \rangle = \langle u, \kappa_t v \rangle$.

Démonstration. Le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est \mathfrak{S}_n -invariant, donc

$$\begin{aligned} \langle \kappa_t u, v \rangle &= \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi)\langle \pi u, v \rangle = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi)\langle u, \pi^{-1}v \rangle \\ &= \sum_{\pi^{-1} \in C_t} \text{sgn}(\pi^{-1})\langle u, \pi^{-1}v \rangle = \langle u, \kappa_t v \rangle. \end{aligned}$$

□

Démonstration du Théorème 2. Soit $u \in U$ et t un λ -tableau. On a vu que $\kappa_t u = f e_t$ pour un scalaire f .

- Soit il existe u et t tels que $f \neq 0$, et donc $e_t \in U$. Comme S^λ est un \mathfrak{S}_n -module et l'action de \mathfrak{S}_n sur S^λ est transitive, $S^\lambda \subset U$.
- Soit quelque soit $u \in U$, $\kappa_t u = 0$. Alors

$$\langle u, e_t \rangle = \langle u, \kappa_t \{t\} \rangle = \langle \kappa_t u, \{t\} \rangle = \langle 0, \{t\} \rangle = 0,$$

ceci pour tout u et t . Donc $U \subset (S^\lambda)^\perp$.

□

Corollaire 1. S^λ est irréductible en tant que \mathbb{C} -modules.

Démonstration. $S^\lambda \cap (S^\lambda)^\perp = \{0\}$, le théorème 2 permet de conclure.

□

1.2 Inéquivalence des modules de Specht

1.2.1 Lemme de domination pour les partitions

On introduira ici un ordre partiel sur les partitions de n .

Définition 6. Si $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l)$ et $\mu = (\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m)$ sont des partitions de n , $\lambda \supseteq \mu$ si

$$\forall i \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i.$$

\supseteq est une relation d'ordre partiel sur les partitions.

Lemme 3 (de domination). Soit t et s des tableaux de forme λ et μ . Si, quelque soit i , les éléments de la ligne i de s sont tous dans des colonnes différentes dans t , alors $\lambda \supseteq \mu$.

Démonstration. : Par hypothèse une colonne de t contient au maximum i éléments des i premières lignes de s . En réarrangeant les éléments des colonnes de t on obtient un nouveau tableau t' de forme λ vérifiant les même hypothèses que t et pour lequel les éléments des i premières lignes de s sont dans les i premières lignes de t' . On a alors pour tout i ,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \dots + \lambda_i &= \text{nombre d'éléments dans les } i \text{ premières lignes de } t' \\ &\geq \text{nombre d'éléments de } s \text{ dans les } i \text{ premières lignes de } t' \\ &= \mu_1 + \dots + \mu_i, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

1.2.2 Morphismes de S^λ dans M^μ

On veut montrer que si $S^\lambda \cong S^\mu$ alors $\lambda = \mu$.

Propriété 1. Si $\theta \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(S^\lambda, M^\mu)$ est non identiquement nul, alors $\lambda \supseteq \mu$.

Lemme 4 (Lemmes préliminaires). a) Si $(a, b) \in C_t$, on peut factoriser

$$\kappa_t = k(\epsilon - (a, b))$$

où $k \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.

b) Si a et b sont dans la même ligne d'un tableau t et $(a, b) \in C_t$, alors

$$\kappa_t\{t\} = 0.$$

c) Soient t et s des tableaux de forme λ et μ . Si $\kappa_t\{s\} \neq 0$, alors $\lambda \supseteq \mu$.

Démonstration. a) $K = (\epsilon, (a, b))$ est un sous-groupe de C_t , on peut écrire $C_t = \biguplus_i k_i K$ où $k_i \in C_t$. Alors $\kappa_t = (\sum_i \text{sgn}(k_i) k_i)(\epsilon - (a, b))$.

b) Par hypothèse $(a, b)\{t\} = \{t\}$, $\kappa_t\{t\} = k(\epsilon - (a, b))\{t\} = 0$.

c) Soient a et b deux éléments dans une même ligne de s . Si ils sont dans une même colonne de t , alors $(a, b) \in C_t$ et $\kappa_t\{s\} = 0$ (par b)) ce qui contredit l'hypothèse. On est alors dans le cas du lemme de domination et $\lambda \supseteq \mu$. □

Démonstration de la propriété 1. Il existe e_t tel que $\theta(e_t) \neq 0$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit hermitien donc $M^\lambda = S^\lambda \oplus S^{\lambda^\perp}$. On peut étendre θ à M^λ en posant $\theta(S^{\lambda^\perp}) = 0$. Alors

$$0 \neq \theta(e_t) = \theta(\kappa_t\{t\}) = \kappa_t\theta(\{t\}) = \kappa \left(\sum_i c_i\{s_i\} \right).$$

Donc il existe $\{s_i\}$ tel que $\kappa_t\{s_i\} \neq 0$, et le lemme 4 c) nous donne $\lambda \supseteq \mu$. □

1.2.3 Conclusion

Les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n sont les $\mathfrak{S}_{(1, \dots, \lambda_1)} \times \dots \times \mathfrak{S}_{(1, \dots, \lambda_k)}$, on remarque immédiatement qu'on peut les mettre en bijection avec les partitions de n . Si on montre que les S^λ sont inéquivalents deux à deux, comme le nombre de représentations irréductibles d'un groupe est égal au nombre de classes de conjugaison de ce même groupe, les S^λ formeront bien un ensemble complet de \mathfrak{S}_n -modules irréductibles sur \mathbb{C} .

Démonstration de l'inéquivalence des modules de Specht. Si $S^\lambda \cong S^\mu$, comme $S^\mu \subseteq M^\mu$ on trouve $\theta \in \text{Hom}(S^\lambda, M^\mu)$ non nul. La proposition précédente nous donne $\lambda \supseteq \mu$, de même on a $\mu \supseteq \lambda$ étant donné le rôle symétrique joué par λ et μ . D'où $\lambda = \mu$. □

Finalement les modules de Specht forment un ensemble complet de \mathfrak{S}_n -modules irréductibles sur \mathbb{C} .

2 Bases des modules de Specht

On montrera ici que l'ensemble $\{e_t : t \text{ est un tableau de Young de forme } \lambda\}$ engendre S^λ .

2.1 Une famille libre de S^λ

En introduisant un nouvel ordre partiel sur les tableaux on montre que la famille $\{e_t : t \text{ est un tableau de Young de forme } \lambda\}$ est libre.

Définition 7. – $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ où les λ_i sont positifs et $\sum_i \lambda_i = n$ est appelé une composition de n . Ici l'ordre des λ_i n'est pas imposé, en particulier une partition de n est une composition de n .

- Si $\{t\}$ est un tableau, de forme λ une composition, on définit $\{t^i\}$ comme étant le tableau formé des éléments de $\{t\}$ inférieurs ou égaux à i . Alors λ^i est la composition correspondant à $\{t^i\}$.
- Si $\{t\}$ et $\{s\}$ sont des tableaux de suites de composition λ^i et μ^i , on définit un ordre : $\{t\} \succeq \{s\}$ si $\lambda^i \supseteq \mu^i$ pour tout i .

Lemme 5. Si $k < l$ et k apparaît dans une ligne plus basse que l dans $\{t\}$, alors

$$\{t\} \prec (k, l)\{t\}.$$

Démonstration. Les compositions de ces deux tableaux diffèrent uniquement pour $k \leq i < l$. Or, dans ce cas, la ligne l_1 de $\{t\}$ ayant un élément de plus que l_1 dans $(k, l)\{t\}$, elle est située en dessous de la ligne l_2 de $(k, l)\{t\}$ ayant un élément de plus que l_2 dans $\{t\}$. On voit alors facilement que quelque soit $k \leq i < l$, la i -ème composition de $\{t\}$ est inférieure à celle de $(k, l)\{t\}$. D'où le résultat. \square

Définition 8. Soit $v \in M^\lambda$ s'écrivant $v = \sum_i c_i \{t_i\}$. On dit que $\{t_i\}$ apparaît dans v si $c_i \neq 0$.

Corollaire 2. Si t est un tableau de Young et $\{s\}$ apparaît dans e_t , alors $\{t\} \succeq \{s\}$.

Démonstration. On sait que $s = \pi t$ où $\pi \in C_t$. On raisonne par récurrence sur le nombre d'inversions de s , c'est-à-dire le nombre de paires $k < l$ dans la même colonne où k est dans une ligne inférieure à la ligne de s . Soit (k_0, s_0) une de ces inversions, d'après le lemme 4, $\{s\} \prec (k, l)\{s\}$ et $(k, l)\{s\}$ a moins d'inversions que $\{s\}$. On conclut par récurrence. \square

Lemme 6. Soit v_1, \dots, v_n des éléments de M^λ . On suppose que pour chaque v_i il existe un $\{t_i\}$ qui apparaît dans v_i tel que :

- $\{t_i\}$ est maximal parmi les $\{t\}$ apparaissant dans v_i pour l'ordre \succeq .
- Les $\{t_i\}$ sont distincts deux à deux.

Alors les v_i sont indépendants.

Démonstration. En renumérotant on peut supposer que $\{t_1\}$ est maximal parmi les $\{t_i\}$. Les deux conditions du lemme assurent alors que $\{t_1\}$ n'apparaît que dans v_1 . Si $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$ on a alors $c_1 = 0$. Une récurrence immédiate nous donne alors le résultat du lemme. \square

Théorème 3. L'ensemble $\{e_t : t \text{ est un tableau de Young de forme } \lambda\}$ est une famille libre.

Démonstration. Les $\{t\}$ sont distincts deux à deux et le corollaire du lemme 4 nous dit qu'ils sont maximaux parmi les $\{s\}$ apparaissant dans e_t . Le lemme 5 s'applique et nous donne le résultat. \square

2.2 Une famille génératrice de S^λ

On montre par récurrence que si un t est un tableau, e_t est une combinaison linéaire de e_{t_i} où les t_i sont des tableaux de Young.

Définition 9. – Si A et B sont des ensembles d'entiers disjoints, on peut trouver des permutations π telles que $\mathfrak{S}_{A \cup B} = \bigsqcup_{\pi} \pi(\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B)$. On définit alors l'élément de Garnir correspondant :

$$g_{A,B} = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi)\pi.$$

Cette définition dépend du choix des π qui n'est pas unique.

- Soit t un tableau, A et B des sous ensembles des colonnes j et $j+1$ de t respectivement. L'élément de Garnir associé à t , A et B est $g_{A,B}$ où les π ont été choisis de telle sorte que les éléments de $A \cup B$ soient placés par ordre croissant dans les colonnes de πt . Ici le choix des π est fixé.

Propriété 2. Soient t , A et B définis comme dans la définition précédente. Si $|A \cup B|$ est plus grand que la j -ième colonne de t , alors

$$g_{A,B}e_t = 0.$$

Démonstration. Montrons d'abord que

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{A \cup B}} \text{sgn}(\pi)\pi e_t = 0.$$

Soit $\sigma \in C_t$, comme $|A \cup B|$ est plus grand que la j -ième colonne de t , il existe $a, b \in A \cup B$ tels que a et b soient dans la même ligne de σt . Alors $(a, b) \in \mathfrak{S}_{A \cup B}$. De la même manière que pour la partie b) des lemmes préliminaires de la proposition 1 on montre qu'alors :

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{A \cup B}} \text{sgn}(\pi)\pi\{\sigma t\} = 0.$$

Ceci quelque soit $\sigma \in C_t$ d'où le résultat.

Or $\mathfrak{S}_{A \cup B} = \bigsqcup_{\pi_k} \pi_k(\mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B)$, d'où

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{A \cup B}} \text{sgn}(\pi)\pi = \sum_{\pi_k} \left(\text{sgn}(\pi_k)\pi_k \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B} \text{sgn}(\sigma)\sigma \right).$$

Le résultat précédent nous dit que

$$g_{A,B} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B} \text{sgn}(\sigma) \sigma \right) e_t = 0.$$

Si $\sigma \in \mathfrak{S}_A \times \mathfrak{S}_B$, alors $\sigma \in C_t$,

$$\text{sgn}(\sigma) \sigma e_t = \text{sgn}(\sigma) \sigma \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \pi \{t\} = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \pi \{t\} = e_t.$$

Finalement

$$g_{A,B} |A \cup B| e_t = 0.$$

D'où le résultat. □

Définition 10. – On définit une nouvelle relation d'équivalence où cette fois deux tableau sont équivalents si leurs colonnes correspondantes contiennent les mêmes éléments. On notera alors $[t]$ la classe d'équivalence du tableau t .

– On alors l'ordre partiel \succeq sur les $[t]$ en remplaçant "ligne" par "colonne" dans la définition de cet ordre sur les $\{t\}$.

Théorème 4. L'ensemble $E = \{e_t : t \text{ est un tableau de Young de forme } \lambda\}$ engendre S^λ .

Démonstration. Si e_t est dans l'espace engendré par E et $s \in [t]$, $s = \sigma t$ où $\sigma \in C_t$. Alors

$$e_s = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \pi \{\sigma t\} = \text{sgn}(\sigma) \sum_{\sigma \pi \in C_t} \text{sgn}(\sigma \pi) \sigma \pi \{t\} = \text{sgn}(\sigma) e_t.$$

Donc e_s est également dans l'espace engendré par E . On pourra donc supposer que les entiers sont classés par ordre croissant dans chaque colonne de t .

L'ensemble des $[t]$ a un élément maximum $[t_0]$, où t_0 est le tableau où l'on place les entiers dans l'ordre en prenant les colonnes successives de gauche à droite et en remplissant chaque colonne de haut en bas. e_{t_0} est dans l'espace engendré par E car t_0 est un tableau de Young.

On choisit alors t un tableau et on suppose que si $[s] \succ [t]$ alors e_s est dans l'espace engendré par E . Si t est un tableau de Young on a fini. Sinon comme on a choisit t avec les éléments dans les colonnes classés par ordre croissant, il existe deux éléments côte-à-côte tels que celui de gauche soit supérieur à celui de droite. Soient a_i et b_i ces éléments, j le numéro de la colonne contenant a_i , $a_1 < \dots < a_i < \dots < a_p$ les éléments de la j -ième colonne et $b_1 < \dots < b_i < \dots < b_p$ les éléments de la $(j+1)$ -ième colonne. On prend alors $A = \{a_i, \dots, a_p\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_i\}$. D'après la proposition 2, $g_{A,B} e_t = 0$ où $g_{A,B} = \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \pi$. D'où

$$e_t = \sum_{\pi \neq \epsilon} \text{sgn}(\pi) e_{\pi t}.$$

Par l'analogie du lemme 3 pour les colonnes on montre que $[\pi t] \succ [t]$. On conclut avec l'hypothèse de récurrence. □

Conclusion

1. $\{e_t : t \text{ est un tableau de Young de forme } \lambda\}$ est une base de S^λ .
2. $\dim S^\lambda = f^\lambda$ où f^λ est le nombre de tableaux de Young de forme λ .
3. $\sum_\lambda (f^\lambda)^2 = n!$ où on somme sur les partitions de n .

Le point 3. vient du fait que pour un groupe G ,

$$\sum_V (\dim V)^2 = |G|$$

où l'on somme sur les G -modules irréductibles.

On a alors que

$$\sum_\lambda \frac{(f^\lambda)^2}{n!} = 1,$$

ce qui définit une mesure de probabilité sur les partitions de n :

$$\mu_n(\lambda) = \frac{(f^\lambda)^2}{n!}$$

C'est la *mesure de Plancherel*.

Deuxième partie

Formule de Frame-Robinson-Thrall

Définition 11. Une *équerre* H_{ij} d'un tableau de Young est l'ensemble des cases (x, y) du tableau telles que $x \geq i$ et $y \geq j$. On note h_{ij} le nombre de cases de H_{ij} .

Exemple : Dans le tableau de Young suivant :

1	3	4
2	5	
6	8	
7		

,

l'équerre $(1, 2)$ contient les cases 3, 4, 5, et 8. On a donc $h_{12} = 4$.

On montrera dans cette partie une formule permettant de relier le nombre de tableaux de Young de forme λ aux équerres du diagramme de Young correspondant. C'est le théorème suivant :

Théorème 5 (Formule de Frame-Robinson-Thrall). Soit f_λ le nombre de tableaux de Young de forme λ :

$$f_\lambda = \frac{n!}{\prod h_{ij}}.$$

Démonstration. (D'après [GNW79]) On procèdera par récurrence sur la taille d'un tableau en utilisant un raisonnement probabiliste.

$$\text{Si } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \text{ soit } F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \begin{cases} f_\lambda & \text{si } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Sachant que l'entier n est forcément placé dans un coin, on a la relation de récurrence suivante :

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \sum_{\alpha=1}^m F(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}, \lambda_\alpha - 1, \dots, \lambda_m)$$

Si la case (α, λ_α) n'est pas un coin on a bien $F(\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}, \lambda_\alpha - 1, \dots, \lambda_m) = 0$.

On pose

$$\tilde{f}_\lambda = \begin{cases} \frac{n!}{\prod h_{ij}} & \text{si } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

et $\lambda_\alpha = (\lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha-1}, \lambda_\alpha - 1, \dots, \lambda_m)$.

On veut montrer que

$$\sum_{\alpha=1}^m \frac{\tilde{f}_{\lambda_\alpha}}{\tilde{f}_\lambda} = 1.$$

Pour cela on donne une interprétation probabiliste de $\frac{\tilde{f}_{\lambda_\alpha}}{\tilde{f}_\lambda}$.

On s'intéresse au processus suivant :

- À l'étape 0, on choisit une case (i_0, j_0) uniformément dans le diagramme.
- À l'étape n , on choisit une case (i_n, j_n) de l'équerre $H_{i_{n-1}j_{n-1}}$ différente de (i_{n-1}, j_{n-1}) uniformément.
- On s'arrête lorsqu'on arrive à un coin (α, β) .

On note $p(\alpha, \beta)$ la probabilité d'arriver au coin (α, β) .

Si une trajectoire suit le chemin $(a, b) = (a_1, b_1) \rightarrow (a_2, b_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_m, b_m) = (\alpha, \beta)$,

on introduit les ensembles $\begin{cases} A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \\ B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \end{cases}$ qui sont les projections verticales et horizontales du chemin.

On remarque que quelque soit i on a soit $a_i = a_{i+1}$, soit $b_i = b_{i+1}$ car la trajectoire ne peut que descendre ou aller à droite.

On pose $p(A, B|a, b)$ la probabilité qu'un chemin commençant en (a, b) admette A et B comme projections.

Lemme 7.

$$p(A, B|a, b) = \prod_{\substack{i \in A \\ i \neq \alpha}} \frac{1}{h_{i\beta} - 1} \prod_{\substack{j \in B \\ j \neq \beta}} \frac{1}{h_{\alpha j} - 1}.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la taille de A et B . Notons Π le membre de droite de l'égalité. On a en considérant la position après le premier déplacement :

$$p(A, B|a, b) = \frac{1}{h_{a_1 b_1} - 1} [p(A - a_1, B|a_2, b_1) + p(A, B - b_1|a_1, b_1)].$$

Avec l'hypothèse de récurrence,

$$p(A, B|a, b) = \frac{1}{h_{a_1 b_1} - 1} [(h_{a_1, \beta} - 1) + (h_{\alpha, b_1} - 1)] \cdot \Pi.$$

On voit alors que $h_{ab} = h_{a\beta} + h_{\alpha b} - 1$

·	·	·	●	●
●	○	○	○	
●				

où $\begin{cases} (\bullet + \cdot) \rightarrow h_{ab} \\ (\bullet + \circ) \rightarrow h_{a\beta} + h_{\alpha b} - 1 \end{cases}$

Alors

$$\frac{1}{h_{a_1 b_1} - 1} [(h_{a_1, \beta} - 1) + (h_{\alpha, b_1} - 1)] = 1.$$

On conclut à l'aide de la formule de récurrence. □

Or

$$p(\alpha, \beta) = \frac{1}{n} \sum_{A, B} p(A, B|a, b),$$

où l'on somme sur les projections des chemins partant de toutes les cases (a, b) et arrivant en (α, β) . D'autre part

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{f}_{\lambda\alpha}}{\tilde{f}_{\lambda}} &= \frac{1}{n} \prod_{1 \leq i < \alpha} \left(\frac{h_{i\beta}}{h_{i\beta} - 1} \right) \prod_{1 \leq j < \beta} \left(\frac{h_{\alpha j}}{h_{\alpha j} - 1} \right) \\ &= \frac{1}{n} \prod_{1 \leq i < \alpha} \left(1 + \frac{1}{h_{i\beta} - 1} \right) \prod_{1 \leq j < \beta} \left(1 + \frac{1}{h_{\alpha j} - 1} \right). \end{aligned}$$

En développant les produits on se retrouve à sommer les grandeurs du lemme précédent sur les mêmes chemins, d'où

$$p(\alpha, \beta) = \frac{\tilde{f}_{\lambda\alpha}}{\tilde{f}_{\lambda}}.$$

Comme de plus

$$\sum_{(\alpha, \beta)} p(\alpha, \beta) = 1,$$

\tilde{f}_{λ} vérifie la même relation de récurrence que F et $F(1) = \tilde{f}_1$, ce qui permet de conclure. □

Troisième partie

Forme limite pour les diagrammes de Young sous la mesure de Plancherel

3 Considérations préliminaires

On peut représenter un diagramme de Young associé à $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ dans le plan en le représentant comme $\Lambda = \bigcup_{i=1}^s [0, \lambda_i] \times [i-1, i]$. Notre but est de montrer la convergence (dans un sens que nous préciserons) des diagrammes de Young ainsi représentés vers une forme limite, donnée par la fonction Ω un peu plus loin dans un autre système de coordonnées. Notre démonstration suivra le point de vue présenté dans [VK85]. Pour ce faire, nous allons commencer par évaluer la mesure de Plancherel d'un diagramme de Young à partir de sa bordure supérieure, définissant une fonction constante par morceaux F_Λ . Soit Λ un diagramme de Young de taille n . La mesure de Plancherel est définie par :

$$\mu_n(\Lambda) = \frac{\dim^2 \Lambda}{n!} = \frac{n!}{\prod h_{i,j}^2}$$

En prenant le logarithme et en divisant par \sqrt{n} , on a d'après la formule de Stirling :

$$\begin{aligned} -\frac{\ln \mu_n(\Lambda)}{\sqrt{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\ln \prod h_{i,j}^2 - \ln n! \right) \\ &= \sqrt{n} \left(\frac{2}{n} \sum \ln h_{i,j} \right) - \sqrt{n} (\ln n - 1) - \epsilon_n \\ &= \sqrt{n} \left(1 + \frac{2}{n} \left(n \frac{-\ln n}{2} + \sum \ln h_{i,j} \right) \right) - \epsilon_n \\ &= J_\Lambda \sqrt{n} - \epsilon_n, \end{aligned}$$

avec

$$J_\Lambda = 1 + \frac{2}{n} \sum_{i,j} \ln \frac{h_{i,j}}{\sqrt{n}},$$

et

$$\epsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\ln \sqrt{2\pi n} + \frac{1}{12n} + \dots \right) = O\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$$

ne dépendant que de n .

Notre but ici est de généraliser la formule de μ_n à toute fonction décroissante à support compact. Pour évaluer J_Λ à partir de F_Λ , nous allons utiliser l'*intégrale de l'équerre* : Si F est une fonction décroissante à support compact définie sur $[0, \infty[$, on pose $F^{-1}(y) = \inf\{x \mid F(x) \leq y\}$, et on définit l'*équerre* du point (x, y) comme $h_F(x, y) = F(x) + F^{-1}(y) - x - y$.

On définit aussi $s_F = \{(x, y) \mid 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < F(x)\}$ le sous-graphe de F .

On appelle alors la quantité

$$\theta_F = 1 + 2 \iint_{s_F} \ln h_F(x, y) dx dy$$

l'intégrale de l'équerre de F .

Considérons le diagramme normalisé $\tilde{\Lambda}$ correspondant au diagramme Λ contracté d'un facteur \sqrt{n} , de sorte que son aire soit égale à 1. On pose F_Λ la fonction associée, c'est-à-dire dont le sous-graphe est $\tilde{\Lambda}$. Clairement, J_Λ est la discrétisation de l'intégrale θ_{F_Λ} .

Posons $\tilde{\theta}(\Lambda) = \sqrt{n}(J_\Lambda - \theta_\Lambda)$. L'estimation de l'erreur $\tilde{\theta}(\Lambda)$ entre la somme discrète et l'intégrale de l'équerre θ_Λ est donnée par le

Lemme 8.

$$\tilde{\theta}(\Lambda) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i,j} c(h_{i,j}),$$

avec

$$c(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)x^{2k}}.$$

Notamment, $\tilde{\theta}(\Lambda) > 0$.

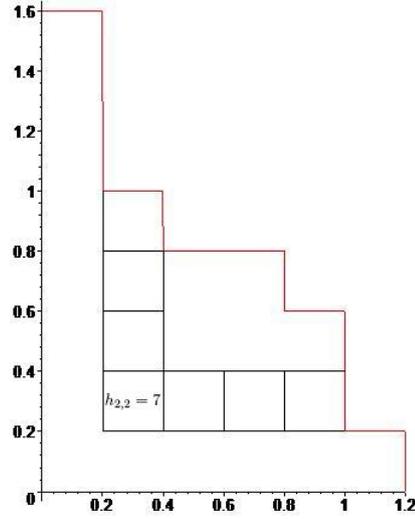


FIGURE 1 – Un diagramme de Young renormalisé et son équerre en $(2, 2)$

Démonstration. Soit $\square_{i,j} \subset \tilde{\Lambda}$ l'image de la case (i, j) de Λ par la contraction. Si $(x, y) \in \square_{i,j}$, alors

$$h(x, y) = \frac{h_{i,j}}{\sqrt{n}} - (x - x_i) - (y - y_j).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} 2 \iint_{\square_{i,j}} \ln h(x, y) \, dx \, dy &= 2 \iint_{\square_{i,j}} \ln \frac{h_{i,j}}{\sqrt{n}} \, dx \, dy + 2 \iint_{\square_{i,j}} \ln \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{h_{i,j}} (x - x_i + y - y_j) \right) \, dx \, dy \\ &= \frac{2}{n} \ln \frac{h_{i,j}}{\sqrt{n}} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \iint_{\left[-\frac{1}{2\sqrt{n}}, \frac{1}{2\sqrt{n}}\right]^2} \frac{n^{k/2} (x+y)^k}{k h_{i,j}^k} \, dx \, dy \\ &= \frac{2}{n} \ln \frac{h_{i,j}}{\sqrt{n}} - \sum_{k=1}^{\infty} \iint_{\left[-\frac{1}{2\sqrt{n}}, \frac{1}{2\sqrt{n}}\right]^2} \frac{n^k (x+y)^{2k}}{k h_{i,j}^{2k}} \, dx \, dy \quad (\text{par imparité}) \\ &= \frac{2}{N} \ln \frac{h_{i,j}}{\sqrt{n}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{k h_{i,j}^{2k}} \iint_{\left[-\frac{1}{2\sqrt{n}}, \frac{1}{2\sqrt{n}}\right]^2} (x+y)^{2k} \, dx \, dy \\ &= \frac{2}{n} \ln \frac{h_{i,j}}{\sqrt{n}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{k h_{i,j}^{2k}} \cdot \frac{n^{-k-1}}{(k+1)(2k+1)} \\ &= \frac{2}{n} \ln \frac{h_{i,j}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} c(h_{i,j}), \end{aligned}$$

et donc

$$J_{\Lambda} - \theta_{\Lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} c(h_{i,j})$$

□

On peut montrer que $\tilde{\theta}(\Lambda)$ est borné et donc que θ_{F_Λ} est la "forme limite" de J_Λ , c'est-à-dire que si une suite $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ de diagrammes de tailles respectives $1, 2, \dots$ vérifient que $F_{\Lambda_n} \rightarrow F$, alors

$$-\frac{1}{n} \ln \mu_n(\Lambda_n) \longrightarrow \theta_F.$$

4 Expression quadratique de l'intégrale de l'équerre et point critique

La symétrie de la mesure de Plancherel relativement à la transformation échangeant x et y nous pousse à considérer le changement de coordonnées

$$X = \frac{x-y}{2} \text{ et } Y = \frac{x+y}{2}.$$

Dans ce système de coordonnées, la bordure supérieure de $\tilde{\Lambda}$ est le graphe d'une fonction L_Λ continue et affine par morceaux, de dérivée ± 1 et pour laquelle $L_\Lambda(X) - |X|$ est à support compact.

On définit pour toute fonction L, \mathcal{C}^∞ par morceaux, l'intégrale :

$$\theta(L) = 1 + 2 \iint_{t < s} [\ln 2(s-t)] (1 - L'(s))(1 + L'(t)) ds dt$$

Le changement de variable $x = L_\Lambda(t) + t$ et $y = L_\Lambda(s) - s$ dans l'intégrale $\theta(L)$ nous amène à :

Lemme 9. *Pour tout diagramme de Young, $\theta_\Lambda = \theta(L_\Lambda)$*

On définit maintenant la fonction Ω par :

$$\Omega(X) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(X \arcsin X + \sqrt{1 - X^2} \right) & \text{si } |X| \leq 1 \\ |X| & \text{si } |X| \geq 1 \end{cases}$$

Posons maintenant $f(X) = L(X) - \Omega(X)$. On a :

Lemme 10. *L'intégrale de l'équerre s'exprime en fonction de f sous la forme :*

$$\theta(L) = - \iint \ln 2|s-t| f'(s) f'(t) ds dt + 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{argch}|s| ds.$$

Entre autres, $\theta(\Omega) = 0$.

Démonstration. On prend a et b tels que f soit nulle en dehors de l'intervalle $[a, b]$ et $[-1, 1] \subset [a, b]$. On pose

$$\Phi_0(x) = -\ln 2|x|, \quad \Phi_n(x) = \int_0^x \Phi_{n-1}(y) dy \text{ et } H(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{argch}|x| \pm \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

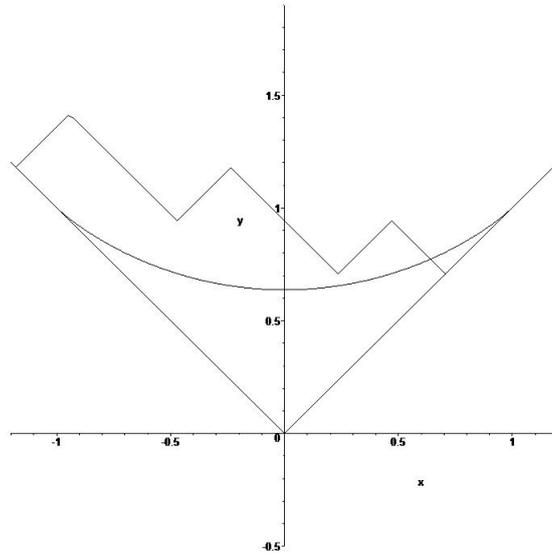


FIGURE 2 – Un diagramme de Young dans le nouveau systèmes de coordonnées, et le graphe de la fonction Ω

On cherche à calculer

$$I(s) = \int_a^b \Phi_0(s-t)\Omega'(t)dt$$

$$\Omega' = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin x & \text{si } |x| \geq 1 \\ \operatorname{sgn} x & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculons l'intégrale sur $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Phi_0(s-t)\Omega'(t)dt &= - \left[\frac{2}{\pi} \Phi_1(s-t) \arcsin t \right]_{-1}^1 + \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_1(s-t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= -\Phi_1(s-1) - \Phi_1(s+1) + F(s) \end{aligned}$$

Calculons $F(s)$

$$F'(s) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_0(s-t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$F''(s) = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{(s-t)\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} \pm \frac{2}{\sqrt{s^2-1}} & \text{si } |s| \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{voir [Dwi61]})$$

On peut alors déterminer $F'(s)$:

– Si $|s| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
F'(s) = F'(0) &= \int_{-1}^1 \frac{\Phi_0(-t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \int_{-1}^1 \frac{\ln(2|t|)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \int_{-1}^1 \frac{\ln(2)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_{-1}^1 \frac{\ln(|t|)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \ln 2 [\arcsin t]_{-1}^1 - \pi \ln 2 \text{ (voir [Dwi61])} \\
&= 0
\end{aligned}$$

– Si $s > 1$,

$$\begin{aligned}
F'(s) &= -2 \int_1^s \frac{dr}{\sqrt{r^2-1}} + C \\
&= -2 [\operatorname{argchr}]_1^s + C \\
&= -2 \operatorname{argch} s + C
\end{aligned}$$

Comme F' est continue, $C = F'(1) = 0$

– Si $s < 1$, le même calcul donne

$$F'(s) = -2 \operatorname{argch}(-s)$$

On calcule $F(0)$,

$$\begin{aligned}
F(0) &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_1(-t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En effet, Φ_0 étant paire, Φ_1 est impaire, et $\frac{\Phi_1(-t)}{\sqrt{1-t^2}}$ aussi, donc l'intégrale sur $[-1, 1]$ est nulle.

On a alors

$$\begin{cases} -2H'(s) = F'(s) \\ -2H(0) = F(0) \end{cases}$$

D'où

$$-2H(s) = F(s)$$

En revenant à $I(s)$,

$$\begin{aligned}
I(s) &= \int_1^b \Phi_0(s-t) dt - \int_a^{-1} \Phi_0(s-t) dt - \Phi_1(s-1) - \Phi_1(s+1) - 2H(s) \\
&= -[\Phi_1(s-t)]_1^b + [\Phi_1(s-t)]_a^{-1} - \Phi_1(s-1) - \Phi_1(s+1) - 2H(s) \\
&= -\Phi_1(s-b) - \Phi_1(s-a) - 2H(s) \\
&= \Phi_1(b-s) + \Phi_1(a-s) - 2H(s) \qquad \text{car } \Phi_1 \text{ est impaire}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
& - \int_a^b \int_a^b \ln 2|s-t|f'(s)f'(t)dsdt \\
& = \int_a^b \int_a^b \Phi_0(s-t)\Omega'(s)\Omega'(t)dsdt - 2 \int_a^b \int_a^b \Phi_0(s-t)'(s)\Omega'(t)dsdt + \int_a^b \int_a^b \Phi_0(s-t)'(s)L'(t)dsdt \\
& = \int_a^b I(s)\Omega'(s)ds - 2 \int_a^b I(s)'(s)ds + \int_a^b \int_a^b \Phi_0(s-t)'(s)L'(t)dsdt
\end{aligned}$$

D'où

$$\theta(L) = \int_a^b I(s)\Omega'(s)ds - 2 \int_a^b I(s)'(s)ds + \int_a^b \int_a^b \Phi_0(s-t)'(s)L'(t)dsdt + 4 \int_{|s|>1} f(s)\operatorname{argch}|s|ds$$

On peut alors, par des calculs analogues, montrer que :

$$\int_a^b I(s)\Omega'(s)ds = 1 - 2\Phi_2(b-a) - 4 \int_a^b H(s)\Omega'(s)ds$$

Puis que :

$$\theta(L) = 1 - 2\Phi_2(b-a) - 2 \int_a^b \Phi_1(a-s)L'(s)ds - 2 \int_a^b \Phi_1(b-s)L'(s)ds + \int_a^b \int_a^b \Phi_0(s-t)'(s)L'(t)dsdt$$

En développant l'expression initiale de θ on a le résultat. \square

L'idée de ce qui suit est qu'il va se produire un phénomène de concentration de la mesure dans les valeurs de $\theta(\Lambda)$ proches de 0.

On introduit maintenant une norme de Sobolev

$$\|f\|_{\theta}^2 = \iint \left(\frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right)^2 ds dt$$

dans l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ par morceaux. On a alors le

Lemme 11.

$$\theta(L) = \frac{1}{2}\|f\|_{\theta}^2 + 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{argch}|s| ds.$$

Démonstration. On introduit la transformée de Hilbert d'une fonction f :

$$G(f)(s) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t) dt}{s-t} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln|s-t|f'(t) dt.$$

Sa transformée de Fourier vaut $\widehat{G(f)}(\omega) = i \arg \omega \cdot \hat{f}(\omega)$.

On a donc

$$\begin{aligned} \theta(L) &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} G(f)(s) \overline{f'(s)} ds + 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arch}|s| ds \\ &= \frac{\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \arg \omega \cdot \hat{f}(\omega) \overline{i\omega \hat{f}(\omega)} d\omega + 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arch}|s| ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega + 4 \int_{|s|>1} f(s) \operatorname{arch}|s| ds, \end{aligned}$$

et le premier terme de la dernière ligne est égal à $\frac{1}{2} \|f\|_{\theta}^2$. (voir [VK81]) □

5 Convergence en probabilité des diagrammes de Young

Posons \mathfrak{Y}_n l'ensemble des diagrammes de Young de taille n , et

$$M_n = \{\Lambda \in \mathfrak{Y}_n \mid \theta(L_\Lambda) < \frac{2\pi}{\sqrt{6n}}\}$$

Lemme 12.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(M_n) = 1$$

Démonstration. Soit $p(n)$ le nombre total de diagrammes de Young de taille n : c'est le nombre de partitions de n , et son équivalent est donné par la formule d'Euler-Hardy-Ramanujan

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}}$$

Soit maintenant $\Lambda \notin M_n$. On a, d'après le lemme 1,

$$-\ln \mu_n(\Lambda) > n\theta(L_\Lambda) - \sqrt{n}\epsilon_n$$

donc

$$\mu_n(\Lambda) \leq e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}} e^{-\sqrt{n}\epsilon_n}.$$

Or, $\sqrt{n}\epsilon_n = \sqrt{2\pi n} + r(n)$ avec $r(n) \rightarrow 0$, donc pour n assez grand il existe une constante C_0 telle que

$$\mu_n(\Lambda) \leq C_0 \sqrt{2\pi n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}}.$$

Donc

$$\mu_n(\mathfrak{Y}_n \setminus M_n) \leq p(n) C_0 \sqrt{2\pi n} e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

□

Nous sommes maintenant capables de démontrer le lemme suivant :

Lemme 13. *Il existe $C > 0$ et des ensembles $A_n \subset \mathfrak{Y}_n$ tels que $\mu_n(A_n) \rightarrow 1$ et si $\Lambda \in M_n \cap A_n$, alors*

$$\sup_s |L_\Lambda(s) - \Omega(s)| < C \cdot n^{-1/6}.$$

Démonstration. Commençons par borner la norme L^2 de la fonction $f_\Lambda(s) = L_\Lambda(s) - \Omega(s)$. En considérant un intervalle $[-a, a]$ contenant le support de f_Λ comme dans la preuve de lemme 10, on a :

$$\begin{aligned} \|f_\Lambda\|_\theta^2 &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \left(\frac{f_\Lambda(s) - f_\Lambda(t)}{s-t} \right)^2 ds dt + 2 \int_{-a}^a \int_a^\infty \left(\frac{f_\Lambda(t)}{s-t} \right)^2 ds dt + 2 \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{-a} \left(\frac{f_\Lambda(t)}{s-t} \right)^2 ds dt \\ &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \left(\frac{f_\Lambda(s) - f_\Lambda(t)}{s-t} \right)^2 ds dt + 2 \int_{-a}^a f_\Lambda(t)^2 \frac{1}{a-t} dt + 2 \int_{-a}^a f_\Lambda(t)^2 \frac{1}{a+t} dt \\ &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \left(\frac{f_\Lambda(s) - f_\Lambda(t)}{s-t} \right)^2 ds dt + 2 \int_{-a}^a f_\Lambda(t)^2 \frac{2a}{a^2-t^2} dt \\ &= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \left(\frac{f_\Lambda(s) - f_\Lambda(t)}{s-t} \right)^2 ds dt + 4a \left\| \frac{f_\Lambda(s)}{\sqrt{a^2-s^2}} \right\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2a \left\| \frac{f_\Lambda(s)}{\sqrt{a^2-s^2}} \right\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2} \|f_\Lambda\|_{L^2}^2 \\ &\leq \theta(L_\Lambda) \text{ (d'après le lemme 11)} \\ &\leq \frac{2\pi}{\sqrt{6n}} \text{ (car } \Lambda \in M_n) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|f_\Lambda(s)\|_{L^2}^2 \leq a^2 \left\| \frac{f_\Lambda(s)}{\sqrt{a^2-s^2}} \right\|_{L^2}^2 \leq \frac{\pi a}{\sqrt{6n}}.$$

Maintenant, comme $|f'_\Lambda(s)| \leq 2$ pour tout s et tout Λ , on a :

$$\|f_\Lambda\|_{L^2}^2 \geq 2 \int_0^{\frac{\|f_\Lambda\|_{L^\infty}}{2}} (2x)^2 dx = \frac{1}{3} \|f_\Lambda\|_{L^\infty}^3$$

donc

$$\|f_\Lambda\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{3\pi a}{\sqrt{6}} \right)^{1/3} \cdot n^{-1/6}.$$

Hammersley a montré dans [Ham72] que sous la mesure de Plancherel, $\frac{\lambda_1}{\sqrt{n}}$ (la longueur de la première ligne d'un diagramme de Young divisée par \sqrt{n}) converge en probabilité vers une constante C_0 . Donc $\mu_n(A_n = \{\Lambda \in \mathfrak{Y}_n | a \leq C_0\}) \rightarrow 1$, ce qui conclut la preuve du lemme. □

Cela montre finalement le théorème 1, ce qui conclut ce mémoire.

Références

- [Dwi61] Herbert Bristol Dwight. *Tables of integrals and other mathematical data*. 4th ed. The Macmillan Company, New York, 1961.
- [GNW79] Curtis Greene, Albert Nijenhuis, and Herbert S. Wilf. A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape. *Adv. in Math.*, 31(1) :104–109, 1979.
- [Ham72] J. M. Hammersley. A few seedlings of research. In *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (Univ. California, Berkeley, Calif., 1970/1971), Vol. I : Theory of statistics*, pages 345–394, Berkeley, Calif., 1972. Univ. California Press.
- [Sag01] Bruce E. Sagan. *The symmetric group*, volume 203 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.
- [VK81] A. M. Vershik and S. V. Kerov. Asymptotic theory of the characters of a symmetric group. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 15(4) :15–27, 96, 1981.
- [VK85] A. M. Vershik and S. V. Kerov. Asymptotic behavior of the maximum and generic dimensions of irreducible representations of the symmetric group. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 19(1) :25–36, 96, 1985.